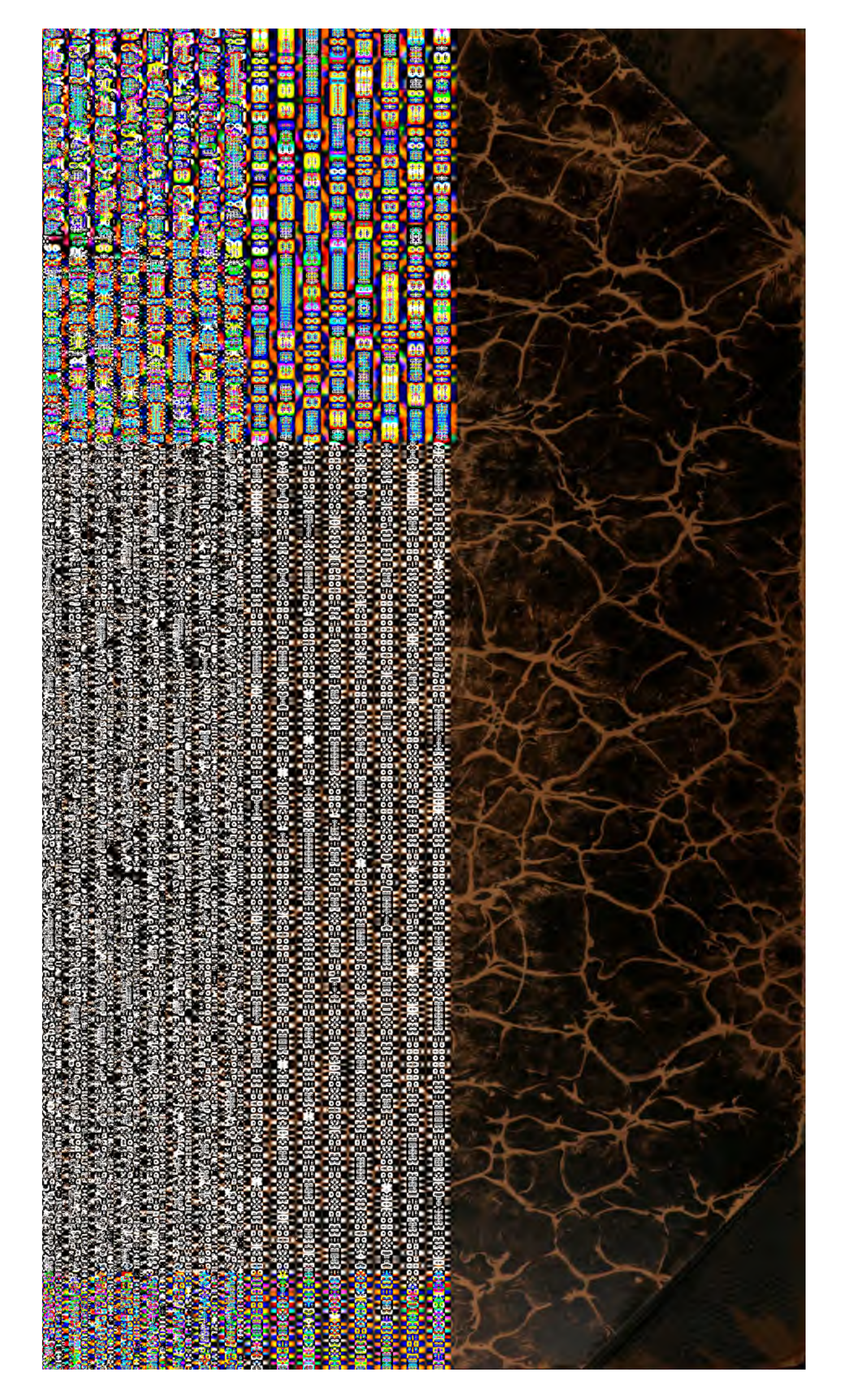
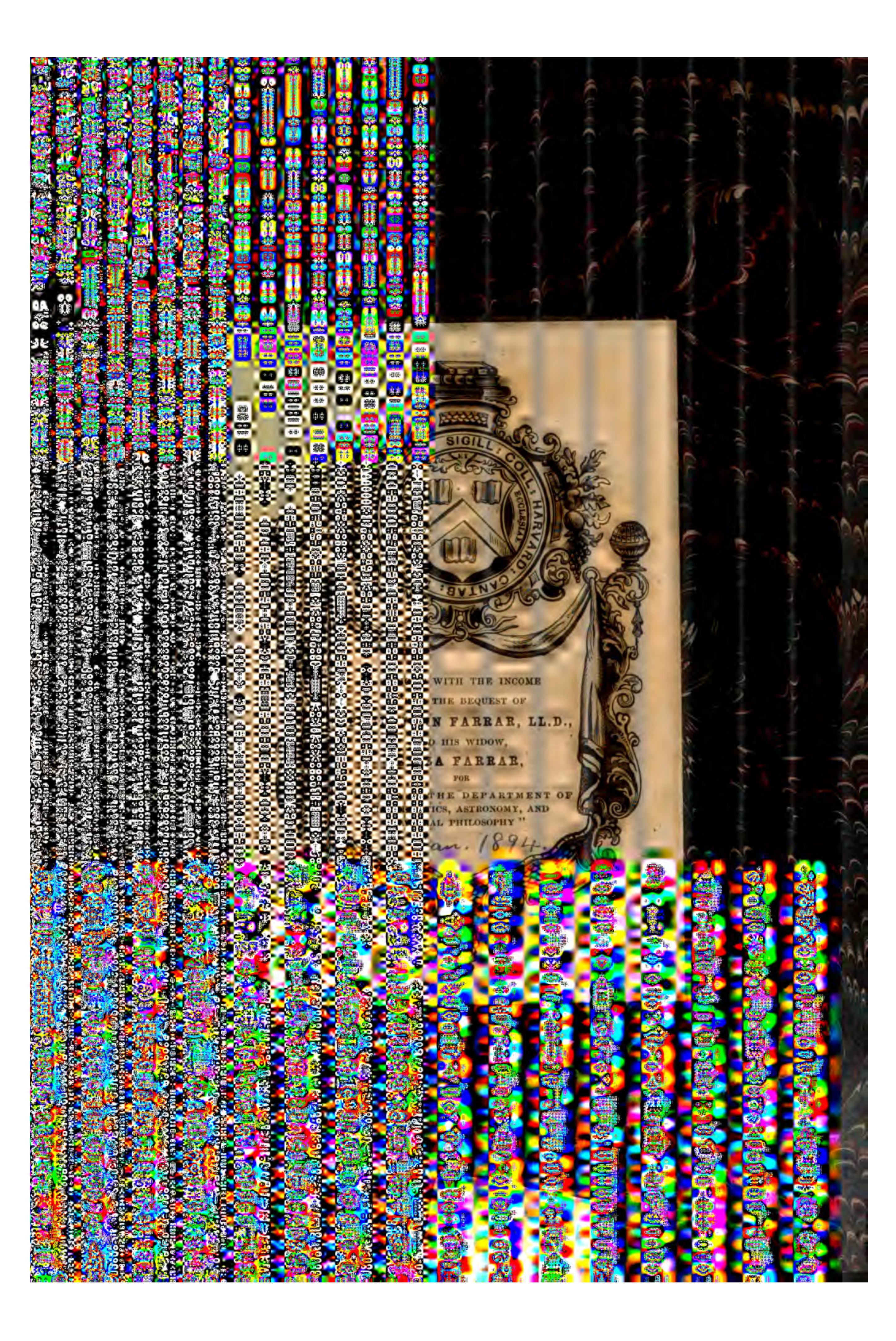
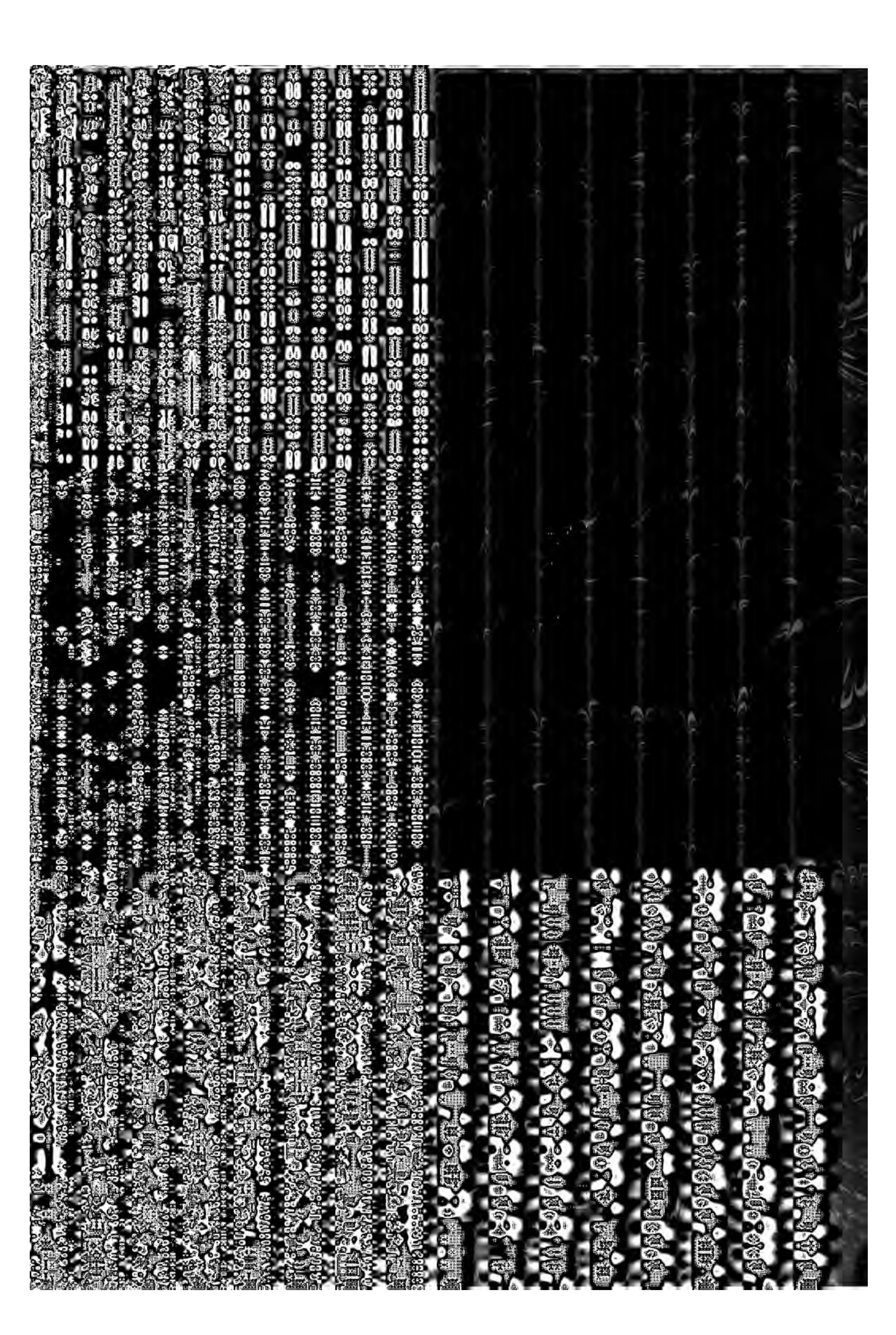



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB:
ECCLESIAE
WITH THE INCOME
THE BEQUEST OF
N FARRAR, LL.D.,
HIS WIDOW,
A FARRAR,
FOR
THE DEPARTMENT OF
ICS, ASTRONOMY, AND
AL PHILOSOPHY"
an. 1894.





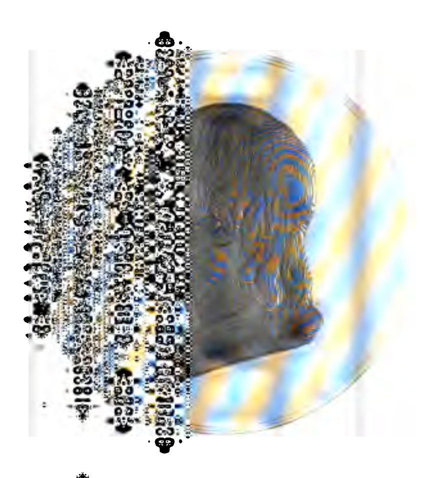
ABHANDLUNGEN

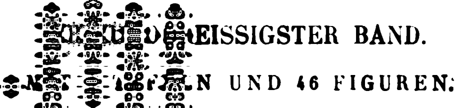
DREIUNDDREISSIGSTER BAND.

...DLUNGEN

...CH SÄCHSISCHEN

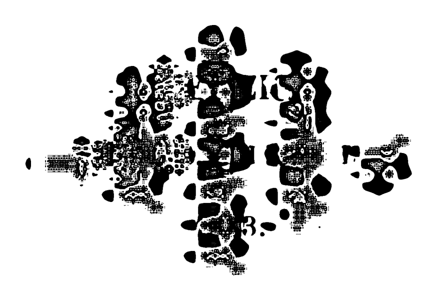
...ER WISSENSCHAFTEN.





...EISSIGSTER BAND.

...N UND 46 FIGUREN.

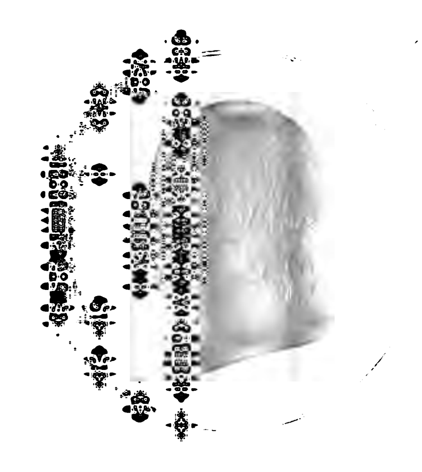


…DLUNGEN

…H-PHYSISCHEN CLASSE

…CH SÄCHSISCHEN

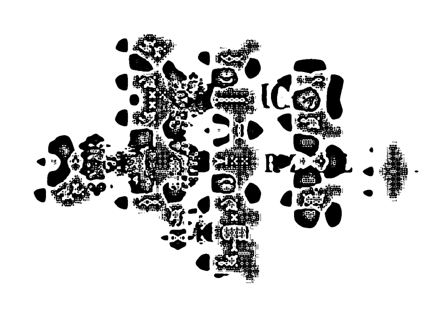
…R WISSENSCHAFTEN.





…IGSTER BAND.

… UND 46 FIGUREN.



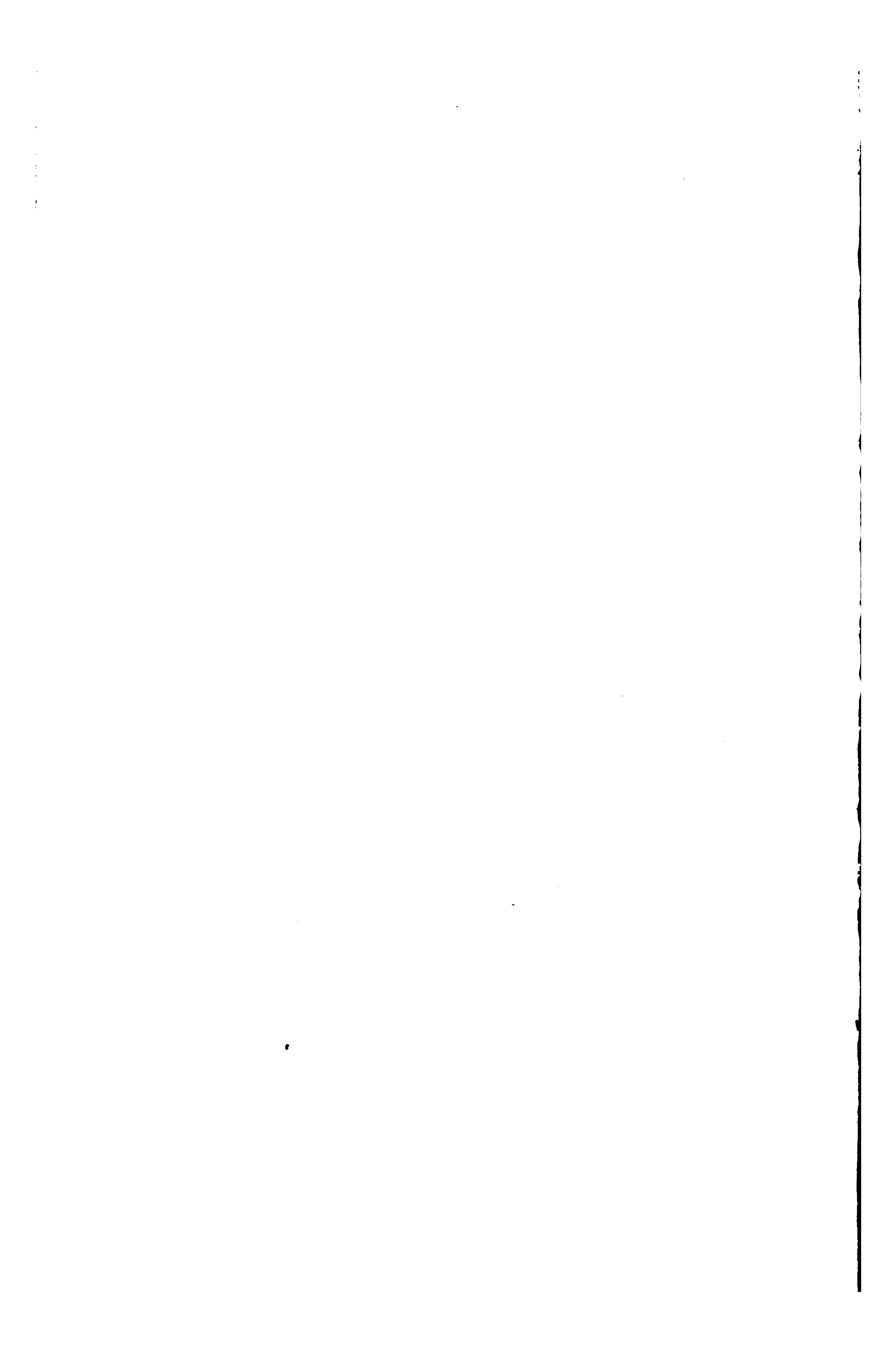
INHALT.

O. Fischer, Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers. Mit 2 Tafeln und 11 Figuren . . . . S. 5

E. Study, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Mit 16 Figuren . . . . - 81

W. Pfeffer, Druck- und Arbeitsleistung durch wachsende Pflanzen. Mit 14 Holzschnitten . . . . - 233

H. Credner, Zur Histologie der Faltenzähne paläozoischer Stegocephalen. Mit 4 Tafeln und 5 Textfiguren . . . . - 475



DIE

ARBEIT DER MUSKELN

UND DIE

LEBENDIGE KRAFT DES MENSCHLICHEN KÖRPERS

VON

OTTO FISCHER.

MIT ZWEI TAFELN UND ELF FIGUREN.

DEM ANDENKEN

MEINES

UNVERGESSLICHEN, THEUREN LEHRERS UND VÄTERLICHEN FREUNDES

DES

HERRN GEHEIMEN MEDICINALRATHES

PROFESSOR DR. WILHELM BRAUNE.

Einleitung.

Die Aufgabe, den Antheil zu bestimmen, welchen die einzelnen Muskeln an der Hervorbringung bestimmter, im Leben häufig vorkommender Bewegungen des gesammten menschlichen Körpers, wie z. B. beim Gehen, Laufen, Schwimmen, Turnen u. s. w. haben, ist in hohem Grade geeignet, das Interesse der Anatomen und Physiologen in Anspruch zu nehmen. Denn die gemeinsame Thätigkeit der Muskeln ist bei allen diesen Bewegungen, sobald der Mensch in ihnen eine gewisse Sicherheit erlangt hat, eine sehr geordnete und gleichmässige. Obgleich beispielsweise die Kinder zunächst nur die allerungeschicktesten Bewegungen machen, welche bei verschiedenen Kindern ganz verschieden ausfallen, so lernen sie doch alle schliesslich in gleicher Weise gehen. Die Folge und Art der Bewegungen beim Gang ist bei allen Menschen dieselbe und wird höchstens durch die etwas verschiedenen Dimensionen der Knochen, die verschiedene Gestaltung der Knochenenden und die verschiedene Massenvertheilung im Körper in geringem Grade modificirt. Es fällt daher jedem Muskel bei der Fortbewegung des Menschen eine ganz bestimmte Rolle zu.

Wenn es gelingen sollte, diese Rolle, welche jedem einzelnen Muskel bei den Bewegungen des Gehens, Laufens u. s. w. zugetheilt ist, aufzudecken, d. h. also die Kräfte zu bestimmen, mit welchen, und die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Muskeln dabei thätig sind, so wäre diese Kenntniss für die Anatomie und Physiologie, insbesondere für die Physiologie der Rückenmarksnerven von der allergrössten Bedeutung.

Leider sind wir von einer Lösung dieser Fragen noch weit entfernt.

Der Grund hierfür ist wohl theils in den nicht unbedeutenden Schwierigkeiten zu suchen, welche infolge der Natur der Aufgabe einer vollständigen Lösung entgegenstehen, theils in dem Umstande, dass das Problem Anforderungen an die verschiedensten Wissensgebiete stellt.

Der beschreibenden Anatomie liegt es vor allen Dingen ob, durch genaue Messungen am Cadaver die Dimensionen, sowie die Masse und Massenvertheilung der einzelnen Körperabschnitte festzustellen, die durch die Gelenkverbindungen gesetzten Bedingungen für die Bewegung und die durch die Ansatzstellen und die Dimensionen der Muskeln gegebenen Bedingungen für die Wirksamkeit der Muskelkräfte aufzusuchen.

Die allgemeine Physiologie hat Untersuchungen über die allgemeine Natur und Wirkungsweise der bewegenden Kräfte im Innern des Organismus anzustellen.

Endlich muss auch die Physik, insbesondere die Mechanik, ihren Beitrag zusteuern. Wenn ein Massensystem, wie es der menschliche Körper darstellt, in Bewegung begriffen ist, so besitzt es infolge der Geschwindigkeiten, mit welchen die einzelnen Theile des Systems fortschreiten, eine bestimmte lebendige Kraft. Dieselbe bleibt erhalten, so lange keine Kräfte auf das System einwirken. Aendert sie ihren Werth, so muss diese Aenderung des Bewegungszustandes der Thätigkeit von Kräften zugeschrieben werden, und zwar bestehen zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft einerseits und den Arbeiten der äusseren und inneren Kräfte andererseits ganz bestimmte Beziehungen. Es ist Sache der Mechanik, diese Beziehungen aufzusuchen und für dieselben den analytischen Ausdruck zu formuliren, welcher den Ausgangspunkt für die rechnerische Behandlung der im mechanischen Sinne sehr verwickelten Aufgabe der Untersuchung der Bewegungen des menschlichen Körpers bilden muss.

Wenn in diesem Sinne Anatomie, Physiologie und Physik sich verbinden, um dem Ziele gemeinsam zuzustreben, darf man hoffen, der Lösung des Problems näher zu kommen, wenn sich auch vorläufig noch nicht übersehen lässt, ob dasselbe überhaupt jemals endgültig zu lösen ist.

Sehr viel ist bisher in dieser Richtung auf physiologischem Gebiete gethan worden. Da man alle hierher gehörenden Arbeiten in

den grösseren Handbüchern der Physiologie angeführt findet, so kann auf Literaturangabe verzichtet werden.

Was die anatomischen Bausteine für das Problem anlangt, so sind dieselben zahlreich vorhanden, so weit sie sich auf Gelenke und Gelenkbewegungen beziehen. Am meisten haben in dieser Hinsicht wohl die beiden Anatomen Henke[1]) und H. v. Meyer[2]) beigetragen. Ausser diesen haben sich, so viel mir bekannt, noch mit Gelenkuntersuchungen beschäftigt die Brüder Weber[3]), ferner Borelli[4]), Bichat[5]), Cruveilhier[6]), E. H. Weber[7]), A. Fick[8]), Langer[9]), L. Fick[10]), Hyrtl[11]), Luschka[12]), Welcker[13]), Henle[14]), Aeby[15]), Lecomte[16]), Sappey[17]), E. Fick[18]), Buchner[19]),

---

1) W. Henke, Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke, Leipzig und Heidelberg 1863; ausserdem mehrere Einzelabhandlungen.

2) G. H. Meyer, Die Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes. Leipzig 1873.
Ders., Lehrbuch der Anatomie, Leipzig 1873.

3) W. Weber u. E. Weber, Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, Göttingen 1836.

4) Joh. Alphonsus Borellus, De motu animalium, Lugduni Batavorum 1679.

5) Bichat, Traité d'Anatomie descriptive, Paris 1801.

6) Cruveilhier, Cours d'Études anatomiques, Paris 1830, T. I.

7) E. H. Weber, Hildebrandt's Anatomie.

8) A. Fick, Die Gelenke mit sattelförmigen Flächen. Z. f. rat. Med. IX. Heidelberg 1854.
Ders., Specielle Bewegungslehre im Handbuch der Physiologie v. Hermann, Bd. I, Theil II.
Ders., Die medicinische Physik, Braunschweig, 3. Aufl., 1885.

9) Langer, Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. XII, XIV, XVIII, XXXII u. a.
Ders., Lehrbuch der Anatomie, II. Aufl., Wien 1882.

10) L. Fick, Ueber die Gestaltung der Gelenkflächen, Reichert u. Dubois Archiv 1859.

11) Hyrtl, Handbuch der topographischen Anatomie, Wien 1860.
Ders., Anatomie des Menschen, Wien 1875.

12) Luschka, Anatomie der Glieder, Tübingen 1865.

13) Welcker, Ueber Pronation und Supination des Vorderarmes. Archiv f. Anatomie. (Reichert u. Du Bois-Reymond) 1875, p. 1.

14) Henle, Handbuch der Bänderlehre des Menschen, Braunschweig 1872.

15) Aeby, Zeitschrift f. rat. Medicin, III. Reihe, Bd. XVII.

16) Lecomte, Le coude et la rotation de la main. Archives générales de médécine. Août 1874, Mai et Juin 1877.

17) Sappey, Anatomie descriptive, Paris 1876.

18) E. Fick, Zur Mechanik des Kniegelenks. Archiv f. Anat. u. Phys. Anat. Abt. 1877, p. 439.
Ders., Zur Frage der Hüftgelenksfixation, ebendaselbst 1878, p. 222.
Ders., Zur Mechanik des Hüftgelenks, ebendaselbst 1878, p. 519.

19) Buchner, Archiv f. Anatomie 1877, p. 22 und 1878, p. 229.

Einthoven[1]), Koster[2]), Morris[3]), Reeves[4]), Schulin[5]), Heiberg[6]), Strasser[7]), Strasser u. Gassmann[8]), Krause[9]), Quain[10]), Hueter[11]), Testut[12]), Bowdisch u. Luce[13]), R. Fick[14]), Boegle[15]), Braune u. Kyrklund[16]), Braune u. Flügel[17]), Braune u. Fischer[18]), u. a. m.

Messungen über die Dimensionen, die Masse und Massenvertheilung der Körperabschnitte liegen dagegen in weit geringerer An-

---

1) Einthoven, Archives Néerlandaises des sciences etc. Harlem, T. XVII, 3. liv. p. 392.
2) Koster, Weekblad van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde 1880 p. 213.
3) Morris, The Anatomy of the joints of man. London 1879.
4) Reeves, Human Morphology, London 1882.
5) R. Schulin, Ueber die Entwickelung und weitere Ausbildung der Gelenke des menschl. Körpers. Archiv f. Anatomie u. Physiologie 1879, p. 240.
6) Heiberg, Die Drehung der Hand, Leipzig 1884.
7) Strasser, Ueber den Flug der Vögel.
Ders., Zur principiellen Einigung in Sachen der Gelenkmechanik, deutsche Zeitschrift für Chirurgie 1881.
Ders., Zur functionellen Anpassung der quergestreiften Muskulatur, Stuttgart 1883.
8) Strasser u. Gassmann, Hülfsmittel und Normen zur Bestimmung und Veranschaulichung der Stellungen, Bewegungen und Kraftwirkungen am Kugelgelenk, Wiesbaden 1893.
9) Krause, Anatomie, Hannover 1879, Bd. II.
10) Quain, Elements of Anatomy, herausgegeben von Thomson, Schäfer, Thane. London 1882.
11) Hueter, Anatomische Studie an den Extremitätengelenken Neugeborener und Erwachsener. Virchow's Archiv, Bd. 28, p. 273.
12) Testut, Anatomie, Paris 1889.
13) Charles Luce, The movements of the lower jaw. Boston med. journal 1889.
14) R. Fick, Ueber die Form der Gelenkflächen. Archiv f. Anat. u. Physiol. Anat. Abt. 1890, p. 391.
15) Boegle, Ueber den Mechanismus des menschlichen Ganges und die Beziehungen zw. Form u. Bewegung.
Ders., Die Entstehung und Verhütung der Fussabnormitäten. München und Leipzig 1893.
16) Braune u. Kyrklund, Ein Beitrag zur Mechanik des Ellbogengelenks. Archiv f. Anat. 1879, p. 332.
17) Braune u. Flügel, Ueber Pronation und Supination des menschl. Vorderarms und der Hand. Archiv f. Anat. u. Physiol. Anat. Abt. 1882, p. 169.
18) Braune u. Fischer, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode. Abh. d. k. S. G. d. W. Bd. XIII.
Dies., Das Handgelenk, Abh. d. kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XIV.
Dies., Das Gesetz der Bewegungen in den Gelenken an der Basis der mittleren Finger und im Handgelenk des Menschen, ebendas. Bd. XIV.
Dies., Ueber den Antheil, den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben, ebendas. Bd. XIV.
Dies., Die Bewegungen des Kniegelenks nach einer neuen Methode am lebenden Menschen gemessen, ebendas., Bd. XVII.
O. Fischer, Das Ellbogengelenk, ebendas., Bd. XIV.

zahl vor. Der Erste, welcher sich überhaupt mit dieser Seite des Problems beschäftigte, war BORELLI[1]); derselbe hat zuerst die Lage des Schwerpunktes im menschlichen Körper experimentell bestimmt. Dann folgen die Untersuchungen von den Brüdern WEBER[2]), VON MEYER[3]), HARLESS[4]), BRAUNE und FISCHER[5]) u. A. Durch diese Arbeiten ist trotz ihrer geringen Anzahl der menschliche Körper, so weit man sich auf die Zerlegung desselben in die grösseren Abschnitte beschränkt, ein bekanntes Object der Bewegung geworden. Denn zur mechanischen Charakterisirung eines Körpers ist nur die Kenntniss seiner Masse, der Lage seines Schwerpunktes und der Trägheitsmomente für alle Axen durch den Schwerpunkt erforderlich.

Weit weniger ist bis jetzt von anatomischer Seite zur Lösung der viel umfangreicheren Aufgabe gethan worden, die Wirkungsweise der einzelnen Muskeln festzustellen, so weit sich dieselbe aus ihrer Lage zu den Knochen und Gelenken ergiebt. Hauptsächlich sind es statische Aufgaben, denen man sich zugewendet hat. In dieser Beziehung hat zuerst A. FICK[6]) durch eine präcise Formulirung der Fragestellung und durch seine Behandlung des Gegenstandes das Fundament zu einer allgemeinen Muskelstatik gelegt. Einen Beitrag dazu liefert auch die Abhandlung von FUCHS[7]) über die Gleichungen der Muskelstatik. Von A. FICK[8]) rühren ferner die ersten genauen Messungen über Muskelansätze und die daraus sich ergebenden Werte der Drehungsmomente her. Ausserdem beschäftigen sich mit der Bestimmung von Drehungsmomenten die Arbeiten von STRASSER[9]), sowie

---

1) a. a. O. 2) a. a. O.

3) H. v. MEYER, Die wechselnde Lage des Schwerpunktes im menschlichen Körper, Leipzig, 1863. — Ders., a. a. O.

4) HARLESS, Die statischen Momente der menschlichen Gliedmaassen. Abh. d. kgl. Bayr. Ak. d. W. 1857 u. 1860.

5) BRAUNE u. FISCHER, Ueber den Schwerpunkt des menschlichen Körpers u. s. w. Abh. d. kgl. S. G. d. W. Bd. XV.

Dies., Bestimmung der Trägheitsmomente des menschl. Körpers und seiner Glieder, ebendas. Bd. XVIII.

6) A. FICK, Specielle Bewegungslehre a. a. O. und medicinische Physik.

7) FR. FUCHS, Ueber die Gleichungen der Muskelstatik mit Zugrundelegung der Forderung des kleinsten Stoffumsatzes. PFLÜGER's Archiv f. Physiol. Bd. XIX, p. 67.

8) A. FICK, Statische Betrachtung der Muskulatur des Oberschenkels. Zeitschr. f. rat. Med. IX.

9) a. a. O.

von STRASSER und GASSMANN[1]), die Abhandlung von E. FICK und E. WEBER[2]) über die Schultermuskeln, die Arbeit von E. FICK[3]) über zweigelenkige Muskeln und die Abhandlung von W. BRAUNE und O. FISCHER[4]) über die Drehungsmomente der Beugemuskeln des Ellbogengelenks. Während A. FICK die Drehungsmomente aus den Coordinaten der Insertionsstellen der Muskeln ableitete, sind in den zuletzt genannten Arbeiten die Drehungsmomente durch Bestimmung der zu einer kleinen Gelenkverrückung gehörenden Elementararbeit des Muskels gewonnen worden. Endlich sind von R. FICK[5]) zahlreiche Messungen angestellt worden über die gesammte Arbeit, welche die auf die Fussgelenke wirkenden Muskeln während der Ueberführung der einzelnen Fussgelenke aus einer extremen Stellung in die andere leisten.

Mit diesen Arbeiten ist, so weit mir bekannt, leider die Reihe der Untersuchungen am Cadaver erschöpft, welche directe Messungen der auf die grösseren Muskelpartien bezüglichen Daten zum Gegenstand haben. Abgesehen von directen Messungen finden sich in allen Handbüchern und Lehrbüchern der Anatomie theoretische Betrachtungen über die Wirkung der Muskeln vor, insbesondere in den bekannten mechanisch-anatomischen Büchern von HENKE, H. v. MEYER, und KOLLMANN[6]) und in der Mechanik der Gehwerkzeuge der Brüder WEBER. Von grosser Bedeutung für die Frage nach der Muskelwirkung sind ferner die zahlreichen Versuche, welche DUCHENNE am Lebenden anstellte, um mittels isolirter Reizung die Functionen der einzelnen Muskeln aufzudecken, Die Resultate derselben sind in dem klassischen Werke »Physiologie des Mouvements«[7]) niedergelegt.

Die Frage nach der thatsächlichen Betheiligung sämmtlicher Muskeln an der Hervorbringung einer bestimmten, im Leben häufig vorkommenden Bewegung des ganzen Körpers ist dagegen, abgesehen von den Arbeiten über die Augenmuskeln und Kehlkopfmuskeln, bis jetzt

1) a. a. O.
2) E. FICK u. E. WEBER, Anatomisch-mechanische Studie über die Schultermuskeln. Würzb. Verh. N. F. Bd. XI, p. 349.
3) E. FICK, Ueber zweigelenkige Muskeln, Archiv f. Anatomie 1879, p. 201.
4) W. BRAUNE u. O. FISCHER, Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. 1889. Abh. d. kgl. S. Ges. d. Wiss. Bd. XV.
5) R. FICK, Ueber die Arbeitsleistung der auf die Fussgelenke wirkenden Muskeln. Habilitationsschrift. Würzburg 1892.
6) KOLLMANN, Mechanik des menschlichen Körpers. Naturkräfte Bd. 13. München, 1874.
7) Paris 1867.

noch nicht einer eingehenden Untersuchung unterworfen worden. Eine derartige Untersuchung kann auch gar nicht in Angriff genommen werden, bevor nicht von den einzelnen Wissenschaften die dazu nöthigen Vorarbeiten beendigt sind.

Was nun endlich die rein mathematisch-physikalischen Beiträge anlangt, so liegt bisher nur ein einziger vor, nämlich der Theil der Weber'schen Mechanik der Gehwerkzeuge, welcher von der Theorie des Gehens und Laufens handelt. Wenn sich auch dabei Voraussetzungen und Einschränkungen nothwendig gemacht haben, welche sich von der Wirklichkeit mehr oder weniger entfernen — wie die Ausschliessung der Beweglichkeit in den Knie- und Fussgelenken, Verlegung der Massen vom Rumpf einerseits und der unteren Extremität andererseits nach je einem einzigen Punkte, dem Massenmittelpunkte, und infolge dessen Vernachlässigung der (damals noch nicht bekannten) Trägheitsmomente dieser Abschnitte u. s. w. —, so ist doch durch die Weber'sche Theorie des Gehens eine streng mechanische Behandlung derartiger Fragen angebahnt worden. Im Uebrigen ist aber auf diesem Gebiete so gut wie nichts gethan worden, und es bleibt der Untersuchung noch ein weites Feld.

Einen weiteren, rein mechanischen Beitrag zu dem Problem der Muskelwirkung am bewegten Körper zu liefern, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Die Aufgaben der Mechanik lassen sich, soweit sie sich auf Kräfte und die durch dieselben hervorgebrachten Bewegungen beziehen, in zwei Gruppen theilen.

Die eine Gruppe nimmt die Kräfte als gegeben an und fragt nach den Bewegungen, welche durch dieselben an bestimmten, ihrer mechanischen Natur nach bekannten Körpern oder Körpersystemen hervorgebracht werden.

Die andere Gruppe setzt umgekehrt den Bewegungszustand des Körpers für den ganzen Verlauf der Bewegung als bekannt voraus und fragt nach den Kräften, welche thätig sein müssen, um diese Bewegung zu erzeugen.

Zu der zweiten Gruppe von mechanischen Aufgaben gehört das Problem der Bewegungen des menschlichen Körpers, so weit dieselben der Thätigkeit von Muskeln zuzuschreiben sind. Denn hier

sind es die wirksamen Muskelspannungen, auf deren Bestimmung die Untersuchung hinausläuft. Daraus erwächst aber die Nothwendigkeit, sich eine genaue Kenntnis des Bewegungszustandes des menschlichen Körpers für den ganzen Verlauf der Bewegung auf empirischem Wege zu verschaffen. Erst wenn man weiss, in welcher Lage sich die einzelnen Glieder zu einander in jedem bestimmten Zeitmomente befinden, wenn man die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen festgestellt hat, mit welchen sie ihre gegenseitige Stellung und ihre Lage im Raume zu verändern streben, und wenn man die Bedingungen in Rücksicht zieht, welche den Bewegungen der Glieder durch die Massenvertheilung und die Gelenkverbindungen gesetzt sind, darf man hoffen, einen Einblick in die Thätigkeit der inneren Kräfte des Körpers zu gewinnen.

Diese nothwendige Kenntniss des Bewegungszustandes des menschlichen Körpers lässt sich aber bei geeigneter Anordnung des Versuchs und bei Anwendung sehr genauer Messinstrumente auf empirischem Wege erlangen; sie ist von uns in der That für den Gang des Menschen unter Zuhülfenahme der Photographie gewonnen worden.

Im Sommer des Jahres 1891 war es mir noch vergönnt, mit meinem, leider so früh aus einem arbeitsreichen Leben durch den Tod abberufenen, unvergesslichen, theuren Lehrer, Herrn Geheimen Medicinalrath Professor Dr. WILHELM BRAUNE, derartige photographische Fixirungen der einzelnen Bewegungsphasen beim Gange des unbelasteten und belasteten Menschen vorzunehmen. Wir haben zu dem Zwecke an einem Menschen in allen einzelnen Gliederabschnitten Geissler'sche Röhren (Capillarröhren) von der Länge der einzelnen Abschnitte in der Weise angebracht, dass dadurch die freie Beweglichkeit nicht im Geringsten gestört war, andererseits aber jede Röhre während der Bewegung fest mit dem betreffenden Körperabschnitte verbunden blieb. Da wir für die Bewegungen des Gehens die Hand zum Unterarm und den Kopf zum Rumpf festgestellt annahmen, so hatten wir 11 solcher Röhren nöthig. Alle 11 wurden in ein und denselben Strom eines Ruhmkorff'schen Funkeninductors eingeschaltet, welcher durch eine Stimmgabelunterbrechung in gleichgrossen Intervallen erzeugt wurde. Der Versuch wurde mitten in der Nacht angestellt, damit die sehr empfindlichen photographischen Platten (Momentplatten) nur von dem Lichte der Geissler'schen Röhren ge-

troffen und die vier zu gleicher Zeit verwendeten photographischen Apparate vor dem Versuche ohne Gefahr geöffnet werden konnten. Nachdem das Versuchs-Individuum schon mehrere Schritte gegangen war, wurde während einer kurzen Zeit der Inductor in Thätigkeit gesetzt und auf diese Weise die Bewegung von vier verschiedenen Richtungen aus in einer grossen Anzahl, in gleichen Zeitintervallen aufeinander folgender Phasen photographisch fixirt. Auf dieselben Platten wurde hinterher ein Coordinatennetz photographirt und dadurch die Möglichkeit gegeben, die Bewegung auf ein räumliches Coordinatensystem zu beziehen.

Photographische Fixirungen der einzelnen Phasen des menschlichen Ganges sind zwar schon von dem amerikanischen Photographen Muybridge und dem deutschen Photographen Anschütz, vor allen Dingen aber zum Zwecke wissenschaftlicher Untersuchung von dem Pariser Physiologen Marey (niedergelegt in den Comptes rendus des letzten Jahrzehntes) ausgeführt worden. Aus den Arbeiten von Anschütz und Marey ist es aber nicht möglich, die räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte zu gewinnen, da Beide immer nur eine Projection auf einmal aufgenommen haben. Der Amerikaner Muybridge hat nun zwar gleichzeitige Aufnahmen von verschiedenen Seiten gewonnen; bei seiner Anordnung des Versuchs wird aber ein Schritt in zu wenig Phasen zerlegt, als dass die Bilder eine Verwendung für wissenschaftliche Zwecke gestatteten. Ausserdem eignen sich die Serienbilder von Muybridge und Anschütz schon deshalb nicht zu genauen Messungen, weil sie sich nicht, wie es bei den vorzüglichen Aufnahmen von Marey der Fall ist, auf ein und derselben Platte befinden. Diese Gründe nöthigten uns, für den angedeuteten Zweck mittelst einer anderen Methode selbst photographische Aufnahmen des Ganges zu machen.

Die Resultate dieser Untersuchung sollen später an einer anderen Stelle veröffentlich werden. So weit sich bis jetzt herausgestellt hat, sind die Messungen so genau ausgefallen, dass nicht nur die ersten Differenzen, welche bei diesen kleinen, gleichgrossen Zeitintervallen mit grosser Annäherung den Geschwindigkeiten proportional sind, sondern auch die den Beschleunigungen entsprechenden zweiten Differenzen der Coordinaten der einzelnen Gelenkmittelpunkte continuirliche, nicht von vielen Zacken durchsetzte Curven ergeben.

Ein Beweis für deren Verwendbarkeit! Man hat also damit die empirischen Unterlagen gewonnen, um in jedem beliebigen Moment den Bewegungszustand, d. h. die lebendige Kraft und die Veränderungen derselben beim menschlichen Gange angeben zu können.

Wenn ich es mir auch versagen muss, hier näher auf diese speciellen Untersuchungen einzugehen, so glaubte ich doch, in Kurzem derselben Erwähnung thun zu müssen, weil sie die Veranlassung zu der vorliegenden Arbeit geboten haben, und weil sich aus denselben die Nothwendigkeit der folgenden Betrachtungen ergibt, wenn man aus den Resultaten der photographischen Fixirung nicht blos rein geometrische Schlüsse, sondern auch solche ableiten will, welche sich auf die während der Bewegung im Inneren des Körpers thätigen Kräfte beziehen. Denn für diesen Zweck ist es vor allen Dingen erforderlich, die Beziehungen aufzustellen, welche zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft des Körpers oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwischen den Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Massen der einzelnen Körpertheile einerseits und den Elementararbeiten der äusseren und inneren Kräfte, d. h. den Arbeiten bei unendlich kleiner Verrückung des Körpersystems andererseits bestehen.

In diesen Beziehungen hat man dann ein Mittel, die Grösse des resultirenden Drehungsmomentes der in jedem Augenblicke wirksamen inneren Kräfte zu berechnen, da man alle anderen Grössen, nämlich die lebendige Kraft und deren Aenderungen für den ganzen Verlauf der Bewegung und auch die Elementararbeiten der äusseren Kräfte auf empirischem Wege gewinnen kann. Kennt man aber das resultirende Drehungsmoment für die Gesammtheit der in Frage kommenden Muskeln, welche die inneren Kräfte repräsentiren, so ist es möglich, den Antheil zu bestimmen, welchen die einzelnen Muskeln an der Hervorbringung dieses Drehungsmomentes haben, wenn man das beim wirklichen Gebrauche der Muskeln im Leben höchst wahrscheinlich geltende Princip der kleinsten Anstrengung zu Hülfe nimmt. Es ist somit das Problem an eine Frage der Muskelstatik angeschlossen, welche schon von mehreren Seiten, namentlich von A. Fick[1]) und Fr. Fuchs[2]) in Angriff genommen worden ist.

1) Medicinische Physik, 3. Auflage, p. 79. 2) a. a. O.

Der Bewegungzustand eines Körpers findet seinen Ausdruck in der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie desselben.

Handelt es sich nur um eine einzige starre Masse, so stellt sich die lebendige Kraft als Summe nur zweier Bestandtheile dar. Der erste Bestandtheil ist die lebendige Kraft des Schwerpunktes (Massenmittelpunktes), wenn in ihm die Gesammtmasse vereinigt gedacht wird. Der zweite Bestandtheil stellt die lebendige Kraft dar, welche der Körper infolge seiner Bewegung relativ zum Schwerpunkte besitzt. Bewegt sich der Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit v und bezeichnet m die Masse des Körpers, so ist der erste Bestandtheil $\frac{1}{2} m v^2$. Die dann noch zu berücksichtigende Bewegung relativ zum Schwerpunkt kann in jedem Moment nur in einer Rotation um eine Axe durch den Schwerpunkt bestehen. Beträgt die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation w und der Trägheitsradius des Körpers für die Rotationsaxe durch den Schwerpunkt $\varkappa$, so besitzt der zweite Bestandtheil die Grösse $\frac{1}{2} m \varkappa^2 w^2$. Die gesammte lebendige Kraft T hat also den Werth:

$$T = \frac{1}{2} m \, (v^2 + \varkappa^2 w^2).$$

Besteht die Bewegung des Körpers nur in einer Translation, so ist $w = 0$ und die lebendige Kraft wird allein durch $\frac{1}{2} m v^2$ dargestellt. Andererseits verschwindet dieser erste Bestandtheil, wenn die Bewegung des Körpers ausschliesslich in einer Rotation um eine Axe durch den Schwerpunkt besteht, und der Ausdruck für die ganze lebendige Kraft ist dann $\frac{1}{2} m \varkappa^2 w^2$. Die Grösse des Trägheitsradius $\varkappa$ ändert sich im Allgemeinen mit der Richtung der Rotationsaxe.

So einfach stellen sich die Verhältnisse nur bei einer einzigen starren Masse.

Hat man es dagegen mit einem System von starren Massen zu thun, welche ihre gegenseitige Lage zu einander verändern können, wie es beim menschlichen Körper der Fall ist, so setzt sich die lebendige Kraft aus einer grossen Anzahl von Bestandtheilen zusammen. Der Ausdruck für die lebendige Kraft wird dann sehr verwickelt, wie aus den späteren Darlegungen hervorgeht. Dies ist nicht allein eine Folge der grösseren Anzahl von bewegten Massen, sondern rührt hauptsächlich auch davon her, dass der Ausdruck für die lebendige Kraft den Bedingungen Rechnung zu tragen hat, welche den Bewegungen der einzelnen Körpertheile durch die Gelenkver-

bindungen einerseits und durch von aussen her kommende Einflüsse, wie sie z. B. das Festhalten eines Fusses am Erdboden mit sich bringt, andererseits gesetzt sind.

Man kann jedoch auch hierbei die lebendige Kraft, welche der Gesammtschwerpunkt infolge seiner Geschwindigkeit besitzen würde, wenn man die Summe aller Massen des Systems in ihm concentrirt annimmt, absondern von der Summe der lebendigen Kräfte, welche den Bewegungen der einzelnen Theile des Systems relativ zum Gesammtschwerpunkt entsprechen.

Erst nachdem man den Ausdruck für die lebendige Kraft eines im mechanischen Sinne so verwickelten Massensystems gefunden hat, kann man daran gehen, die Beziehungen zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft und den Elementararbeiten der äusseren und inneren Kräfte aufzustellen.

Da die Mechanik bisher noch wenig Veranlassung genommen hat, sich mit derartig verwickelten Systemen, wie sie die Körper des Menschen oder der höheren Thiere darstellen, zu beschäftigen, so ist es zunächst erforderlich, eine Methode aufzusuchen, mittelst deren man in diesem Falle auf möglichst einfache Weise zu dem Ausdrucke für die lebendige Kraft und zu den Beziehungen zwischen den Aenderungen derselben und den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte gelangt.

Diese Methode soll an einem besonders einfachen Körpersystem entwickelt werden. Darauf soll dann erst der menschliche Körper selbst den Gegenstand der Untersuchung bilden.

Wenn man den allgemeinsten Fall der Bewegung des menschlichen Körpers in Betracht zieht, welcher alle im Leben möglichen Bewegungen als specielle Fälle umfasst, so stellen sich naturgemäss ausserordentlich verwickelte und unübersichtliche Formeln heraus. Aus diesem Grunde soll hier nur eine besondere Bewegungsart des Körpers berücksichtigt werden, welche sich nahezu beim Gehen und Laufen verwirklicht findet. Die Ableitung der Resultate des allgemeinsten Bewegungsfalles, welche auch zur Zeit schon fertig vorliegen, wird den Gegenstand einer besonderen Veröffentlichung bilden.

I. Die Methode der Ableitung der lebendigen Kraft.

Zur Darlegung der Methode für die Gewinnung der lebendigen Kraft eines Systems von Körpern, welche miteinander durch Gelenke verbunden sind, soll folgendes einfache System in Betracht gezogen werden.

Von drei Körpern mit den Massen m_1, m_2, m_3 und den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 sollen sowohl der erste und zweite als auch der zweite und dritte durch je ein Charniergelenk miteinander verbunden sein. Die Axen beider Gelenke seien parallel gerichtet, und die durch dieselben bestimmte Ebene enthalte den Schwerpunkt S_2 des zweiten Körpers. Ausserdem soll die Ebene der drei Schwerpunkte für irgend eine Stellung der drei Körper auf den beiden Gelenkaxen senkrecht stehen; dann wird dies für alle anderen Stellungen der Körper zu einander auch der Fall sein. Bestimmt man noch, dass die Ebene der drei Schwerpunkte im Raume fest bleibt, so kann das Körpersystem nur ebene Bewegungen ausführen, d. h. die Bahnen aller Punkte sind ebene Curven, welche der festen Ebene parallel laufen. Man hat daher nur die Projection der Bewegung auf die feste Ebene der drei Schwerpunkte zu untersuchen.

Die Durchschnittspunkte der beiden Gelenkaxen mit dieser Ebene sollen bezüglich mit $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ und die Verbindungslinien $\overline{S_1 G_{1,2}}$, $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$ und $\overline{G_{2,3} S_3}$, bezüglich deren Verlängerungen, als Längsaxen der drei Körper bezeichnet sein. (Fig. 1 auf folg. Seite.) Nach den getroffenen Voraussetzungen wird der Schwerpunkt S_2 in der Längsaxe $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$ liegen. Auf jeder der drei Längsaxen hat man eine positive und eine negative Richtung zu unterscheiden. Die positive Richtung soll diejenige sein, in welcher die Längsaxen durchlaufen werden, wenn man von S_1 aus den gebrochenen Linienzug $S_1 G_{1,2} G_{2,3} S_3$ beschreibt.

Die Lage des Systems ist vollständig bestimmt, wenn man die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 kennt, welche bezüglich die positiven Richtungen der drei Längsaxen mit einer festen Verticalen bilden, und wenn ausserdem die beiden rechtwinkligen Coordinaten x, z eines in der festen Ebene (welche vertical gestellt sein möge) gelegenen Punktes gegeben sind, der entweder fest mit einem der drei Körper verbunden, oder dessen

Lage zu den drei Körpern für jede Stellung derselben eindeutig bestimmt ist. Letzteres trifft z. B. für den Gesammtschwerpunkt S_0 des Systems zu.

Von den beiden, für diese ebene Bewegung in Betracht kommenden Coordinatenaxen falle die eine, welche die Z-Axe genannt sein möge, mit der Verticalen zusammen; die Richtung nach oben sei die positive. Die andere Coordinatenaxe, X-Axe, verläuft dann horizontal, und zwar in Fig. 1 nach rechts positiv. Für die Verticale, von welcher aus die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 gemessen werden, ist es in Anbetracht der späteren Anwendung auf den menschlichen Körper und der in der Anatomie gebräuchlichen Bezeichnungsweise zweckmässiger, dieselbe nach unten positiv zu rechnen; sie wird dann parallel der negativen Z-Axe verlaufen oder mit derselben zusammenfallen.

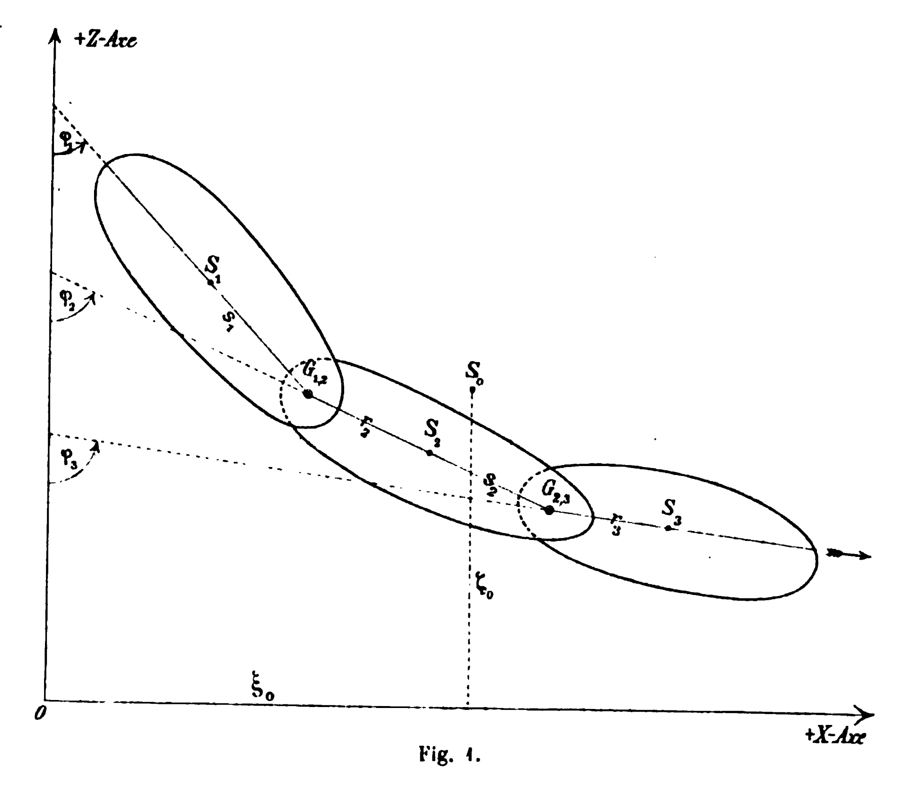


Fig. 1.

Der Gelenkpunkt $G_{1,2}$ habe von S_1 die Entfernung s_1, der Schwerpunkt S_2 von $G_{1,2}$ die Entfernung r_2, der Gelenkpunkt $G_{2,3}$ von S_2 die Entfernung s_2 und der Schwerpunkt S_3 von $G_{2,3}$ die Entfernung r_3. Bedeutet l_2 den Abstand der beiden Gelenkaxen, so muss nach der getroffenen Voraussetzung über die Lage des Schwerpunktes S_2 die Relation bestehen $r_2 + s_2 = l_2$.

A. Das frei bewegliche System.

Es soll nun zunächst angenommen werden, dass keinerlei Bedingungen für die Beweglichkeit des Systems bestehen.

Ist das Körpersystem in beliebiger Bewegung begriffen, so ist in jedem Moment die gesammte lebendige Kraft desselben gleich der lebendigen Kraft einer Masse, welche gleich der Summe m_0 der drei Massen des Systems ist und sich mit der Geschwindigkeit v_0 des Gesammtschwerpunktes S_0 bewegt, vermehrt um die Summe der lebendigen Kräfte, welche den auf den Gesammtschwerpunkt bezogenen relativen Bewegungen der einzelnen Körper des Systems entsprechen.

Die Bewegung, welche jeder der drei Körper relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 besitzt, kann man zerlegt denken in eine Translation von der Geschwindigkeit v_k des Einzelschwerpunktes S_k relativ zu S_0 und eine Rotation um eine zu den Gelenkaxen parallele Axe durch S_k von der Winkelgeschwindigkeit φ'_k. Die lebendige Kraft jedes einzelnen Körpers relativ zum Gesammtschwerpunkt stellt sich infolgedessen ebenfalls als Summe zweier Bestandtheile dar. Der eine Bestandtheil ist die lebendige Kraft, welche die Masse m_k des Körpers besitzt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit v_k bewegt, die der Einzelschwerpunkt S_k relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 besitzt, der andere Bestandtheil ist die lebendige Kraft, welche aus der Winkelgeschwindigkeit φ'_k des Körpers um die Axe durch S_k resultirt.

Es soll nun zunächst die lebendige Kraft bestimmt werden, welche das ganze System relativ zum Gesammtschwerpunkt besitzt, wenn es sich aus einer beliebigen Lage in eine unendlich benachbarte bewegt.

Nimmt man vorläufig an, dass der Gesammtschwerpunkt fest bleibt, so ist eine beliebige unendlich kleine Verrückung des Systems dadurch charakterisirt, dass die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 bezüglich die unendlich kleinen Aenderungen $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ erfahren. Diese Verrückung kann man sich in drei Schritte zerlegt denken. Bei dem einen soll nur der Winkel φ_1 der Aenderung $d\varphi_1$ unterworfen werden, während die beiden anderen Winkel φ_2 und φ_3 constant bleiben, beim zweiten und dritten Schritte soll die Verrückung nur in einer Aenderung von φ_2 bezüglich φ_3 um die Grösse $d\varphi_2$ bezüglich $d\varphi_3$

bestehen, während jedesmal die beiden anderen Winkel ihren Werth beibehalten. Es kommt also jeder der drei Schritte darauf hinaus, einem der drei Körper eine unendlich kleine Rotation zu ertheilen, während die beiden anderen, welche infolge des Zusammenhangs der Körper dabei nicht in Ruhe bleiben können, gleichzeitig nur Translationen ausführen dürfen. Die Translation jedes der anderen beiden Körper ist gegeben durch die Translation desjenigen Gelenkpunktes, welcher die unmittelbare oder mittelbare Verbindung des betreffenden Körpers mit dem in Rotation begriffenen darstellt.

Es entsteht nun die Frage: um welche Axe muss die unendlich kleine Rotation des einen Körpers stattfinden, damit bei der dadurch bedingten Verrückung des ganzen Systems der Gesammtschwerpunkt S_0 seinen Ort beibehält?

Um diese Frage zu entscheiden, soll zunächst dem ersten Körper eine unendlich kleine Rotation von der Grösse $d\varphi_1$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt S_1 ertheilt werden, während φ_2 und φ_3 constant bleiben, so dass die beiden anderen Körper nur Translationen ausführen dürfen. Diese Translationen sind für beide gleich, und zwar sind sie identisch mit der Translation des Gelenkpunktes $G_{1,2}$. Da der letztere von S_1 die Entfernung s_1 besitzt, so ist die Grösse dieser Translation $s_1 d\varphi_1$. Dieselbe Translation erfährt auch der Gesammtschwerpunkt $S_{2,3}$ vom zweiten und dritten Körper. Beachtet man nun, dass für jede Stellung des Körpersystems der Gesammtschwerpunkt S_0 des ganzen Systems auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1 und $S_{2,3}$ liegt und dieselbe im umgekehrten Verhältniss der Massen bezüglich Massensumme m_1 und $(m_2 + m_3)$ theilt, so ergibt sich, dass der Gesammtschwerpunkt S_0 dabei eine Verrückung von der Grösse $\frac{m_1 + m_2}{m_0} s_1 d\varphi_1$ erleidet, wobei nach der eingeführten Bezeichnung $m_0 = m_1 + m_2 + m_3$ ist.

Um dieses Resultat zu beweisen, seien in nebenstehender Figur 2, S_1, S_0, $S_{2,3}$ die Orte der drei Schwerpunkte vor der Verrückung und S_1, S_0', $S_{2,3}'$ dieselben nach der Verrückung, bei welcher S_1 fest geblieben ist.

Dann muss stattfinden:

$$\overline{S_1 S_0} : \overline{S_0 S_{2,3}} = \overline{S_1 S_0'} : \overline{S_0' S_{2,3}'} = (m_2 + m_3) : m_1$$

und infolgedessen

$$\overline{S_1 S_0} : \overline{S_1 S_{2,3}} = \overline{S_1 S_0'} : \overline{S_1 S_{2,3}'} = \overline{S_0 S_0'} : \overline{S_{2,3} S_{2,3}'} = (m_2 + m_3) : (m_1 + m_2 + m_3).$$

Es ist daher, wenn $m_1 + m_2 + m_3 = m_0$ gesetzt wird:

$$\overline{S_0 S_0'} = \frac{m_2 + m_3}{m_0} \cdot \overline{S_{2,3} S_{2,3}'} = \frac{m_2 + m_3}{m_0} s_1 d\varphi_1 .$$

Da die Verrückung von $S_{2,3}$ senkrecht zur Längsaxe $\overline{S_1 G_{1,2}}$ des ersten Körpers gerichtet war, so ist dies auch die Verrückung von S_0. Die gleiche Verrückung wie S_0, sowohl der Grösse als auch der Richtung nach, wird daher ein Punkt H_1 auf der

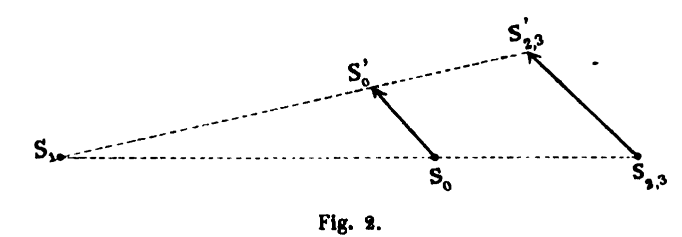


Fig. 2.

Längsaxe $\overline{S_1 G_{1,2}}$ erfahren, welcher von S_1 nach der Seite des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ hin die Entfernung $\frac{m_2 + m_3}{m_0} s_1$ besitzt.

Soll nun der Gesammtschwerpunkt S_0 des Körpersystems fest bleiben, so muss das System noch einer Translation unterworfen werden, welche entgegengesetzt gleich der Verrückung von S_0 ist, also die Grösse $-\frac{m_2 + m_3}{m_0} s_1 d\varphi_1$ besitzt. Dadurch wird nicht nur S_0 in seine alte Lage zurückgeführt, welche er vor der Verrückung inne hatte, sondern auch der Punkt H_1 auf der Längsaxe des ersten Körpers. Da durch die zuletzt hinzugefügte Translation die Winkel φ_2, φ_3 immer noch constant geblieben sind und auch die Grösse der Zunahme $d\varphi_1$ des ersten Winkels nicht geändert worden ist, so wäre man auf die schliessliche Lage des Systems auch gekommen, wenn man von vornherein dem ersten Körper nicht eine Rotation um die Axe durch den Schwerpunkt S_1, sondern um die ihr parallele Axe durch den Punkt H_1 ertheilt und gleichzeitig den beiden anderen Körpern nur Translationen gestattet hätte.

Die Lage des Punktes H_1 ist vollständig unabhängig von der anfänglichen Stellung der Körper zu einander; sie wird allein bestimmt durch die Grösse der drei Massen des Systems und die Lage

des Schwerpunktes S_1 innerhalb des ersten Körpers. Daraus folgt, dass der Punkt H_1 eine feste Lage im ersten Körper besitzt, und es gilt der

Satz: Der Punkt H_1 ist der Schwerpunkt eines Massensystems, welches man erhält, wenn man in dem Gelenkpunkt $G_{1,2}$ die Massen m_2 und m_3 der beiden an $G_{1,2}$ hängenden Körper und im Schwerpunkt S_1 die Masse m_1 des ersten Körpers vereinigt annimmt.

Dieses Massensystem soll den Namen »erstes reducirtes System« führen.

Der Beweis ergiebt sich daraus, dass der Schwerpunkt dieses fingirten Massensystems die Verbindungsstrecke der beiden Punkte S_1 und $G_{1,2}$ von der Grösse s_1 im umgekehrten Verhältniss der Massen m_1 und $(m_2 + m_3)$ theilt. Derselbe liegt also auf $\overline{S_1 G_{1,2}}$ und besitzt von S_1 die Entfernung $\frac{m_2 + m_3}{m_0} s_1$, d. h. er fällt mit H_1 zusammen.

Für diesen Punkt H_1, welcher bisher noch nicht in die Mechanik eingeführt worden ist, der aber in mehrfacher Hinsicht wichtige mechanische Bedeutung besitzt, soll die Bezeichnung »Hauptpunkt des ersten Körpers« und für die Strecke zwischen dem Hauptpunkte H_1 und dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ die Bezeichnung »Hauptstrecke des ersten Körpers« verwendet werden.

Es soll nun ferner dem zweiten Körper eine unendlich kleine Rotation von der Grösse $d\varphi_2$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch S_2 ertheilt werden. Sollen die Winkel φ_1 und φ_2 dabei konstant bleiben, so muss der erste Körper die dadurch hervorgerufene Translation des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ und der dritte die Translation des Gelenkpunktes $G_{2,3}$ erfahren. Beide Translationen finden senkrecht zur Längsaxe des zweiten Körpers statt, ihre Richtungen sind aber entgegengesetzt, wenn S_2 zwischen die beiden Gelenkpunkte fällt. Da nach den Festsetzungen über die Richtung der Längsaxen der Abstand des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ von S_2 negativ zu rechnen ist, so sind die Grössen dieser beiden Translationen durch $-r_2 d\varphi_2$ und $s_2 d\varphi_2$ dargestellt. Der gemeinsame Schwerpunkt $S_{1,3}$ des ersten und dritten Körpers erleidet infolgedessen eine zur zweiten Längsaxe senkrecht gerichtete Translation von der Grösse

$$\frac{-m_1 r_2 + m_3 s_2}{m_1 + m_3} d\varphi_2 .$$

Dieses Resultat folgt daraus, dass $S_{1,3}$ auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1, S_3 liegt und dieselbe im Verhältniss $m_3 : m_1$ theilt. Es ist also, wenn S_1', $S_{1,3}'$, S_3' die Lagen dieser drei Punkte nach der Verrückung bedeuten (vgl. Fig. 3)

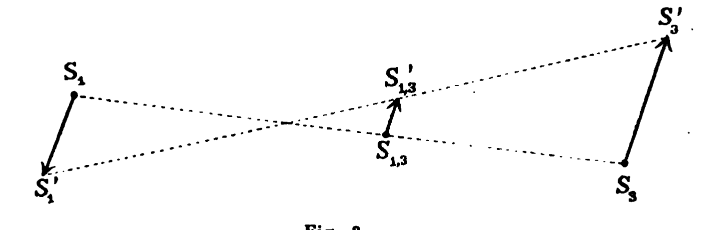


Fig. 3.

$$(\overline{S_1'S_1} + \overline{S_{1,3}S_{1,3}'}) : (\overline{S_1'S_1} + \overline{S_3S_3'}) = m_3 : (m_1 + m_3),$$

woraus folgt, da $\overline{S_1'S_1} = -\overline{S_1S_1'}$ ist,

$$(m_1 + m_3)\overline{S_{1,3}S_{1,3}'} = m_1 \cdot \overline{S_1S_1'} + m_3 \cdot \overline{S_3S_3'} = -m_1 \cdot r_2 d\varphi_2 + m_3 \cdot s_2 d\varphi_2 .$$

Es ist also

$$\overline{S_{1,3}S_{1,3}'} = \frac{-m_1r_2 + m_3s_2}{m_1 + m_3} d\varphi_2 .$$

Da S_2 zunächst als fest angenommen ist, so resultirt daraus eine Verrückung des Gesammtschwerpunktes S_0 des Systems von der Grösse

$$\frac{m_1 + m_3}{m_0} \cdot \frac{-m_1r_2 + m_3s_2}{m_1 + m_3} d\varphi_2 = \frac{-m_1r_2 + m_3s_2}{m_0} d\varphi_2 .$$

Dieselbe Verrückung, sowohl der Grösse als auch der Richtung nach, erfährt aber ein auf der Längsaxe des zweiten Körpers gelegener Punkt H_2, welcher von S_2 in positiver Richtung die Entfernung $\frac{-m_1r_2 + m_3s_2}{m_0}$ besitzt. Ertheilt man daher hinterher dem ganzen System eine Translation von der Grösse $-\frac{-m_1r_2 + m_3s_2}{m_0} d\varphi_2$, so wird dadurch nicht nur der Gesammtschwerpunkt S_0, sondern auch der Punkt H_2 auf der Längsaxe des zweiten Körpers an seine alte Stelle zurückgeführt. Es muss infolgedessen die Rotation des zweiten Körpers von der Grösse $d\varphi_2$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch H_2 stattfinden, wenn die Lage des Gesammtschwerpunktes S_0 erhalten bleiben soll. Der Punkt H_2 spielt daher für die zweite Art der Verrückung des Systems, bei welcher nur der Winkel φ_2 die Zunnahme $d\varphi_2$ erleiden soll, während φ_1 und φ_3 constant bleiben, dieselbe Rolle wie der Punkt H_1 für die zuerst betrachtete Ver-

rückung, bei welcher φ_1 allein sich um $d\varphi_1$ änderte. Dementsprechend sollen H_2 der Hauptpunkt, und die Strecken zwischen H_2 und den Gelenkpunkten $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ die Hauptstrecken des zweiten Körpers genannt werden. Beachtet man, dass der Hauptpunkt H_2 auf der Längsaxe des zweiten Körpers liegt und dass er von S_2 eine Entfernung e_2 besitzt, für welche die Relation gilt

$$m_0 e_2 = - m_1 r_2 + m_3 s_2 ,$$

so ist ersichtlich, dass er mit dem Schwerpunkte des Massensystems zusammenfällt, welches man erhält, wenn man in den Gelenkpunkten $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ bezüglich die Massen m_1 und m_3 der durch diese Gelenke mit dem zweiten Körper verbundenen Körper concentrirt und in S_2 selbst die Masse des zweiten Körpers angebracht denkt. Dieses fingirte Massensystem soll »das zweite reducirte System« heissen.

Endlich ergiebt eine analoge Betrachtung, dass die Verrückung des Gesammtsystems, bei welcher φ_3 sich um $d\varphi_3$ ändert und sowohl die Grössen der Winkel φ_1, φ_2, als auch die Lage des Gesammtschwerpunktes erhalten bleiben, auf eine Rotation des dritten Körpers von der Grösse $d\varphi_3$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch einen im dritten Körper festen Punkt H_3, verbunden mit gleichzeitiger Translation der beiden anderen Körper, hinausläuft. Dieser Punkt H_3, welcher der Hauptpunkt, und dessen Entfernung von $G_{2,3}$ die Hauptstrecke des dritten Körpers genannt sein soll, liegt auf der Längsaxe des dritten Körpers und besitzt von S_3 die Entfernung $-\frac{m_1 + m_2}{m_0} r_3$. Da diese Entfernung einen negativen Werth besitzt, so ist H_3 zwischen dem Gelenkpunkte $G_{2,3}$ und dem Schwerpunkte S_3 zu suchen.

Der Hauptpunkt H_3 fällt zusammen mit dem Schwerpunkte des »dritten reducirten Systems«, d. h. des Massensystems, welches man erhält, wenn in $G_{2,3}$ die Massen m_1, m_2 der beiden ersten Körper und in S_3 die Masse des dritten Körpers concentrirt gedacht wird.

Als Resultat der voraufgehenden Betrachtung kann man den Satz aussprechen:

Satz: Jede Verrückung des Systems der drei Körper relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 aus der Lage φ_1, φ_2, φ_3 in die unendlich benachbarte $\varphi_1 + d\varphi_1$, $\varphi_2 + d\varphi_2$, $\varphi_3 + d\varphi_3$

kann zerlegt werden in drei unendlich kleine Rotationen um Axen durch die drei Hauptpunkte verbunden mit Translationen der beiden anderen Körper, welchen der betreffende Hauptpunkt nicht angehört.

Die Hauptpunkte des ersten und dritten Körpers liegen den Gelenkpunkten näher als die Schwerpunkte. Der Hauptpunkt des zweiten Körpers liegt näher an $G_{1,2}$ oder $G_{2,3}$, je nachdem die Masse m_1 grösser ist als die Masse m_3 oder umgekehrt.

Es sollen nun folgende Bezeichnungen für die Hauptstrecken und die Abstände der Schwerpunkte von den zugehörigen Hauptpunkten eingeführt werden (vgl. Fig. 4):

$$\overline{S_1 H_1} = e_1, \quad \overline{H_1 G_{1,2}} = d_1, \quad \overline{G_{1,2} H_2} = c_2, \quad \overline{S_2 H_2} = e_2,$$
$$\overline{H_2 G_{2,3}} = d_2, \quad \overline{G_{2,3} H_3} = c_3 \text{ und } \overline{H_3 S_3} = e_3.$$

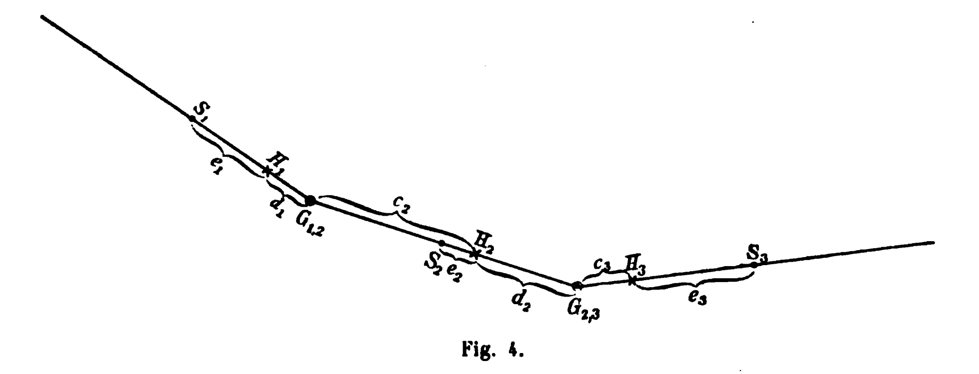


Fig. 4.

Nach der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reducirten Systeme müssen zwischen diesen Grössen und den Massen der drei Körper bei der in Figur 4 angenommenen Lage der einzelnen Punkte zu einander die Relationen bestehen:

$$-m_1 e_1 + (m_2 + m_3)\, d_1 = 0$$
$$-m_1 c_2 - m_2 e_2 + m_3 d_2 = 0$$
$$-(m_1 + m_2) c_3 + m_3 e_3 = 0.$$

Infolge der drei Verrückungen des Systems, welche bezüglich einer alleinigen Aenderung eines der drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 entsprechen, erleidet jeder der Einzelschwerpunkte drei Translationen. Beachtet man, dass die Abstände von den Hauptpunkten positiv oder negativ zu rechnen sind, je nachdem sie in positiver oder negativer Richtung auf den Längsaxen verlaufen, so ergeben sich als Grössen

dieser Translationen bei der in der Figur angegeben Lage der einzelnen Punkte zu einander

$$\begin{array}{llll} \text{für } S_1: & -e_1\,d\varphi_1, & -c_2\,d\varphi_2, & -c_3\,d\varphi_3 \\ \text{für } S_2: & +d_1\,d\varphi_1, & -e_2\,d\varphi_2, & -c_3\,d\varphi_3 \\ \text{für } S_3: & +d_1\,d\varphi_1, & +d_2\,d\varphi_2, & +e_3\,d\varphi_3. \end{array}$$

Von den drei zu einem Schwerpunkte gehörenden Verrückungen ist immer die erste senkrecht zur ersten Längsaxe, die zweite senkrecht zur zweiten und die dritte senkrecht zur dritten Längsaxe gerichtet. Der Sinn jeder Verrückung ergibt sich aus dem Vorzeichen derselben.

Der Werth einer jeden der drei Verrückungen des Einzelschwerpunktes S_h stellt sich in der Form $f_{jh}\,d\varphi_j$ dar, wobei f_{jh} die positiv oder negativ zu rechnende Länge einer Hauptstrecke bedeutet. Der Index j soll andeuten, dass die Verrückung eine Folge der Rotation um den Hauptpunkt H_j ist, und der Index h, dass dieselbe dem Schwerpunkte S_h angehört. Die Werthe der Factoren f_{jh} sind in folgender Tabelle niedergelegt.

h	f_{1h}	f_{2h}	f_{3h}
1	$-e_1$	$-c_2$	$-c_3$
2	$+d_1$	$-e_2$	$-c_3$
3	$+d_1$	$+d_2$	$+e_3$

Die Gesammtverrückung eines jeden Schwerpunktes S_h ist nun die geometrische Summe (Resultante) der drei zugehörigen Einzelverrückungen. Sie wird also erhalten als Schlusslinie eines Streckenzuges, der in S_h beginnt, und dessen Seiten den drei Einzelverrückungen in beliebiger Aufeinanderfolge geometrisch gleich sind.

Um die geometrische Summe analytisch zu bestimmen, hat man jede Verrückung auf die beiden Coordinatenaxen zu projiciren. Zu dem Zwecke ist zu beachten, dass die drei Verrückungen, welche mit $d\varphi_j$ multiplicirt sind, einander parallel und zwar senkrecht zur $j$ten Längsaxe verlaufen. Die Richtung der positiven Verrückung $f_{jh}\,d\varphi_j$ bildet, wie man aus Figur 5 erkennt, mit der positiven X-Axe und Z-Axe bezüglich die Winkel φ_j und $\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi_j\right)$. Es besitzen daher

die Projectionen der Verrückung $f_{jk}\,d\varphi_j$ auf die positive X-Axe und die positive Z-Axe bezüglich die Werthe

$$f_{jk}\cos\varphi_j\,d\varphi_j \quad \text{und}$$
$$f_{jk}\sin\varphi_j\,d\varphi_j\,.$$

Da die Projection der geometrischen Summe der drei Verrückungen des Schwerpunktes S_k auf jede der Coordinatenaxen gleich der Summe der Projectionen der drei Verrückungen auf dieselben Axen ist, so hat man für die Projection der Gesammtverrückung von S_k auf die positive X-Axe den Werth

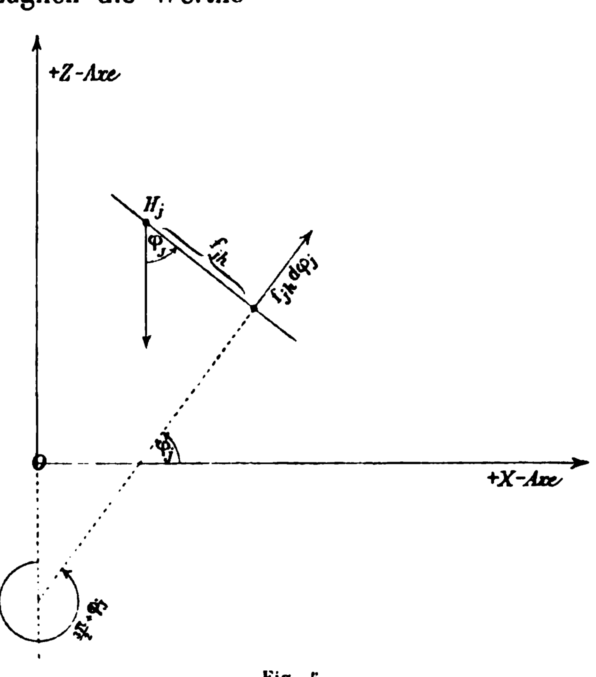


Fig. 5.

$$f_{1k}\cos\varphi_1 d\varphi_1 + f_{2k}\cos\varphi_2 d\varphi_2 + f_{3k}\cos\varphi_3 d\varphi_3 = \sum_1^3{}^j f_{jk}\cos\varphi_j\,d\varphi_j$$

und für die Projection derselben auf die positive Z-Axe:

$$f_{1k}\sin\varphi_1 d\varphi_1 + f_{2k}\sin\varphi_2 d\varphi_2 + f_{3k}\sin\varphi_3 d\varphi_3 = \sum_1^3{}^j f_{jk}\sin\varphi_j\,d\varphi_j\,.$$

Man erhält daraus für das Quadrat der Gesammtverrückung des Schwerpunktes S_k:

$$\left(\sum_1^3{}^j f_{jk}\cos\varphi_j d\varphi_j\right)^2 + \left(\sum_1^3{}^j f_{jk}\sin\varphi_j\,d\varphi_j\right)^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\left(\sum_1^3{}^j f_{jk}\cos\varphi_j d\varphi_j\right)^2 = {} & f_{1k}^2\cos^2\varphi_1 d\varphi_1^2 + f_{2k}^2\cos^2\varphi_2 d\varphi_2^2 + f_{3k}^2\cos^2\varphi_3 d\varphi_3^2 \\ & + 2f_{1k}f_{2k}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2 + 2f_{1k}f_{3k}\cos\varphi_1\cos\varphi_3 d\varphi_1\,d\varphi_3 \\ & + 2f_{2k}f_{3k}\cos\varphi_2\cos\varphi_3 d\varphi_2 d\varphi_3\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\sum_1^3{}^j f_{jk}\sin\varphi_j d\varphi_j\right)^2 = {} & f_{1k}^2\sin^2\varphi_1 d\varphi_1^2 + f_{2k}^2\sin^2\varphi_2 d\varphi_2^2 + f_{3k}^2\sin^2\varphi_3 d\varphi_3^2 \\ & + 2f_{1k}f_{2k}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2 + 2f_{1k}f_{3k}\sin\varphi_1\sin\varphi_3 d\varphi_1 d\varphi_3 \\ & + 2f_{2k}f_{3k}\sin\varphi_2\sin\varphi_3 d\varphi_2 d\varphi_3\,.\end{aligned}$$

Beachtet man, dass

$\cos^2\varphi_j + \sin^2\varphi_j = 1$ und $\cos\varphi_i \cos\varphi_k + \sin\varphi_i \sin\varphi_k = \cos(\varphi_i - \varphi_k)$

ist, so erhält man für das Quadrat der Verrückung des Schwerpunktes S_h den Werth:

$$f_{1h}^2 d\varphi_1^2 + f_{2h}^2 d\varphi_2^2 + f_{3h}^2 d\varphi_3^2 + 2 f_{1h} f_{2h} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2$$
$$+ 2 f_{1h} f_{3h} \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\, d\varphi_1 d\varphi_3 + 2 f_{2h} f_{3h} \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\, d\varphi_2 d\varphi_3 .$$

Diesen Werth kann man kürzer in der Form schreiben:

$$\sum_1^3{}^j f_{jh}^2 d\varphi_j^2 + 2\sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\, d\varphi_i d\varphi_k ,$$

wenn man festsetzt, dass stets $i < k$ sein muss.

Dividirt man das Quadrat der Verrückung von S_h durch dt^2, wo t die Zeit bedeutet, so erhält man das Quadrat der Geschwindigkeit v_h des Schwerpunktes S_h. Bezeichnet man den in dem Ausdrucke auftretenden Differentialquotienten $\frac{d\varphi_j}{dt}$, welcher die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des j^{ten} Körpers ausdrückt, kurz mit φ_j', so ergiebt sich als Werth des Quadrates von v_h:

$$v_h^2 = \sum_1^3{}^j f_{jh}^2 \cdot \varphi_j'^2 + 2\sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\, \varphi_i' \varphi_k'$$

(wo stets $i < k$).

Der Beitrag, welchen der Schwerpunkt S_h infolge seiner eignen Bewegung relativ zum Gesammtschwerpunkte für die gesammte lebendige Kraft des Körpersystems leistet, besitzt daher die Grösse

$$\tfrac{1}{2} m_h v_h^2 = \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}^j m_h f_{jh}^2 \varphi_j'^2 + \sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k m_h f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\, \varphi_i' \varphi_k' .$$

Dieser Ausdruck gilt für den Schwerpunkt S_1, S_2 oder S_3, je nachdem man für h den Werth 1, 2 oder 3 einsetzt.

Man erkennt, dass die zu den drei Schwerpunkten gehörenden Werthe von $\frac{1}{2} m_h v_h^2$ sich nur in den Producten $m_h f_{jh}^2$ und $m_h f_{ih} f_{kh}$ unterscheiden. Man erhält infolge dessen den Beitrag für die lebendige Kraft, welchen die drei Schwerpunkte zusammen infolge ihrer eignen Geschwindigkeit leisten, und welcher gleich der Summe der Einzelbeiträge der drei Schwerpunkte ist, indem man in dem obigen Ausdruck an Stelle der Grössen $m_h f_{jh}^2$ und $m_h f_{ih} f_{kh}$ bezüglich die Summen $\sum_1^3{}^h m_h f_{jh}^2$ und $\sum_1^3{}^h m_h f_{ih} f_{kh}$ einsetzt. Derselbe besitzt daher den Werth:

$$\tfrac{1}{2}\varphi_1'^2\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2 + \tfrac{1}{2}\varphi_2'^2\sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2 + \tfrac{1}{2}\varphi_3'^2\sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2 + \varphi_1'\varphi_2'\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sum_1^3{}^h m_h f_{1h} f_{2h}$$

$$+\varphi_1'\varphi_3'\cos(\varphi_1-\varphi_3)\sum_1^3{}^h m_h f_{1h} f_{3h} + \varphi_2'\varphi_3'\cos(\varphi_2-\varphi_3)\sum_1^3{}^h m_h f_{2h} f_{3h}\,.$$

Ausserdem kommt nun für die lebendige Kraft des Systems relativ zum Gesammtschwerpunkt noch von jedem Körper die lebendige Kraft hinzu, welche er infolge seiner Winkelgeschwindigkeit φ_h' besitzen würde, wenn er die Drehung nicht um eine Axe durch den Hauptpunkt H_h, sondern um die parallele Axe durch den Schwerpunkt S_h ausführte.

Bezeichnet allgemein $\varkappa_h$ den Trägheitsradius des h^{ten} Körpers in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt S_h, so sind die drei von den Winkelgeschwindigkeiten um den Schwerpunkt eines jeden Körpers allein herrührenden Beiträge für die lebendige Kraft des Systems

$$\tfrac{1}{2} m_1\varkappa_1^2\varphi_1'^2\,,\qquad \tfrac{1}{2} m_2\varkappa_2^2\varphi_2'^2\,,\qquad \tfrac{1}{2} m_3\varkappa_3^2\varphi_3'^2\,.$$

Diese drei Bestandtheile addiren sich zu den früher angeführten hinzu, und man erhält als Werth der lebendigen Kraft T_r relativ zum Gesammtschwerpunkt:

$$T_r = \tfrac{1}{2}\varphi_1'^2\Big[m_1\varkappa_1^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2\Big]+\tfrac{1}{2}\varphi_2'^2\Big[m_2\varkappa_2^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2\Big]+\tfrac{1}{2}\varphi_3'^2\Big[m_3\varkappa_3^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2\Big]$$

$$+\varphi_1'\varphi_2'\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sum_1^3{}^h m_h f_{1h} f_{2h} + \varphi_1'\varphi_3'\cos(\varphi_1-\varphi_3)\sum_1^3{}^h m_h f_{1h} f_{3h}$$

$$+\varphi_2'\varphi_3'\cos(\varphi_2-\varphi_3)\sum_1^3{}^h m_h f_{2h} f_{3h}\,.$$

Die Ausdrücke $m_j\varkappa_j^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{jh}^2$ und $\sum_1^3{}^h m_h f_{ih} f_{kh}$ besitzen eine bemerkenswerthe Bedeutung.

Es ist nach der Tabelle auf S. 26:

$$m_1\varkappa_1^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2 = m_1(\varkappa_1^2+e_1^2)+(m_2+m_3)\,d_1^2\,.$$

Da $\varkappa_1$ der Trägheitsradius des ersten Körpers in Bezug auf die den Gelenkaxen parallele Axe durch den Schwerpunkt S_1 ist, und da der erste Hauptpunkt H_1 von S_1 die Entfernung e_1 besitzt, so ist $m_1(\varkappa_1^2+e_1^2)$ das Trägheitsmoment des ersten Körpers in Bezug auf die Axe durch den Hauptpunkt H_1. Ferner ist $(m_2+m_3)\,d_1^2$ das Trägheitsmoment, welches die beiden Massen m_2 und m_3 in Bezug auf

die Axe durch H_1 besitzen würden, wenn sie im Gelenkpunkte $G_{1,2}$ concentrirt wären, denn $G_{1,2}$ besitzt von H_1 die Entfernung d_1. Es ist daher der Ausdruck $m_1 \varkappa_1^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2$ das Trägheitsmoment des ersten reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch den Schwerpunkt H_1 desselben.

Die Masse des reducirten Systems ist gleich der Gesammtmasse m_0. Bezeichnet man den constanten Trägheitsradius des ersten reducirten Systems in Bezug auf die Axe durch seinen Schwerpunkt H_1 mit k_1, so wird

$$m_1 \varkappa_1^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2 = m_0 k_1^2 .$$

Aus den Werthen für die beiden anderen Ausdrücke

$$m_2 \varkappa_2^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2 = m_1 c_2^2 + m_2 (\varkappa_2^2 + e_2^2) + m_3 d_2^2 \quad \text{und}$$

$$m_3 \varkappa_3^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2 = (m_1 + m_2) c_3^2 + m_3 (\varkappa_3^2 + e_3^2)$$

geht hervor, dass $m_2 \varkappa_2^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2$ das Trägheitsmoment des zweiten reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt H_2 und $m_3 \varkappa_3^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2$ das Trägheitsmoment des dritten reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt H_3 ist.

Bezeichnet man die beiden zugehörigen Trägheitsradien bezüglich mit k_2 und k_3, so hat man

$$m_2 \varkappa_2^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2 = m_0 k_2^2$$

$$m_3 \varkappa_3^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2 = m_0 k_3^2 .$$

Diese Resultate sollen zusammengefasst werden in den

Satz: Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit φ_h' ist in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft des Körpersystems relativ zum Gesammtschwerpunkt multiplicirt mit dem Trägheitsmoment des h^{ten} reducirten Systems in

Bezug auf die den Gelenkaxen parallele Axe durch den Schwerpunkt H_k desselben.

Ferner ist nach der Tabelle auf S. 26:

$$\sum_1^3{}^k m_k f_{1k} f_{2k} = m_1 e_1 c_2 - m_2 d_1 e_2 + m_3 d_1 d_2 = m_1 e_1 c_2 - (m_2 e_2 - m_3 d_2)\, d_1\,.$$

Nach den Relationen auf pag. 25 ist nun

$$m_1 e_1 = (m_2 + m_3)\, d_1$$ und

$$m_2 c_2 - m_3 d_2 = - m_1 c_2\,.$$ Es ist daher

$$\sum_1^3{}^k m_k f_{1k} f_{2k} = (m_2 + m_3)\, d_1 c_2 + m_1 d_1 c_2 = m_0 d_1 c_2\,.$$

In gleicher Weise leitet man unter Berücksichtigung der Relationen auf S. 25 ab, dass

$$\sum_1^3{}^k m_k f_{1k} f_{3k} = m_0 d_1 c_3 \quad \text{und} \quad \sum_1^3{}^k m_k f_{2k} f_{3k} = m_0 d_2 c_3\,.$$

Durch Vergleichen dieser Werthe mit denen der Tabelle auf pag. 26 erkennt man, dass

$$d_1 c_2 = - f_{12} f_{21}\,, \quad d_1 c_3 = - f_{13} f_{31} \quad \text{und} \quad d_2 c_3 = - f_{23} f_{32}\,.$$

Man kann daher allgemein schreiben $\sum_1^3{}^k m_k f_{ik} f_{kh} = - m_0 f_{ik} f_{ki}$. Der Ausdruck für die lebendige Kraft des Körpersystems relativ zum Gesammtschwerpunkt erhält infolgedessen die kürzere Form:

$$\begin{aligned} T_r = {} & \tfrac{1}{2} m_0 k_1^2 \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_2^2 \varphi_2'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_3^2 \varphi_3'^2 \\ & - m_0 f_{12} f_{21} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\, \varphi_1' \varphi_2' - m_0 f_{13} f_{31} \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\, \varphi_1' \varphi_3' \\ & - m_0 f_{23} f_{32} \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\, \varphi_2' \varphi_3'\,. \end{aligned}$$

Da die Gesammtmasse m_0 allen Gliedern gemeinsam ist, so kann man $\frac{1}{2} m_0$ als Factor absondern und erhält dann

$$T_r = \tfrac{1}{2} m_0 \Big[\sum_1^3{}^j k_j^2 \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\, \varphi_i' \varphi_k' \Big]\,,$$

wobei immer $i < k$ sein muss.

Dabei bedeuten also m_0 die Gesammtmasse des Systems, k_j den Trägheitsradius des j^{ten} reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt H_j, und f_{ik}, f_{ki} die in der Tabelle auf S. 26 niedergelegten Hauptstrecken.

Es ist zu beachten, dass in dem Ausdrucke für T_r die einzelnen Massen m_k gar nicht explicit auftreten. Dies ist der Einführung der

Hauptstrecken und der Trägheitsradien k_j zu verdanken. Die Grössen dieser Strecken hängen hauptsächlich von der Masse und Massenvertheilung der einzelnen Körper ab, und der Einfluss, den die einzelnen Massen auf den Werth der lebendigen Kraft des ganzen Systems ausüben, macht sich allein in der Länge dieser Strecken geltend.

Der Factor von $\frac{1}{2}m_0$ ist äquivalent mit dem Quadrate einer linearen Geschwindigkeit. Man könnte daher auch T_r in der Form schreiben

$$T_r = \frac{1}{2}m_0 v_r^2,$$

wo
$$v_r^2 = \sum_1^3{}^j k_j^2 \varphi_j'^2 - 2\sum_1^2{}^i\sum_2^3{}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\varphi_i'\varphi_k' \quad (i < k).$$

Der Gesammtschwerpunkt S_0 des Systems besitze die rechtwinkligen Coordinaten ξ_0, ζ_0 (Fig. 1). Bleibt nun derselbe nicht fest, sondern bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v_0, wo

$$v_0^2 = \xi_0'^2 + \zeta_0'^2,$$

so resultirt daraus ein weiterer Bestandtheil T_0 für die gesammte lebendige Kraft T des Körpersystems, nämlich $T_0 = \frac{1}{2}m_0 v_0^2$. Es ist daher

$$T = T_r + T_0 = \frac{1}{2}m_0(v_r^2 + v_0^2), \qquad \text{d. h. aber}$$

$$T = \frac{1}{2}m_0\left[\sum_1^3{}^j k_j^2 \varphi_j'^2 - 2\sum_1^2{}^i\sum_2^3{}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\varphi_i'\varphi_k' + \xi_0'^2 + \zeta_0'^2\right]$$

B. Das bedingt bewegliche System.

Wenn das System der drei Körper frei beweglich ist, so sind die fünf Coordinaten φ_1, φ_2, φ_3, ξ_0 und ζ_0 vollständig unabhängig von einander. Ist dagegen die Bewegung des Systems an gewisse Bedingungen geknüpft, so treten in vielen Fällen die Coordinaten ξ_0, ζ_0 des Gesammtschwerpunktes in Abhängigkeit von den Winkelgrössen φ_k. Besteht z. B. die Bedingung für die Bewegung des Körpersystems darin, dass ein Punkt mit den Coordinaten x_1, y_1 auf einer der drei Längsaxen festbleibt, so ist im Übrigen jede Lage und Haltung des Körpersystems durch die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 vollständig bestimmt. Es muss also gelingen, die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes ξ_0, ζ_0 bei dieser Bedingung für die Beweglichkeit des Systems durch die Grössen φ_k und die Coordinaten x_1, z_1 des festbleibenden Punktes auszudrücken.

Für die Darstellung der Grössen ξ_0, ζ_0 als Functionen von φ_1, φ_2, φ_3, x_1 und z_1 leisten nun wieder die Hauptpunkte der drei Körper wesentliche Dienste. Es gilt nämlich der

Satz: Man gelangt stets zu dem Gesammtschwerpunkte S_0 des Körpersystems, wenn man von irgend einem Hauptpunkte H_j der drei Körper aus die geometrische Summe der zu den beiden anderen Körpern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des gebrochenen Linienzuges der drei Längsaxen dem Hauptpunkte H_j zugekehrt sind.

Es ist also nach diesem Satze:

$$[H_1 S_0] = [G_{1,2} H_2] + [G_{2,3} H_3]$$
$$[H_2 S_0] = [G_{1,2} H_1] + [G_{2,3} H_3]$$
$$[H_3 S_0] = [G_{2,3} H_2] + [G_{1,2} H_1]$$ (vgl. Fig. 4 auf S. 25).

Beweis dieses Satzes: Zieht man von einem beliebigen Punkte O aus die Verbindungsstrecken nach den drei Einzelschwerpunkten S_k und dem Gesammtschwerpunkte S_0, so findet bekanntlich die Relation statt

$$m_0 [O S_0] = \sum_1^3{}^k m_k [O S_k],$$

wo das Σ-Zeichen die geometrische Summation andeuten soll. Der Punkt O ist ganz beliebig. Insbesondere kann derselbe mit dem Hauptpunkte H_1 zusammenfallen, dann ist

$$m_0 [H_1 S_0] = m_1 [H_1 S_1] + m_2 [H_1 S_2] + m_3 [H_1 S_3].$$

Ersetzt man nun die Strecken $[H_1 S_2]$ und $[H_1 S_3]$ durch die geometrischen Summen $[H_1 G_{1,2}] + [G_{1,2} S_2]$ bezüglich $[H_1 G_{1,2}] + [G_{1,2} G_{2,3}] + [G_{2,3} S_3]$, so folgt

$$m_0 [H_1 S_0] = m_1 [H_1 S_1] + m_2 [H_1 G_{1,2}] + m_2 [G_{1,2} S_2] + m_3 [H_1 G_{1,2}] + m_3 [G_{1,2} G_{2,3}] + m_3 [G_{2,3} S_3].$$

Wendet man denselben Satz auf die drei reducirten Systeme an, indem man beim ersten von H_1, beim zweiten von $G_{1,2}$ und beim dritten von $G_{2,3}$ ausgeht und berücksichtigt, dass H_1, H_2, H^3 die Schwerpunkte derselben bedeuten, so erhält man, da $[H_1 H_1] = [G_{1,2} G_{1,2}] = [G_{2,3} G_{2,3}] = 0$ ist, die Relationen:

$$0 = m_1 [H_1 S_1] + (m_2 + m_3) [H_1 G_{1,2}]$$
$$m_0 [G_{1,2} H_2] = m_2 [G_{1,2} S_2] + m_3 [G_{1,2} G_{2,3}]$$
$$m_0 [G_{2,3} H_2] = m_3 [G_{2,3} S_3].$$

Infolgedessen geht die obige Formel über in

$$m_0[H_1 S_0] = m_0[G_{1,2} H_2] + m_0[G_{2,3} H_3],$$

so dass sich in der That ergibt

$$[H_1 S_0] = [G_{1,2} H_2] + [G_{2,3} H_3], \quad \text{q. e. d.}$$

Lässt man den Punkt O mit H_2 zusammenfallen, so ist

$$m_0[H_2 S_0] = m_1[H_2 S_1] + m_2[H_2 S_2] + m_3[H_2 S_3]$$
$$= m_1[H_2 G_{1,2}] + m_1[G_{1,2} S_1] + m_2[H_2 S_2] + m_3[H_2 G_{2,3}] + m_3[G_{2,3} S_3].$$

Ferner gilt

$$m_1[G_{1,2} S_1] = m_0[G_{1,2} H_1]$$
$$m_1[H_2 G_{1,2}] + m_2[H_2 S_2] + m_3[H_2 G_{2,3}] = 0$$
$$m_3[G_{2,3} S_3] = m_0[G_{2,3} H_3], \quad \text{folglich ist auch:}$$
$$[H_2 S_0] = [G_{1,2} H_1] + [G_{2,3} H_3].$$

Auf entsprechende Weise ergibt sich die dritte Relation:

$$[H_3 S_0] = [G_{2,3} H_2] + [G_{1,2} H_1].$$

Dieses Resultat kann man auch, wie beiläufig bemerkt sein soll, verwenden, um sich mit Hülfe eines einfachen Mechanismus aus Cartonstreifen für alle Stellungen der Längsaxen der drei Körper zu einander die Lage des Gesammtschwerpunktes S_0 zu verschaffen und sich gleichzeitig die drei Verrückungsarten des Systems zu veranschaulichen.

Dieser Mechanismus soll durch die beifolgende Figur 6 angedeutet sein.

$\overline{L_1 G_{1,2}}$, $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$, $\overline{G_{2,3} L_3}$ sollen die Längsaxen der drei Körper und H_1, H_2, H_3 die auf ihnen gelegenen Hauptpunkte repräsentiren.

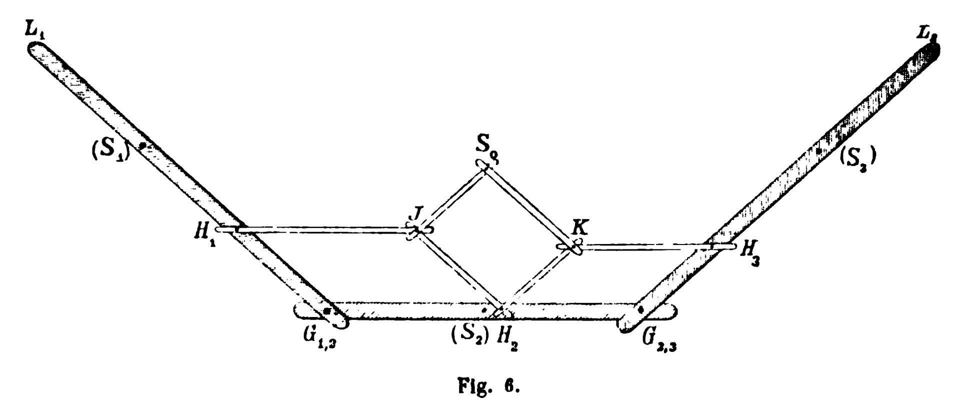


Fig. 6.

Diese drei Streifen sind in $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ gelenkartig verbunden. Die übrigen sechs Cartonstreifen $H_1 J$, $J H_2$, $H_2 K$, $K H_3$, $J S_0$ und $S_0 K$ sind in den Punkten H_1, H_2, H_3, J, K und S_0 in der aus der Figur

erkennbaren Weise gelenkartig mit einander bezüglich mit den drei Längsaxenstreifen verbunden. Sind nun die Dimensionen der Streifen so getroffen, dass

$$\overline{H_1 J} = \overline{G_{1,2} H_2}\,, \quad \overline{H_3 K} = \overline{G_{2,3} H_2}$$
$$\overline{S_0 K} = \overline{J H_2} = \overline{H_1 G_{1,2}} \text{ und } \overline{S_0 J} = \overline{K H_2} = \overline{H_3 G_{2,3}}\,,$$

so muss für jede Stellung der drei Längsaxen zu einander

$$\overline{H_1 J} \parallel \overline{G_{1,2} G_{2,3}} \parallel \overline{K H_3}\,,$$
$$\overline{S_0 K} \parallel \overline{J H_2} \parallel \overline{L_1 G_{1,2}}$$

und $\overline{S_0 J} \parallel \overline{K H_2} \parallel L_3 G_{2,3}$ sein und infolgedessen S_0 die Lage des Gesammtschwerpunktes darstellen.

Man kann sich mit Hülfe dieses Mechanismus auch jede der drei Verrückungen veranschaulichen, bei welcher nur eine der drei Grössen φ_1, φ_2, φ_3 ihren Werth ändert, während jedes Mal die beiden anderen constant bleiben. Hält man nämlich H_1 und S_0 fest, so ist auch $\overline{H_1 J}$ und $\overline{J S_0}$ festgelegt, und es kann das erste Glied zwar noch um H_1 rotiren, die beiden anderen können aber nur Translationen beschreiben, da $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$ immer parallel dem festgestellten Glied $\overline{H_1 J_1}$ und $\overline{G_{2,3} L_3}$ parallel dem festgestellten Glied $\overline{J S_0}$ bleiben muss. Die beiden anderen Verrückungsarten, bei welchen nur φ_2 bezüglich φ_3 seinen Werth ändert, erhält man, je nachdem man H_2 und S_0 oder H_3 und S_0 festhält.

Es soll nun ein Punkt P_1 mit den Coordinaten x_1, z_1 auf der ersten Längsaxe fest bleiben und der erste Hauptpunkt von demselben in positiver Richtung die Entfernung c_1 besitzen. Da allgemein die positive Richtung der j^{ten} Längsaxe mit der positiven X- und Z-Axe bezüglich die Winkel $\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi_j\right)$ und $(\pi + \varphi_j)$ bildet, so erhält man für die Coordinaten ξ_0, ζ_0 des Schwerpunktes nach dem oben abgeleiteten Satze die Werthe:

$$\xi_0 = x_1 + c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \sin\varphi_2 + c_3 \sin\varphi_3$$
$$\zeta_0 = z_1 - c_1 \cos\varphi_1 - c_2 \cos\varphi_2 - c_3 \cos\varphi_3\,.$$

Daraus folgt für das Quadrat der Geschwindigkeit v_0 des Gesammtschwerpunktes, da x_1 und z_1 constant sind:

$$v_0^2 = \xi_0'^2 + \zeta_0'^2 = c_1^2 \varphi_1'^2 + c_2^2 \varphi_2'^2 + c_3^2 \varphi_3'^2 + 2 c_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2'$$
$$+ 2 c_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \varphi_1' \varphi_3' + 2 c_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \varphi_2' \varphi_3'\,.$$

Es ist demnach für diesen Fall die gesammte lebendige Kraft des Körpersystems nach der Formel auf S. 32 und der Tabelle auf S. 26:

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 [(k_1^2 + c_1^2)\varphi_1'^2 + (k_2^2 + c_2^2)\varphi_2'^2 + (k_3^2 + c_3^2)\varphi_3'^2$$
$$+ 2(c_1 + d_1) c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2' + 2(c_1 + d_1) c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\varphi_1'\varphi_3'$$
$$+ 2(c_2 + d_2) c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_2'\varphi_3'] .$$

Dabei ist $m_0(k_1^2 + c_1^2)$ das Trägheitsmoment des ersten reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch P_1, dagegen sind $m_0(k_2^2 + c_2^2)$ und $m_0(k_3^2 + c_3^2)$ die Trägheitsmomente des zweiten und dritten reducirten Systems in Bezug auf die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ bezüglich durch $G_{2,3}$.

Setzt man $k_1^2 + c_1^2 = \lambda_1^2$, $k_2^2 + c_2^2 = \lambda_2^2$, $k_3^2 + c_3^2 = \lambda_3^2$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Trägheitsradien der drei reducirten Systeme in Bezug auf die bezüglich durch P, $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ gehenden Axen bedeuten, und schreibt man ferner $c_1 + d_1 = l_1$, $c_2 + d_2 = l_2$, so nimmt der Werth für die lebendige Kraft die etwas einfachere Form an:

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 [\lambda_1^2\varphi_1'^2 + \lambda_2^2\varphi_2'^2 + \lambda_3^2\varphi_3'^2 + 2 l_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2'$$
$$+ 2 l_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\varphi_1'\varphi_3' + 2 l_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_2'\varphi_3'] .$$

Während im Falle vollständig freier Beweglichkeit des Systems die lebendige Kraft von den fünf von einander unabhängigen Coordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \xi_0, \zeta_0$, bezüglich deren Abgeleiteten abhing, gehen unter der Bedingung, dass ein Punkt des Systems festbleibt, nur die drei Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und deren Abgeleitete in den Ausdruck für die lebendige Kraft ein, so dass derselbe von den Werthen x_1, z_1 der Coordinaten des festbleibenden Punktes unabhängig ist.

Zu demselben Resultate kann man auch auf folgende Art gelangen.

Man kann, ähnlich wie früher, die Frage aufwerfen: »Um welche Axe muss die der Änderung eines der drei Winkel φ_k entsprechende unendlich kleine Rotation stattfinden, damit bei gleichzeitiger Translation der beiden anderen Körper der Punkt P_1 auf der ersten Längsaxe festbleibt?«

Die Antwort auf diese Frage ist nicht schwer. Man erkennt ohne Weiteres, dass die unendlich kleine Rotation des ersten Körpers um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch P_1, die der beiden anderen Körper dagegen um eine der beiden Gelenkaxen selbst statt-

finden muss, und zwar für den zweiten Körper um die durch $G_{1,2}$ und für den dritten um die durch $G_{2,3}$ gehende Axe.

Infolge dieser Rotationen und gleichzeitigen Translationen erfahren die drei Einzelschwerpunkte nach den eingeführten Bezeichnungen folgende Translationen:

$$\begin{array}{llll} S_1: & (c_1 - e_1)\, d\varphi_1, & 0, & 0, \\ S_2: & (c_1 + d_1)\, d\varphi_1, & (c_2 - e_2)\, d\varphi_2, & 0, \\ S_3: & (c_1 + d_1)\, d\varphi_1, & (c_2 + d_2)\, d\varphi_2, & (c_3 + e_3)\, d\varphi_3. \end{array}$$

Es empfiehlt sich wieder, für die Factoren von $d\varphi_j$ Bezeichnungen f'_{jh} einzuführen, welche eine kürzere Schreibweise der Formeln gestatten, wobei der Index j übereinstimmt mit dem Index des zugehörigen Factors $d\varphi$ und der Index h andeutet, dass die Grösse zu einer Verrückung des Schwerpunktes S_h gehört. Die Werthe der f'_{jh} sind daher die in der folgenden Tabelle niedergelegten:

h	f'_{1h}	f'_{2h}	f'_{3h}
1	$c_1 - e_1$	0	0
2	$c_1 + d_1$	$c_2 - e_2$	0
3	$c_1 + d_1$	$c_2 + d_2$	$c_3 + e_3$

Da nun von den drei zu ein und demselben Schwerpunkte gehörenden Translationen wieder immer die erste senkrecht zur ersten Längsaxe, die zweite und dritte senkrecht zur zweiten bezüglich dritten Längsaxe gerichtet ist, so erhält man unter Wiederholung der früheren Entwickelungen als Werth der lebendigen Kraft des Körpersystems nach S. 29:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}^j \varphi_j'^2\Big[m_j \varkappa_j^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{jh}'^2\Big] + \sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k \varphi_i' \varphi_k' \cos(\varphi_i - \varphi_k) \sum_1^3{}^h m_h f'_{ih} f'_{kh}$$

wo stets $i < k$.

In diesem Falle hat man damit den vollständigen Ausdruck für die lebendige Kraft, weil nicht blos die Verrückungen der Einzelschwerpunkte relativ zum Gesammtschwerpunkte, sondern die ganzen Verrückungen derselben in Betracht gezogen sind, welche sie unter der für die Bewegungen gesetzten Bedingung erfahren.

Da die f'_{jh} nicht mehr, wie früher, Hauptstrecken bedeuten, so gelten jetzt nicht mehr dieselben Relationen für die in dem Ausdrucke auftretenden Summen.

Für $m_1 x_1^2 + \sum_1^3{}^k m_k f_{1k}'^2$ ergibt sich nach der Tabelle auf S. 37 als Bedeutung: das Trägheitsmoment des ersten reducirten Systems in Bezug auf die Axe durch P_1. Die Ausdrücke $m_2 x_2^2 + \sum_1^3{}^k m_k f_{2k}'^2$ und $m_3 x_3^2 + \sum_1^3{}^k m_k f_{3k}'^2$ bedeuten das Trägheitsmoment des zweiten bezüglich dritten reducirten Systems in Bezug auf die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ bezüglich durch $G_{2,3}$.

Ferner ist

$$\sum_1^3{}^k m_k f_{1k}' f_{2k}' = m_2 (c_1 + d_1)(c_2 - e_2) + m_3 (c_1 + d_1)(c_2 + d_2)$$

$$\sum_1^3{}^k m_k f_{1k}' f_{3k}' = m_3 (c_1 + d_1)(c_3 + e_3)$$

$$\sum_1^3{}^k m_k f_{2k}' f_{3k}' = m_3 (c_2 + d_2)(c_3 + e_3) .$$

Da infolge der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reducirten Systeme

$$m_2 (c_2 - e_2) + m_3 (c_2 + d_2) = m_0 c_2 \quad \text{und}$$

$$m_3 (c_3 + e_3) = m_0 c_3 \quad \text{ist, so folgt der}$$

schon auf S. 36 angegebene Werth für T.

Auf analoge Weise erledigen sich die Fälle, wo ein Punkt der zweiten oder dritten Längsaxe festgehalten wird. Auch die Behandlung des Falles, in welchem der festbleibende Punkt nicht auf der Längsaxe eines Körpers liegt, bringt keine neue Schwierigkeit mit sich, wenn sich auch einige Glieder in dem Ausdrucke für T etwas verwickelter gestalten.

Es ist gerade der eine Fall herausgegriffen und ausführlich behandelt worden, weil er am menschlichen Körper ein Analogon findet. Ein am ruhenden Körper hängendes Bein, welches sich parallel der Medianebene des Menschen bewegt, bietet unter gewissen Einschränkungen ein solches System dreier hintereinander durch Gelenke verbundener Körper dar, deren Axen für die vorausgesetzte Bewegungsart nahezu einander parallel laufen.

II. Die Elementararbeiten der Kräfte.

Im Allgemeinen wird nun die lebendige Kraft des Systems während der Bewegung nicht constant bleiben. Die Änderungen des Werthes derselben stehen in bestimmter Beziehung zu den Elementararbeiten der wirksamen äusseren und inneren Kräfte. Um diese Beziehungen, welche in den Bewegungsgleichungen des Körpersystems ihren Ausdruck finden, zu formuliren, ist zunächst festzustellen,

»welche Elementararbeiten die am Körpersystem wirksamen Kräfte leisten, wenn das System einer beliebigen Verrückung unterworfen wird«.

Zu dem Zwecke hat man nur die Grösse und Richtung der Translation zu bestimmen, welche der Angriffspunkt der Kraft bei der Verrückung des Systems erleidet. Die Projection dieser Translation auf die Richtung der Kraft multiplicirt mit der Intensität der letzteren gibt den Werth der Elementararbeit, welche die Kraft während der betreffenden Verrückung des ganzen Systems leistet. Ist die Intensität der Kraft K, die Grösse der Translation ihres Angriffspunktes $d\tau$ und der Winkel zwischen den Richtungen von Kraft und Translation γ, so besitzt demnach die Elementararbeit der Kraft den Werth:

$$K \cos \gamma \, d\tau .$$

Es muss nun in jedem Falle Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein, die Grösse der Translation des Angriffspunktes und den Winkel γ aus den allgemeinen Coordinaten des Körpersystems zu bestimmen.

Diese Untersuchung soll zunächst im Princip für das frei bewegliche System und dann für das System angestellt werden, bei welchem der erste Körper um eine feste zu den Gelenkaxen parallele Axe drehbar ist.

A. Das frei bewegliche System.

Die Lage des Systems ist durch die fünf von einander unabhängigen Coordinaten φ_1, φ_2, φ_3, ξ_0 und ζ_0 bestimmt. Wie schon früher erläutert wurde, kann dasselbe aus einer Lage in irgend eine

unendlich benachbarte dadurch übergeführt werden, dass man successive dem System fünf Verrückungen ertheilt, bei welchen immer nur je eine der fünf Coordinaten ihren Werth ändert, während alle anderen constant bleiben.

Einer alleinigen Änderung des Winkels φ_j um $d\varphi_j$ entspricht nach den früheren Entwickelungen eine unendlich kleine Rotation des j^{ten} Körpers von der Grösse $d\varphi_j$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch den Hauptpunkt H_j, verbunden mit gleichzeitiger Translation der beiden anderen Körper.

Einer alleinigen Aenderung einer der Strecken ξ_0 und ζ_0 um $d\xi_0$ bezüglich $d\zeta_0$ entspricht eine Translation des ganzen Körpersystems von der Grösse $d\xi_0$ bezüglich $d\zeta_0$ parallel der X-Axe bezüglich Z-Axe.

Für diese fünf Verrückungen sollen die Bezeichnungen V_{φ_1}, V_{φ_2}, V_{φ_3}, V_{ξ_0} und V_{ζ_0} eingeführt werden.

1) Elementararbeiten äusserer Kräfte.

a. Allgemeine Betrachtungen: Es greife die Kraft K in einem Punkte A des ersten der drei Körper an, welcher von der durch den ersten Hauptpunkt H_1 gehenden zu den Gelenkaxen parallele Axe den Abstand a_1 besitzt (vgl. Figur 7.)

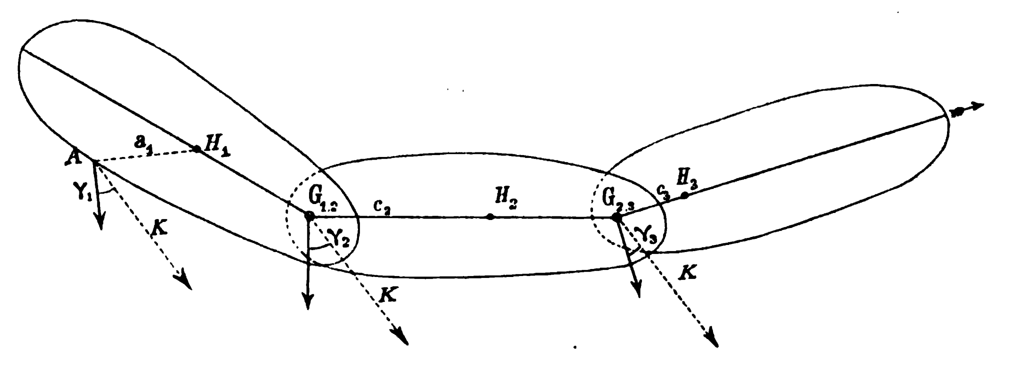


Fig. 7.

Der Angriffspunkt A erfährt bei der Verrückung V_{φ_1} eine Translation von der Grösse $a_1 d\varphi_1$. Bildet dieselbe mit der Richtung von K den Winkel γ_1, so ist die zur Verrückung V_{φ_1} gehörende Elementararbeit $K\cos\gamma_1 a_1 d\varphi_1$. Beachtet man, dass $K\cos\gamma_1 . a_1$ das Drehungsmoment D_{φ_1} der Kraft in Bezug auf die Axe durch H_1 ist, so kann

man die Elementararbeit auch in der Form schreiben $D_{\varphi_1} . d\varphi_1$. Fällt insbesondere der Angriffspunkt der Kraft mit dem Hauptpunkte H_1 zusammen, so besitzt die Elementararbeit den Werth Null.

Bei der Verrückung V_{φ_2} erfährt der Angriffspunkt A eine Translation, welche bezüglich gleich derjenigen des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ ist; dieselbe besitzt also, absolut genommen, die Grösse $c_2 d\varphi_2$. Bildet sie mit der Richtung von K den Winkel γ_2, so ist die zur Verrückung V_{φ_2} gehörende Elementararbeit der Kraft: $K \cos\gamma_2 c_2 d\varphi_2$. Dabei ist $K \cos\gamma_2 c_2$ das Drehungsmoment D_{φ_2}, welches die Kraft für die Axe durch H_2 besitzen würde, wenn sie nicht in A, sondern im Gelenkpunkte $G_{1,2}$ angriffe; man kann also auch schreiben: $D_{\varphi_2} . d\varphi_2$.

Entsprechend erhält man für die Elementararbeit, welche die Kraft bei der Verrückung V_{φ_3} leistet, den Werth $K \cos\gamma_3\ c_3 d\varphi_3$ oder $D_{\varphi_3} . d\varphi_3$, wenn man unter γ_3 den Winkel zwischen der Verrückung des Punktes $G_{2,3}$ und der Kraftrichtung, und unter D_{φ_3} das Drehungsmoment versteht, welches die Kraft für die Axe durch H_3 besitzt, wenn man ihren Angriffspunkt nach $G_{2,3}$ verlegt denkt, ohne ihre Richtung zu ändern.

Die Winkel γ_k werden sich im Allgemeinen mit der Richtung der Längsaxen ändern. Bildet insbesondere K mit der nach unten positiv gerechneten festen Verticalen einen constanten Winkel, so ist es leicht, die Winkel γ_k durch diesen Winkel und die Coordinaten φ_k darzustellen.

Wiederholt man dieselben Betrachtungen für die Fälle, wo K in einem Punkte des zweiten oder dritten Körpers angreift, so ergiebt sich allgemein der

Satz: Bei der Verrückung V_{φ_j} leistet jede am j^{ten} Körper angreifende Kraft eine Elementararbeit, welche dargestellt ist durch das Product der Zunahme $d\varphi_j$ des Winkels φ_j in das Drehungsmoment, welches die Kraft für die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch den Hauptpunkt des j^{ten} Körpers besitzt. Greift die Kraft an einem der beiden anderen Körper an, so tritt an Stelle des zweiten Factors das Drehungsmoment, welches die Kraft in Bezug auf die Axe durch H_j besitzt, wenn sie parallel mit sich nach dem ihr auf dem Linienzuge der drei Längsaxen zunächst liegenden Gelenkpunkte verlegt wird.

Die Elementararbeiten, welche eine Kraft bei den beiden Verrückungen V_{ξ_0} und V_{ζ_0} leistet, lassen sich leicht angeben, wenn man weiss, welche Winkel die Richtung der Kraft mit den beiden Coordinatenaxen bildet. Ist die Richtung der Kraft gegen die nach unten gerichtete Verticale um den Winkel ψ geneigt, so sind diese Winkel bezüglich $\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ und $(\pi - \psi)$. Infolgedessen sind die Elementararbeiten $K \sin\psi \,.\, d\xi_0$ und $-K \cos\psi \,.\, d\zeta_0$. Dabei sind $K \sin\psi$ und $-K \cos\psi$ die Componenten der Kraft K parallel den beiden Coordinatenaxen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen ist es nicht schwer, die Elementararbeiten für bestimmte Fälle anzugeben.

b. Die Elementararbeiten der Schwere: Die Wirkung der Schwere kann man sich für das Körpersystem dargestellt denken durch drei vertical nach unten gerichtete Kräfte von der Grösse $m_1 g$, $m_2 g$ und $m_3 g$, welche bezüglich in den Schwerpunkten S_1, S_2 und S_3 angreifen.

Für die Verrückung V_{φ_1} ist nach dem oben abgeleiteten Satze die Summe der Elementararbeiten der drei Kräfte

$$-m_1 g e_1 d\varphi_1 + (m_2 + m_3) g d_1 d\varphi_1 .$$

Da nach S. 25: $-m_1 e_1 + (m_2 + m_3) d_1 = 0$ ist, so verschwindet dieser Ausdruck. Die Schwere leistet also bei der Verrückung V_{φ_1} keine Arbeit.

Zu diesem Resultate gelangt man auch, wenn man berücksichtigt, dass die in S_1 angreifende Kraft $m_1 g$ sich mit den beiden anderen nach $G_{1,2}$ verlegten Kräften $m_2 g$ und $m_3 g$ zu der im Schwerpunkte des ersten reducirten Systems angreifenden Resultante $m_0 g$ zusammensetzt. Der Schwerpunkt des reducirten Systems fällt aber mit H_1 zusammen. Da H_1 bei der Verrückung V_{φ_1} fest bleibt, so besitzt die Arbeit dieser Resultante den Werth Null.

Desgleichen leistet die Schwere keine Arbeit bei den Verrückungen V_{φ_2} und V_{φ_3}.

Für die Verrückungen V_{ξ_0} und V_{ζ_0} kann das System als starr angesehen werden, und die Wirkung der Schwere stellt sich infolge-

dessen durch die einzige im Gesammtschwerpunkte S_0 angreifende, vertical nach unten gerichtete Kraft $m_0 g$ dar. Die Richtung derselben bildet mit der Translation $d\xi_0$ den Winkel $\frac{\pi}{2}$ und mit der Translation $d\zeta_0$ den Winkel π. Daher besitzt die zur Verrückung V_{ξ_0} gehörende Elementararbeit der Schwere ebenfalls den Werth Null. Es kommt also allein die Elementararbeit der Schwere für die Verrückung V_{ζ_0} in Betracht; ihre Grösse ist $-m_0 g d\zeta_0$.

2) Elementararbeiten innerer Kräfte (d. i. der Muskelkräfte).

Zwischen festen Punkten je zweier der drei Körper wirken entweder längs einer geraden Linie oder längs einer kürzesten Linie, welche über einen Vorsprung eines der beiden Körper gezwungen ist, Kräfte, welche die Länge dieser Linie zu verkürzen streben. Solche Kräfte treten an jeder Stelle immer paarweise auf, und zwar sind beide stets entgegengesetzt gleich. Eine sich contrahirende Muskelfaser ruft ein Paar solcher entgegengesetzt gleicher Kräfte hervor. Diese paarweise auftretenden Kräfte sind für das ganze Körpersystem als innere Kräfte anzusehen. Die Summe ihrer Elementararbeiten, welche sie bei den Verrückungen V_{ξ_0} und V_{ζ_0} des Gesammtschwerpunktes leisten, muss daher stets den Werth Null besitzen. Verlegt man sie beide nach dem Gesammtschwerpunkte S_0 des Systems, so heben sich in der That die beiden Kräfte auf, da sie entgegengesetzt gleich sind.

Für jeden einzelnen der drei Körper stellen die paarweise auftretenden Kräfte dagegen zwei äussere Kräfte dar, welche bei jeder der drei Verrückungen V_{φ_k} im Allgemeinen sehr verschiedene Elementararbeiten leisten. Zur Bestimmung der letzteren lassen sich direct die für die Wirkung der äusseren Kräfte gefundenen Resultate verwenden. Es kann nun ein Mal dadurch eine verschiedene Wirkungsweise bedingt sein, dass die Linie, welche die Richtung des Zugs dieser Kräfte angibt, durch zwei feste Punkte benachbarter oder nicht benachbarter Körper hindurchgeht, ein anderes Mal dadurch, dass sie zwischen diesen Punkten geradlinig ausgespannt oder durch Vorsprünge an den Körpern am geradlinigen Verlaufe gehindert ist. Für die Muskeln bedeutet dies eine Unterscheidung zwischen eingelenkigen und mehrgelenkigen Muskeln einerseits und zwischen

frei zwischen zwei Knochenpunkten oder auf dem Umwege über Knochenvorsprünge wirkenden Muskeln andererseits.

Demnach kann man für das System der drei Körper folgende Fälle unterscheiden:

a. Die beiden Kräfte wirken zwischen zwei benachbarten Körpern (eingelenkige Muskeln) und zwar

α) Die Zuglinie ist geradlinig zwischen den beiden Ansatzpunkten ausgespannt. Die Kräfte mögen zwischen dem ersten und zweiten Körper wirken; die Intensität derselben sei K. Ihre Richtungen, welche durch die Lage der beiden Ansatzpunkte A_1, A_2 (vgl. Fig. 8) bestimmt sind, verlaufen entgegengesetzt.

Aus den Betrachtungen über die Wirkungsweise äusserer Kräfte

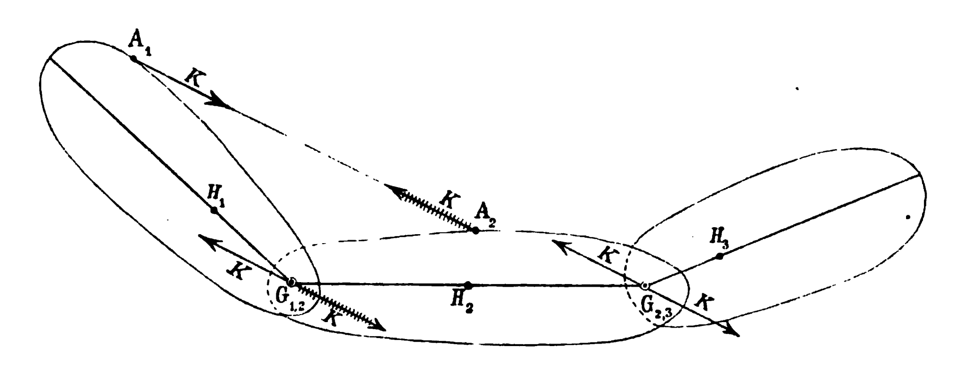


Fig. 8.

ergiebt sich, dass

für die Verrückung V_{φ_1} die in A_1 angreifende Kraft eine Elementararbeit $D'_{\varphi_1} . d\varphi_1$ leistet, wo D'_{φ_1} das Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf die Axe durch den Hauptpunkt H_1 ist, während die Elementararbeit der in A_2 angreifenden Kraft die Grösse $D''_{\varphi_1} d\varphi_1$ besitzt, wo D''_{φ_1} das Drehungsmoment bedeutet, welches dieselbe in Bezug auf die Axe durch H_1 besitzen würde, wenn man sie parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegte. Die Gesammtelementararbeit beider entgegengesetzt gleicher Kräfte ist daher

$$(D'_{\varphi_1} + D''_{\varphi_1}) d\varphi_1 .$$

Da die beiden in A_1 und $G_{1,2}$ angreifenden Kräfte entgegengesetzt gleich sind, so bilden sie ein Kräftepaar; das Moment desselben ist gleich $D'_{\varphi_1} + D''_{\varphi_1}$.

Man kann das Resultat auch so auffassen: Die beiden Drehungsmomente setzen sich zu einem einzigen D_{φ_1} zusammen, welches gleich dem Drehungsmoment ist, das die eine im Punkte A_1 des ersten Körpers angreifende Kraft für die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ besitzt.

Für die Verrückung V_{φ_1} ergibt sich in analoger Weise als Gesammtelementararbeit der beiden Kräfte das mit $d\varphi_2$ multiplicirte Moment des Kräftepaares, welches durch die in A_2 angreifende Kraft und die nach $G_{1,2}$ verlegte, ihr entgegengesetzt gleiche Kraft gebildet wird. Das letztere ist gleich dem Drehungsmoment D_{φ_2}, welches die im Punkte A_2 des zweiten Körpers angreifende Kraft in Bezug auf die Gelenkaxe $G_{1,2}$ ausübt.

Bei dem in der Figur 8 dargestellten Falle strebt das zur Verrückung V_{φ_1} gehörende Kräftepaar den Winkel φ_1 zu verkleinern, dagegen das zur Verrückung V_{φ_2} gehörende Kräftepaar den Winkel φ_2 zu vergrössern. Analytisch wird sich dies dadurch ausdrücken, dass im ersten Falle das Drehungsmoment einen negativen Werth annimmt, weil der Winkel zwischen Kraftrichtung und Translation des Punktes A_1 grösser wie $\frac{\pi}{2}$ ist.

Da für die dritte Verrückung V_{φ_3} die beiden Kräfte nach demselben Punkte, nämlich $G_{2,3}$, verlegt werden müssen, so heben sich ihre Wirkungen gegenseitig auf und die resultirende Elementararbeit ist Null.

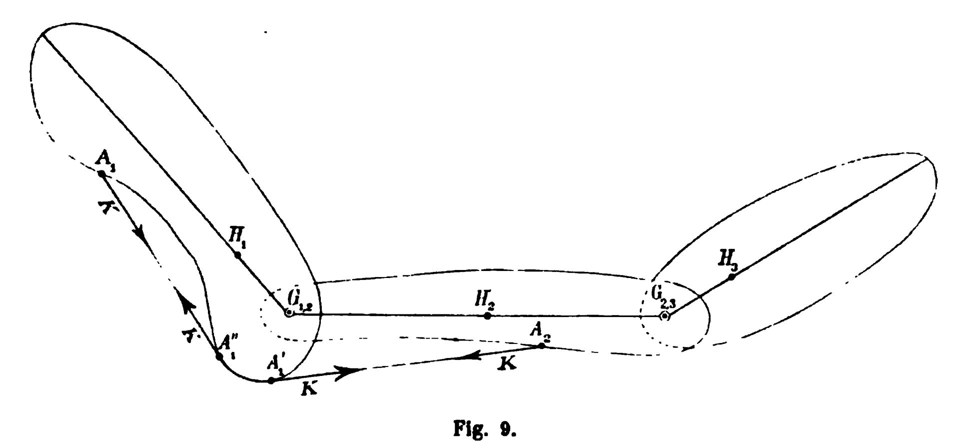


Fig. 9.

β) *Die Zuglinie läuft über einen Vorsprung des einen Körpers.* Dieser Fall lässt sich auf den ersten zurückführen. Es kommt für die Wirkung der beiden Kräfte hier nur das Stück der Zuglinie in Betracht, welches zwischen zwei Punkten der beiden Körper gerad-

linig verläuft, also in der umstehenden Figur 9 nur das Stück $A_1' A_2$. Das zwischen den beiden Punkten A_1, A_1'' bezüglich A_1' desselben Körpers verlaufende Stück kommt für die Gesammtelementararbeit der beiden Kräfte nicht in Betracht, da die beiden Drehungsmomente der in A_1 und A_1'' entgegensetzt angreifenden gleichen Kräfte sich gegenseitig in ihren Wirkungen aufheben.

Ein Unterschied zwischen dem ersten [α)] und zweiten [β)] Falle besteht nur darin, dass im ersten Falle das geradlinige Stück der Zuglinie zwischen zwei festen Punkten A_1, A_2 der beiden Körper ausgespannt war, während im zweiten Falle der eine Endpunkt A_1' dieser geradlinigen Strecke im Allgemeinen mit der Veränderung der Winkel φ_1 und φ_2 seine Lage im ersten Körper nicht beibehält. Diese Wanderung des Punktes A_1' hängt ganz von der Gestalt des ersten Körpers ab, ihre Bestimmung muss daher für jedes System von Körpern den Gegenstand einer besonderen Untersuchung bilden.

b. Die beiden Kräfte wirken zwischen zwei nicht benachbarten Körpern (mehrgelenkige Muskeln).

Da die Fälle, wo die Zuglinie sich nicht von Anfang bis zu Ende geradlinig zwischen zwei festen Punkten der beiden Körper

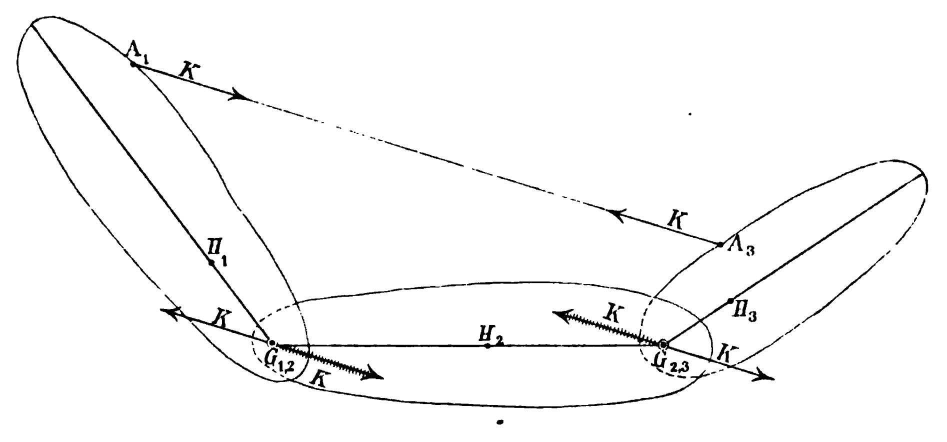


Fig. 10.

ausspannen kann, sich auf den Fall zurückführen lassen, wo die Kräfte ungehindert zwischen den beiden Ansatzpunkten wirken, so wird es nur nöthig sein, die allgemeinen Gesichtspunkte für die Behandlung dieses einen Falles aufzustellen.

Wirken beide Kräfte längs der zwischen den festen Punkten A_1

und A_3 des ersten und dritten Körpers geradlinig ausgespannten Zuglinie (Figur 10), so ergeben sich aus Betrachtungen, welche den früheren vollständig analog sind, folgende Resultate: Die Gesammtelementararbeit der beiden Kräfte ist

für die Verrückung V_{φ_1} gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Moment D_{φ_1} des Kräftepaares, welches durch die in A_1 angreifende und die ihr entgegengesetzt gleiche nach $G_{1,2}$ verlegte Kraft gebildet wird,

für die Verrückung V_{φ_2} gleich dem mit $d\varphi_2$ multiplicirten Moment des Kräftepaares, welches durch die von A_1 nach $G_{1,2}$ und die von A_3 nach $G_{2,3}$ parallel mit sich verlegten, entgegengesetzt gleichen Kräfte dargestellt ist, und endlich

für die Verrückung V_{φ_3} gleich dem mit $d\varphi_3$ multiplicirten Moment des Kräftepaares, welches durch die in A_1 angreifende Kraft einerseits und die ihr entgegengesetzt gleiche nach $G_{2,3}$ verlegte Kraft zusammengesetzt ist.

B. Das bedingt bewegliche System.

Es soll wieder der schon früher in Betracht gezogene Fall behandelt werden, bei welchem ein Punkt P_1 der ersten Längsaxe fest bleibt, so dass dem ersten Körper nur eine Bewegung um die durch diesen Punkt gehende und zu den Gelenkaxen parallele Axe gestattet ist. Man kann in diesem Falle das System aus irgend einer Stellung in eine unendlich benachbarte dadurch überführen, dass man demselben successive drei mit der Bedingung für die Bewegung verträgliche Verrückungen ertheilt, bei welchen immer nur je einer der drei Winkel eine unendlich kleine Veränderung erfährt, während die beiden anderen constant bleiben. Einer alleinigen Änderung des des Winkels φ_j und $d\varphi_j$ entspricht nach den früheren Entwickelungen eine unendlich kleine Rotation des j^{ten} Körpers von der Grösse $d\varphi_j$ um die am j^{ten} Körper befindliche Gelenkaxe, welche innerhalb des Körpersystems demjenigen Körper am nächsten liegt, dem der feste Punkt P_1 angehört, verbunden mit Translationen oder auch der Ruhe der anderen Körper. Dies gilt allgemein, mag der feste Punkt auf der Längsaxe des betreffenden Körpers liegen oder nicht, wobei die Axe durch P_1 auch unter die Gelenkaxen gerechnet sein möge.

Diese Verrückungen sollen wieder mit V_{φ_j} bezeichnet sein.

1. Elementararbeiten äusserer Kräfte.

a. Allgemeine Betrachtungen: Obgleich diese Fälle sich durch die gleichen Betrachtungen, mutatis mutandis, erledigen lassen, wie die Fälle vollkommen freier Beweglichkeit, so soll doch etwas ausführlicher auf sie eingegangen werden, als es vielleicht unbedingt nöthig erscheint, weil gerade die bedingte Bewegung beim menschlichen Körper die Regel ist, während die ganz freie Bewegung nur seltener, z. B. beim Sprung, vorkommt.

Greift eine Kraft K im Punkte A des ersten Körpers (Fig. 11)

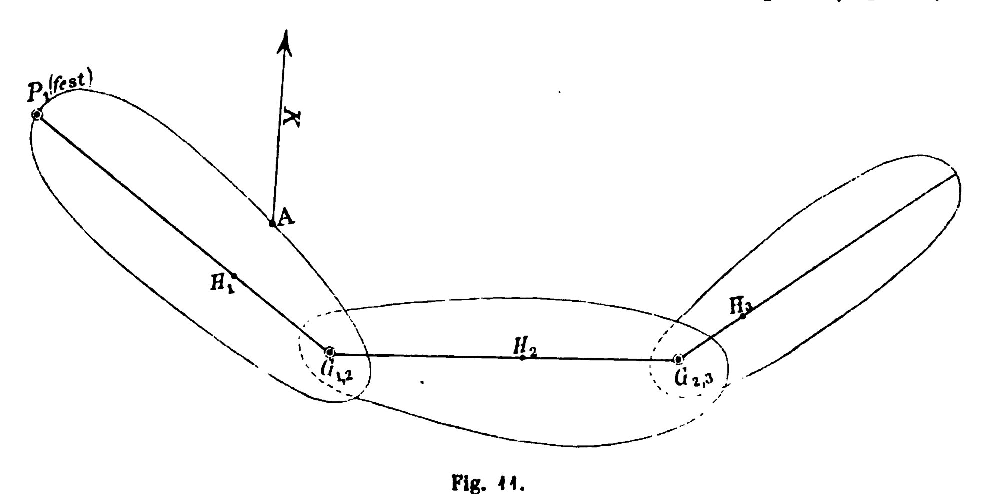


Fig. 11.

an, so kommt zu der Elementararbeit, welche sie bei der unendlich kleinen Drehung $d\varphi_1$ um den Hauptpunkt H_1 leistete, jetzt noch die Elementararbeit hinzu, welche aus der Verrückung des Hauptpunktes hervorgeht. Dieser letztere Bestandtheil ist nach dem Früheren gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die Kraft, wenn man sie parallel mit sich nach dem Hauptpunkte H_1 verlegte, in Bezug auf die Axe durch P_1 leisten würde. Der erste Bestandtheil der Gesammtelementararbeit war gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf die Axe durch H_1. Beide Drehungsmomente setzen sich zu dem einen Drehungsmoment zusammen, welches die Kraft bei der thatsächlichen Lage des Angriffspunktes in Bezug auf die Axe durch P_1 besitzt. Die Gesammtelementararbeit derselben ist daher bei der Verrückung V_{φ_1} gleich dem Product aus diesem resultirenden Drehungsmoment und der Grösse $d\varphi_1$.

Da der Hauptpunkt H_1 in dem Endresultat nicht mehr vorkommt, so muss man zu dem letzteren auch auf directem Wege gelangen können, ohne erst den Umweg über den Hauptpunkt zu machen; dies lässt sich leicht bestätigen.

Bei den Verrückungen V_{φ_2} und V_{φ_3} bleibt jetzt der erste Körper fest, und die Kraft leistet daher keine Arbeit.

Greift die Kraft K in einem Punkte A des zweiten Körpers an, so leistet sie bei der Verrückung V_{φ_1} dieselbe Elementararbeit, als wenn sie in $G_{1,2}$ angriffe; die Grösse der letzteren ist also gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die Kraft in Bezug auf die Axe durch P_1 besitzt, wenn man sie parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegt.

Zu der Verrückung V_{φ_2} gehört eine Elementararbeit der Kraft, welche gleich dem mit $d\varphi_2$ multiplicirten Drehungsmoment derselben in Bezug auf die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ ist.

Bei der Verrückung V_{φ_3} bleiben die beiden ersten Körper vollständig in Ruhe, da die Bedingung, dass der Punkt P_1 des ersten Körpers fest bleibt, auch eine Translation verbietet. Infolgedessen leistet die am zweiten Körper angreifende Kraft keine Elementararbeit.

Hat endlich die Kraft ihren Angriffspunkt am dritten Körper, so ist ihre Elementarbeit

für die Verrückung V_{φ_1} gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment, welches sie in Bezug auf die Axe durch P_1 besitzen würde, wenn man ihren Angriffspunkt nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegte,

für die Verrückung V_{φ_2} gleich dem mit $d\varphi_2$ multiciplirten Drehungsmoment, welches sie in Bezug auf die Axe durch $G_{1,2}$ besitzen würde, wenn man sie parallel mit sich nach $G_{2,3}$ verlegte, und

für die Verrückung V_{φ_3} gleich dem mit $d\varphi_3$ multiplicirten Drehungsmoment, welches dieselbe für die Gelenkaxe durch $G_{2,3}$ besitzt.

Diese sämmtlichen Resultate behalten ihre Gültigkeit, wenn der Punkt P_1 ausserhalb der Längsaxe des ersten Körpers liegt.

Ganz entsprechende Resultate ergeben sich, wenn nicht ein Punkt des ersten Körpers, sondern eines der beiden anderen Körper festbleibt. Man gelangt auf diese Weise zu folgenden allgemeinen Sätzen:

1. **Satz.** Greift eine Kraft K an demjenigen (h^{ten}) Körper an, welchem der feste Punkt P_h angehört, so ist die Ele-

mentararbeit derselben bei der Verrückung V_{φ_h}, welche allein die Richtung der Längsaxe dieses Körpers ändert, gleich dem mit $d\varphi_h$ multiplicirten Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf die Axe durch P_h. Bei den übrigen Verrückungen leistet die Kraft in diesem Falle keine Arbeit.

2: **Satz.** Greift die Kraft K an einem der Körper an, welchem der feste Punkt P_h nicht angehört, so ist die Elementararbeit derselben bei der Verrückung V_{φ_h} gleich dem mit $d\varphi_h$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die Kraft in Bezug auf die Axe durch P_h besitzt, wenn ihr Angriffspunkt nach demjenigen Gelenkpunkte des h^{ten} Körpers verlegt wird, welcher innerhalb des Körpersystems dem Angriffspunkte der Kraft am nächsten liegt. Bei der Verrückung, welche einer unendlich kleinen Rotation desjenigen Körpers entspricht, an welchem die Kraft angreift, leistet dieselbe eine Elementararbeit gleich dem Product aus der entsprechenden Winkeländerung $d\varphi$ in das Drehungsmoment, welches die Kraft für diejenige Gelenkaxe desselben Körpers besitzt, die im Innern des Systems dem Punkte P_h am nächsten liegt. Für die dritte Verrückung V_{φ_j} endlich kommt in Frage, ob der j^{te} Körper im Innern des Systems dem festen Punkte P_h näher oder entfernter liegt als der Körper, an welchem die Kraft angreift. Im ersteren Falle ist die Elementararbeit gleich dem mit $d\varphi_j$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die Kraft in Bezug auf die dem Punkte P_h näher liegende Gelenkaxe des j^{ten} Körpers besitzt, wenn man ihren Angriffspunkt nach dem dem Punkte P_h entfernteren Gelenkpunkte des j^{ten} Körpers verlegt; im letzteren Falle leistet die Kraft dagegen keine Arbeit.

b. Elementararbeiten der Schwere. Denkt man sich wieder die Wirkung der Schwere durch die drei in den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 angreifenden und vertical nach unten gerichteten Kräfte $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$ dargestellt, so hat man für die Verrückung V_{φ_1} die beiden letzteren der drei Kräfte nach $G_{1,2}$ zu verlegen. Die drei jetzt am ersten Körper allein angreifenden Kräfte setzen sich zusammen zu der ebenfalls vertical nach unten gerichteten Resul-

tante $m_0 g$, deren Angriffspunkt in den Hauptpunkt H_1 als den Schwerpunkt des ersten reducirten Systems hineinfällt. In Folge dessen ist die gesammte Elementararbeit der Schwere bei der Verrückung V_{φ_1} gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die im Hauptpunkte H_1 angreifende Resultante $m_0 g$ in Bezug auf die Axe durch den festen Punkt P_1 ausübt.

Analog ergibt sich, dass die Elementararbeit der Schwere für die Verrückungen V_{φ_2} bezüglich V_{φ_3} gleich dem mit $d\varphi_2$ bezüglich $d\varphi_3$ multiplicirten Drehungsmoment ist, welches die im Hauptpunkte H_2 bezüglich H_3 angreifende Kraft von der Grösse $m_0 g$ auf die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ bezüglich durch $G_{2,3}$ ausübt.

Man erkennt daraus von Neuem, welche wichtige Bedeutung die Hauptpunkte für das ganze Problem besitzen.

2) Elementararbeiten innerer Kräfte.

Es lässt sich leicht zeigen, dass das Festhalten des Punktes P_1 an den Elementararbeiten der für das frei bewegliche System betrachteten inneren Kräfte keine Aenderung hervorbringt. Es lassen sich also die für das freie System gefundenen Resultate direct auf den Fall der bedingten Beweglichkeit übertragen.

Ein Beispiel mag dies erläutern.

In dem durch Figur 8 auf S. 44 versinnlichten Falle würde bei Festhaltung eines Punktes P_1 des ersten Körpers die Gesammtelementararbeit der beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte K sich darstellen als das Product der Grösse $d\varphi_1$ in die Summe der Drehungsmomente, welche die in A_1 angreifende und die ihr entgegengesetzt gleiche im Punkte $G_{1,2}$ angreifende Kraft in Bezug auf die Axe durch P_1 ausüben. Die beiden Drehungsmomente haben in diesem Falle verschiedenes Vorzeichen oder gleiches, je nachdem der Punkt P_1 ausserhalb oder innerhalb des durch die beiden Kraftrichtungen gebildeten Flächenstreifens fällt. Man erkennt leicht, dass ihre algebraische Summe wie beim frei beweglichen System gleich dem Moment des Kräftepaares ist, welches durch die beiden Kräfte gebildet wird. Bei dem durch Figur 8 dargestellten Falle sucht das Kräftepaar ebenfalls den Winkel φ_1 zu verkleinern; dies geht schon daraus hervor, dass das Drehungsmoment der nach $G_{1,2}$ verlegten Kraft über dasjenige der in A_1 direct angreifenden Kraft überwiegt.

III. Die Beziehungen zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft und den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte.

Die Beziehungen, welche zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft des in Bewegung begriffenen Körpersystems einerseits und den Elementararbeiten der sämmtlichen äusseren und inneren Kräfte andererseits bestehen, sind gegeben durch die bestimmten Differentialgleichungen der Bewegung in der von Lagrange herrührenden Form, bei der die rechtwinkligen Coordinaten durch allgemeine Coordinaten ersetzt sind, welche die Lage des Systems vollständig bestimmen.

Für das zunächst in Betracht gezogene Körpersystem stellen die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 in Verbindung mit den variabelen Coordinaten ξ_0, ζ_0 des Gesammtschwerpunktes bei freier Beweglichkeit des Systems oder den constanten Coordinaten x_1, z_1 des festbleibenden Punktes P_1 in dem betrachteten Falle bedingter Beweglichkeit ein solches System allgemeiner Coordinaten dar, durch welches die Lage und Gestalt des Körpersystems eindeutig bestimmt ist.

Das System der fünf Differentialgleichungen der Bewegung lautet für den Fall freier Beweglichkeit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} = Q_{\varphi_h} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_0} = Q_{\xi_0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_0} = Q_{\zeta_0}.$$

Für den in Betracht gezogenen Fall bedingter Beweglichkeit kommen die beiden letzten Gleichungen in Wegfall. Es treten auch keine neuen hinzu, da die Coordinaten x_1, z_1 des festbleibenden Punktes constante Grössen sind, so dass schon die drei ersten Differentialgleichungen das vollständige System der Bewegungsgleichungen darstellen.

Die Ausführung der Differentiationen bei dem auf S. 32 niedergelegten Ausdrucke für die gesammte lebendige Kraft des Systems

bei freier Beweglichkeit ergibt zunächst für die linke Seite der ersten Differentialgleichung den Werth:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = m_0 \left\{ k_1^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - f_{12}f_{21} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - f_{13}f_{31} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} \right.$$
$$\left. - f_{12}f_{21} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 - f_{13}f_{31} \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \left(\frac{d\varphi_3}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Die Werthe der Grössen f sind aus der Tabelle auf S. 26 zu ersehen.

Man kann den Ausdruck auch in der kürzeren Form schreiben:

$$m_0 \left\{ \sigma_1^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \sum_1^3{}' f_{1j} f_{j1} \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_j) \frac{d^2\varphi_j}{dt^2} + \sin(\varphi_1 - \varphi_j) \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 \right] \right\},$$

wobei unter σ_1 der Trägheitsradius des ersten reducirten Systems in Bezug auf die durch den Einzelschwerpunkt S_1 gehende Axe bedeutet. Die Richtigkeit dieses Resultates erkennt man, wenn man beachtet, dass nach der Bedeutung von σ_1 stattfinden muss

$$\sigma_1^2 = k_1^2 + e_1^2 = k_1^2 + f_{11}^2$$

und dass $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ ist.

Die Zweckmässigkeit dieser letzteren Schreibweise erhellt ganz besonders daraus, dass dieser Ausdruck, wovon man sich leicht überzeugt, auch zugleich den Werth von

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_3'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3}$$

darstellt, wenn man in ihm den Index 1 bezüglich durch 2 oder 3 ersetzt.

Ferner ist nun

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_0} = m_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_0} = m_0 \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}.$$

Man hat daher das System der Differentialgleichungen:

$$m_0 \left\{ \sigma_h^2 \frac{d^2\varphi_h}{dt^2} - \sum_1^3{}' f_{hj} f_{jh} \left[\cos(\varphi_h - \varphi_j) \frac{d^2\varphi_j}{dt^2} + \sin(\varphi_h - \varphi_j) \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 \right] \right\} = Q_{\varphi_h},$$
$$(h = 1, 2, 3)$$

$$m_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} = Q_{\xi_0} \quad \text{und} \quad m_0 \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = Q_{\zeta_0}.$$

Die Grössen Q_{φ_h}, Q_{ξ_0} und Q_{ζ_0} hängen sehr eng mit den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte zusammen. $Q_{\varphi_h} d\varphi_h$ bedeutet

die Summe der Elementararbeiten sämmtlicher äusserer und innerer Kräfte für die Verrückung V_{φ_h}, und $Q_{\xi_0}\, d\xi_0$ bezüglich $Q_{\zeta_0}\, d\zeta_0$ bedeutet die Summe der Elementararbeiten der äusseren Kräfte allein für die Verrückung V_{ξ_0} bezüglich V_{ζ_0}.

Nach den früheren Entwickelungen stellen daher die Grössen Q_{φ_h} durchweg Drehungsmomente und die Grössen Q_{ξ_0}, Q_{ζ_0} die Componentensummen der äusseren Kräfte parallel der X-Axe bezüglich parallel der Z-Axe dar.

Sind insbesondere ausser der Schwere keine äusseren Kräfte vorhanden, so ist $Q_{\xi_0} = 0$, $Q_{\zeta_0} = -m_0 g$, während jede der Grössen Q_{φ_h} die Summe der Momente aller Kräftepaare darstellt, welche dadurch entstehen, dass man zu den am h^{ten} Körper selbst angreifenden Kräften die anderen noch auftretenden Kräfte in der Weise hinzufügt, dass man jede derselben parallel mit sich nach demjenigen Gelenkmittelpunkte des h^{ten} Körpers verlegt, welcher ihrem Angriffspunkte innerhalb des Körpersystems am nächsten liegt.

Für den Fall, dass ein Punkt P_1 auf der Längsaxe des ersten Körpers festliegt, so dass der erste Körper nur Drehungen um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch P_1 ausführen kann, erhält man unter Benutzung des auf S. 36 niedergelegten Werthes für T die drei Differentialgleichungen:

$$m_0\left[\lambda_1^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + l_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + l_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + l_1 c_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 + l_1 c_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \left(\frac{d\varphi_3}{dt}\right)^2\right] = Q_{\varphi_1}$$

$$m_0\left[\lambda_2^2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + l_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + l_2 c_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \left(\frac{d\varphi_3}{dt}\right)^2 + l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2\right] = Q_{\varphi_2}$$

$$m_0\left[\lambda_3^2 \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + l_1 c_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + l_2 c_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + l_1 c_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + l_2 c_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right] = Q_{\varphi_3}.$$

Jede der Grössen Q_{φ_h} bedeutet jetzt die Summe der Drehungsmomente, welche sämmtliche am Körper angreifenden äusseren und inneren Kräfte in Bezug auf die Axe bezüglich durch P_1, $G_{1,2}$ oder $G_{2,3}$ ausüben, nachdem alle diejenigen, welche nicht direct am h^{ten} Körper

angreifen, parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte verlegt worden sind, der ihnen innerhalb des Körpersystems am h^{ten} Körper am nächsten liegt. Die Drehungsmomente zweier zusammengehöriger innerer Kräfte setzen sich dabei immer zum Moment eines Kräftepaares zusammen.

Hat man sich nun auf empirischem Wege eine eingehende Kenntniss der bei den einzelnen Körpern des Systems auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen verschafft, und kennt man ausserdem die wirksamen äusseren Kräfte, so kann man nicht nur für jeden Zeitmoment die Werthe der linken Seiten aller dieser Bewegungsgleichungen berechnen, sondern man kann auch den numerischen Werth des Bestandtheiles der rechten Seite angeben, welcher von den äusseren Kräften herrührt. Es bleibt infolgedessen in jeder dieser Gleichungen auf der rechten Seite nur noch das betreffende Gesammtdrehungsmoment der inneren Kräfte als Unbekannte übrig. Man ist daher in den Stand gesetzt, den zu jeder der Verrückungsarten V_{φ_h}, bezüglich V_{ξ_0} und V_{ζ_0} gehörenden Werth des resultirenden Drehungsmomentes der inneren Kräfte für den ganzen Verlauf der Bewegung anzugeben.

Kommen nur drei verschiedene Paare innerer Kräfte (Muskelkräfte) vor, so kann man darauf ohne Weiteres auch den Antheil bestimmen, den jedes derselben an der Hervorbringung des resultirenden Drehungsmomentes besitzt. Hat man mehr wie drei Paare von Kräften, so muss man zu dieser letzteren Bestimmung noch ein Princip, wie das der kleinsten Anstrengung, zu Hülfe nehmen.

Damit ist im Princip dieser einfache Fall der Bewegungen eines Systems von drei durch Gelenke mit einander verbundenen Körpern erledigt. Die bei demselben gewonnenen Methoden für die Aufstellung der einzelnen Bestandtheile der Bewegungsgleichungen lassen sich, mutatis mutandis, auf die viel verwickelteren Systeme, wie sie der menschliche Körper oder die Körper der Thiere darstellen, anwenden. Gewisse Bewegungen der letzteren, bei welchen nur zwei oder drei zusammenhängende Glieder ihre Lage zu einander verändern, wie z. B. die Bewegung eines frei herabhängenden Beins parallel der Medianebene des Menschen infolge beliebiger Contraction der Muskeln sind durch den behandelten Fall schon vollständig erledigt.

IV. Die lebendige Kraft des menschlichen Körpers.

Wenn der menschliche Körper für die Mechanik greifbar werden soll, so muss man gewisse Voraussetzungen und Einschränkungen in Bezug auf seine Zusammensetzungen machen, welche der Wirklichkeit nicht vollständig entsprechen. Wenn man z. B. die Wirkungsweise von Muskeln untersuchen will, welche zwischen grösseren Körpertheilen ausgespannt sind, so kann man diese Aufgabe nur dadurch für die Mechanik lösbar gestalten, dass man erstens von der Deformation der Körpertheile infolge der Contraction der Muskeln oder infolge anderer Einflüsse, wie Blutstrom u. s. w. absieht und die Glieder als starre Massen auffasst, und dass man zweitens über die Wirkungsweise der Muskeln gewisse, nicht streng realisirte Voraussetzungen macht, wie das Vorhandensein einer Resultante für den ganzen Muskel oder wenigstens für bestimmte Muskelpartien, geradliniger Verlauf dieser Resultante entweder direct zwischen zwei Knochenpunkten oder auf dem Umwege über Knochenvorsprünge, Sehnenrollen u. s. w. Die Zerlegung des Körpers in einzelne starre Massen ist im Allgemeinen gegeben durch die Gelenke. Es hängt nun ganz von der Art der zu untersuchenden Bewegung ab, wie weit man die Zerlegung in starre Massen vorzunehmen hat. So kommt beispielsweise für die Bewegungen des Gehens und Laufens die Beweglichkeit der Fingerglieder, ja selbst die Beweglichkeit der Hand gegen den Unterarm nicht in Betracht. Man kann daher in diesen Fällen den Unterarm mit der Hand zusammen als eine starre Masse auffassen. Wollte man dagegen die Bewegungen eines Clavierspielers untersuchen, so könnte man vom mechanischen Standpunkte aus andererseits unbedenklich den ganzen Körper mit Ausnahme der Arme als eine starre Masse ansehen; dagegen hätte man auf die Bewegungen in den Arm-, Hand- und Fingergelenken das Hauptgewicht zu legen. Beim Gehen oder Laufen kann man ferner mit grosser Annäherung auch den Rumpf als eine starre Masse ansehen, obgleich derselbe während des Athmens fortwährend seine Form ändert, ja man kann bei dieser Bewegungsart sogar den Schultergürtel und den Kopf als starr mit dem Rumpfe verbunden auffassen. Wenn auch der Schultergürtel

und der Kopf gewöhnlich beim Gehen etwas gegen den Rumpf verrückt werden, so sind diese Bewegungen für die Fortbewegung des ganzen Körpers nicht unbedingt erforderlich. Unterdrückt man dieselben, was beim Militär besonders geübt wird, so wird dadurch weder die Möglichkeit noch die Art des Gehens wesentlich beeinflusst. Man könnte endlich für den Gang sogar die Arme zum Rumpfe feststellen und mit grosser Annäherung den Rumpf mit dem Kopfe und den Armen zu einer einzigen starren Masse zusammennehmen. Dadurch würde sich die mechanische Aufgabe wesentlich vereinfachen. Für andere Bewegungsarten, wie z. B. das Schwimmen, kommt andererseits gerade die Beweglichkeit der Arme in Frage und man könnte in diesem Falle etwa nur den Kopf gegen den Rumpf feststellen.

Es lässt sich daher von vornherein keine für alle Fälle gleichwerthige Zergliederung des menschlichen Körpers in einzelne starre Massen angeben. Dieselbe richtet sich jedesmal nach der besonderen Art der zu untersuchenden Bewegung.

Für viele im Leben häufiger vorkommende Bewegungen ist die Zerlegung des ganzen Körpers in folgende 12 als starre Massen zu behandelnden Theile ausreichend:

Rumpf (1), rechter Oberschenkel (2), linker Oberschenkel (3), rechter Unterschenkel (4), linker Unterschenkel (5), rechter Fuss (6), linker Fuss (7), rechter Oberarm (8), linker Oberarm (9), rechter Unterarm mit Hand (10), linker Unterarm mit Hand (11) und Kopf (12).

Dabei soll der Schultergürtel fest zum Rumpfe angenommen werden und einen Theil desselben ausmachen.

Da für jeden dieser 12 Körperabschnitte sowohl die Masse und die Lage des Schwerpunktes[1]) als auch die Grösse der drei Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes[2]) früher von uns bestimmt worden sind, so stellen dieselben im mechanischen Sinne vollständig bekannte Massen dar und können daher als Object der Bewegung in Betracht gezogen werden.

Für die Behandlung von Bewegungen des menschlichen Körpers, welche eine weitergehende Zergliederung desselben zur Voraussetzung haben, würde es sich dagegen nöthig machen, erst noch kleinere

1) Abhandl. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XV.
2) Abhandl. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XVIII.

Theile des Körpers auf ihre Masse, Massenvertheilung und Trägheitsmomente zu untersuchen.

In der folgenden Darlegung soll nun oft für die einzelnen Körperabschnitte die in Klammer beigesetzte Nummerirung verwendet werden. Ferner soll als Längsaxe des Körperabschnittes oder Gliedes eingeführt sein: bei den durch zwei Gelenke begrenzten Extremitätenabschnitten (2, 3, 4, 5, 8, 9) die Verbindungslinie der beiden Gelenkmittelpunkte, bei den Endkörpertheilen (6, 7, 10, 11, 12) die Verbindungslinie des Gelenkmittelpunktes mit dem Einzelschwerpunkt, und beim Rumpf (1) die Verbindungslinie des Mittelpunktes vom Atlanto-occipitalgelenk mit der Mitte der Hüftaxe. Der Schwerpunkt des h^{ten} Gliedes, welcher nach unseren früheren Untersuchungen immer mit grosser Annäherung in der Längsaxe des Gliedes liegt, soll mit S_h, der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers mit S_0 und der Mittelpunkt des Gelenkes, welches das i^{te} und k^{te} Glied mit einander verbindet, mit $G_{i,k}$ bezeichnet sein. Demnach erhält man die in der Figur auf Tafel I eingetragenen Bezeichnungen für die einzelnen Schwerpunkte und Gelenkmittelpunkte.

Um die Lage eines jeden der 12 Körpertheile im Raume zu bestimmen, sind im Allgemeinen 6 Coordinaten erforderlich. Es empfiehlt sich, dazu die 3 rechtwinkligen Coordinaten eines zum Körpertheil festen Punktes und drei Winkel φ, ϑ, ϱ zu verwenden. Von den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen sei die Z-Axe vertical und nach oben positiv gerichtet, dann liegen die X-Axe und Y-Axe in einer Horizontalebene. Es soll φ den Winkel bedeuten zwischen der Längsaxe des Gliedes und einer nach unten positiv zu rechnenden Verticalen, ϑ den Winkel zwischen der durch die Längsaxe gehenden Verticalebene und einer im Raume festen Verticalebene, welche mit der YZ-Ebene des Coordinatensystems parallel laufen möge.

Zur Feststellung der Bedeutung des dritten Winkels ϱ soll Folgendes verabredet sein: Als Normalstellung des menschlichen Körpers soll diejenige bezeichnet werden, welche der Körper einnimmt, wenn alle Längsaxen mit Ausnahme derer der beiden Füsse vertical gerichtet sind und in einer einzigen zur YZ-Ebene parallelen Verticalebene liegen. Setzt man dann noch fest, dass bestimmte zu den einzelnen Körpertheilen feste Ebenen durch die Längsaxen (Frontalebenen) mit dieser Verticalebene zusammenfallen, dass die

Arme herabhängen, und dass die durch die Längsaxen der Füsse gelegten Verticalebenen (Sagitalebenen) auf der YZ-Ebene senkrecht stehen, so ist bei der eigenthümlichen Art der Gelenkverbindungen und der Freiheit der Gelenkbewegungen damit eine feste Stellung des Körpers eindeutig bestimmt; dies die Normalstellung. In unserer Arbeit über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers haben wir gezeigt, dass der Körper auch wirklich im Stande ist, diese Stellung einzunehmen. Es kann nun die Längsaxe eines jeden Körpertheils aus ihrer Lage in der Normalstellung in die neue dadurch übergeführt werden, dass der ganze Körpertheil um eine horizontale Axe $\mathfrak{A}_\varphi$, welche mit der festen Verticalebene den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$ bildet, um den Winkel φ gedreht wird. Dabei wird im Allgemeinen die Ebene des Körpertheils, welche in der Normalstellung parallel der YZ-Ebene verlief, um die Längsaxe eine Drehung ausgeführt haben. Die Grösse dieser Drehung, welche man als Rollung des Körpertheils zu bezeichnen pflegt, soll durch den Winkel ϱ dargestellt sein.

Zur Unterscheidung der zu den verschiedenen Gliedern gehörenden Winkel φ, ϑ, ϱ soll denselben immer die Nummer des Gliedes als Index beigegeben werden.

Da 12 Glieder in Betracht kommen, so würden demnach zur Bestimmung der Lage aller Glieder im Raume 72 Coordinaten gehören. Diese sind aber nicht alle von einander unabhängig. Es ist leicht ersichtlich, dass infolge der Gelenkverbindungen die Haltung des Körpers und seine Lage im Raume schon durch 39 Coordinaten vollständig bestimmt ist, nämlich durch die 36 Winkel φ, ϑ, ϱ und drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z für irgend einen Punkt des Gesammtkörpers. Letzterer braucht nicht unbedingt fest zu irgend einem Gliede zu liegen; es genügt, wenn seine Lage für jede Haltung des Körpers eindeutig bestimmt ist. Dies ist z. B. für den Gesammtschwerpunkt S_0 der Fall.

Die 36 Winkelcoordinaten sind genau genommen nur dann von einander unabhängig, wenn jedes Gelenk zwischen zwei Gliedern drei Grade der Freiheit besitzt. Jede Beschränkung der Beweglichkeit im Gelenk, sei sie durch die besondere Form der Gelenkflächen, durch Arretirungen oder durch die besondere Art der gleichzeitigen Innervation der auf das Gelenk wirkenden Muskeln hervorgerufen,

bedingt eine Abhängigkeit zwischen den Winkelgrössen der betreffenden Glieder und vermindert infolgedessen die Zahl der unabhängigen Coordinaten. Da diese Verhältnisse zum Theil noch nicht genügend aufgeklärt sind, so können sie vorläufig noch keine Berücksichtigung erfahren, und es sollen für's Erste die Grössen φ, ϑ, ϱ als von einander unabhängig behandelt werden.

Die lebendige Kraft des menschlichen Körpers muss sich dann als Function der Grössen φ, ϑ, ϱ, φ', ϑ', ϱ' und der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes, bezüglich eines anderen für die Bewegung bevorzugten Punktes, und deren Abgeleiteten darstellen lassen. Die Grössen φ', ϑ', ϱ' bedeuten die Winkelgeschwindigkeiten $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d\varrho}{dt}$.

Die Ableitung des Ausdruckes für die lebendige Kraft kann auf ganz entsprechende Weise geschehen wie für das System der drei Körper. Es ist dabei Folgendes zu beachten:

Man kann bei festgehaltenem Gesammtschwerpunkt den Körper aus einer Stellung in eine unendlich benachbarte dadurch überführen, dass man dem ganzen System successive unendlich kleine Verrückungen ertheilt, bei welchen jeweilig nur die drei Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j für ein Glied (j^{tes} Glied) geändert werden, während die zu den übrigen Gliedern gehörenden Winkel constant bleiben. Bei einer solchen Verrückung erfährt das j^{te} Glied eine unendlich kleine Rotation um irgend eine Axe, während die anderen Glieder gleichzeitig nur Translationen ausführen können.

Es gilt nun folgender

Satz: Die Axe dieser Rotation muss, unabhängig von ihrer Richtung, immer durch einen zum j^{ten} Gliede festen Punkt hindurchgehen, wenn der Gesammtschwerpunkt des Körpers während der Verrückung an seiner Stelle bleiben soll. Dieser Punkt, für welchen der Name **Hauptpunkt des j^{ten} Gliedes** eingeführt sein soll, fällt zusammen mit dem Schwerpunkte eines Systems, welches man erhält, indem man zu der Masse des j^{ten} Gliedes die Massen aller anderen Glieder des menschlichen Körpers in der Weise hinzufügt, dass man in dem Mittelpunkte eines jeden am

j^{ten} Gliede befindlichen Gelenkes die Massen aller der Glieder vereinigt annimmt, welche durch dieses Gelenk mit dem j^{ten} Gliede in mittelbarer oder unmittelbarer Verbindung stehen.

Letzteres fingirte Massensystem, welches, wie man aus der Betrachtung des voraufgeschickten einfachen Falles weiss, für das Problem der Bewegung des menschlichen Körpers oder ähnlich zusammengesetzter Massensysteme eine wichtige Rolle spielt, soll wie früher den Namen »j^{tes} reducirtes System« führen. An Stelle der Nummer soll sehr oft auch, der besseren Anschaulichkeit halber, der Name des Gliedes verwendet werden. Es ist also z. B 1tes reducirtes System und »reducirtes Rumpfsystem« dasselbe. Die Masse eines jeden reducirten Systems stimmt überein mit der Gesammtmasse des Körpers.

Dieser Satz ist die directe Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes vom Dreikörpersystem für eine grössere Anzahl durch Gelenke verbundener Körper und für beliebige Richtung der Rotationsaxe. Der Beweis desselben soll aus diesem Grunde nicht wieder in der früheren Form ausführlich mitgetheilt werden, da die Anleitung zu demselben im Princip durch die früheren Entwickelungen gegeben ist. Es soll dagegen an dieser Stelle gezeigt werden, wie man den Satz noch auf andere Art, ohne alle Rechnung, beweisen kann:

Es möge zunächst dem j^{ten} Gliede eine unendlich kleine Rotation um irgend eine Axe durch seinen Einzelschwerpunkt S_j ertheilt werden. Dabei können die anderen Glieder infolge des Zusammenhangs zwischen den einzelnen Körpertheilen nicht in Ruhe bleiben. Da ihre Bewegung aber nur in einer Translation bestehen darf, so ist klar, dass die Translation eines jeden der 11 anderen Glieder übereinstimmt mit der Translation des am j^{ten} Gliede befindlichen Gelenkmittelpunktes, welcher die Verbindung zwischen diesem und dem j^{ten} Gliede darstellt. Handelt es sich z. B. um eine unendlich kleine Rotation $d\omega$ des rechten Oberschenkels um eine Axe durch seinen Schwerpunkt S_2, so werden alle Glieder, welche durch das rechte Kniegelenk mit dem rechten Oberschenkel in Verbindung stehen (rechter Unterschenkel und rechter Fuss) eine unendlich kleine Translation erfahren, welche übereinstimmt mit der Translation des Kniegelenkmittelpunktes.

Alle anderen Glieder sind Translationen unterworfen, welche gleich der Translation des rechten Hüftgelenkmittelpunktes sind.

Es soll nun mit S' der gemeinsame Schwerpunkt für alle Glieder jenseits des Hüftgelenks und mit S'' der gemeinsame Schwerpunkt für die beiden Glieder jenseits des Kniegelenks bezeichnet werden.

Die Translation des Schwerpunktes S' ist unabhängig von der Stellung der einzelnen Glieder jenseits des Hüftgelenks zu einander; sie würde also dieselbe bleiben, wenn man diesen Gliedern eine solche Stellung zu einander ertheilen könnte, bei welcher der Schwerpunkt S' gerade in den Mittelpunkt $G_{1,2}$ des Hüftgelenks hineinfällt. Desgleichen könnte der gemeinsame Schwerpunkt S'' der Glieder jenseits des Kniegelenks in den Mittelpunkt $G_{2,4}$ des Kniegelenks fallen, ohne dass dadurch die Translation desselben beeinflusst würde. Der Gesammtschwerpunkt des ganzen Körpers würde aber dann auch mit einem im Oberschenkel festen Punkte zusammenfallen, nämlich gerade mit dem Schwerpunkte H_2 desjenigen Massensystems, welches man erhält, wenn man im Hüftgelenkmittelpunkt einerseits und im Kniegelenkmittelpunkt andererseits die Massen aller durch diese beiden Gelenke mit dem Oberschenkel in Verbindung stehenden Glieder vereinigt annimmt. Für dieses fingirte Massensystem ist die Bezeichnung »2tes reducirtes System« oder auch »reducirtes Oberschenkelsystem« und für den Schwerpunkt H_2 desselben die Bezeichnung »Hauptpunkt des Oberschenkels« eingeführt worden. Soll nun der Gesammtschwerpunkt während der Verrückung des ganzen Körpers fest bleiben, so darf auch der Hauptpunkt H_2 seinen Ort nicht verändern; es muss daher die Axe der Rotation stets durch denselben hindurchgehen.

Entsprechendes gilt natürlich auch, wenn das bevorzugte Glied, welchem bei der Verrückung des ganzen Körpers jeweils allein eine Rotation gestattet ist, durch mehr als zwei Gelenke mit den übrigen Gliedern verbunden ist. Im Körper existirt ein solches Glied, nämlich der Rumpf. Auch in diesem gibt es daher einen Hauptpunkt; derselbe ist wieder identisch mit dem Schwerpunkte des reducirten Rumpfsystems.

Die Strecken zwischen dem Hauptpunkte H_j und den Gelenkmittelpunkten des j^{ten} Gliedes sollen wieder den Namen »Hauptstrecken des j^{ten} Gliedes« führen.

Die Lage des Hauptpunktes innerhalb eines jeden Körpertheils und die Grösse der Hauptstrecken hängen von den Massen sämmtlicher Glieder ab. Verändert man die Masse auch nur eines Körpertheils, z. B. des Rumpfes, indem man ihn mit einem Tornister beschwert, oder des Armes, indem man ein Gewicht in der Hand hält, so verändert sich auch sofort die Lage sämmtlicher Hauptpunkte, und zwar immer in der Weise, dass sie alle innerhalb des Körpers dem beschwerten Gliede näher rücken.

Die Hauptpunkte der 12 Körperabschnitte ermöglichen wieder eine wesentliche Vereinfachung für die Ableitung der lebendigen Kraft des menschlichen Körpers. Aus der Bedeutung derselben geht unmittelbar folgender Satz hervor:

Satz: Der menschliche Körper kann aus einer beliebigen Stellung in eine unendlich benachbarte mit derselben Lage des Gesammtschwerpunktes dadurch übergeführt werden, dass man ihm nach einander 12 unendlich kleine Verrückungen V_j ertheilt, bei welchen immer nur je ein Glied um eine Axe seines Hauptpunktes unendlich wenig gedreht wird, während alle anderen Glieder gleichzeitig Translationen ausführen.

Infolgedessen stellt sich die Verrückung eines jeden der 12 Einzelschwerpunkte im Allgemeinen dar als geometrische Summe von 12 Translationen, welche leicht zu berechnen sind, nachdem man die Lage der 12 Hauptpunkte und die Richtungen der 12 Axen für die Verrückungen V_j $(j = 1, 2 \ldots 12)$ festgestellt hat. Die Translation, welche der Schwerpunkt S_k bei der Verrückung V_j erfährt, ist identisch mit der aus der Rotation um die Axe durch H_j resultirenden Translation des am j^{ten} Gliede befindlichen Gelenkmittelpunktes, welcher dem Schwerpunkte S_k innerhalb des Körpersystems am nächsten liegt. Es ist daher dem Schwerpunkte S_k für jede Verrückung V_j (bei welcher $j \lesssim k$) ein Gelenkmittelpunkt und eine Hauptstrecke des j^{ten} Gliedes zugeordnet.

Aus diesem Grunde stellt sich zunächst die Nothwendigkeit ein, die Translationen festzustellen, welche die Gelenkmittelpunkte des j^{ten} Gliedes bei den unendlich kleinen Rotationen desselben um Axen durch den zugehörigen Hauptpunkt H_j erfahren.

Für die analytische Durchführung dieser Aufgabe ist nun die

Thatsache von Bedeutung, dass der Schwerpunkt eines jeden Gliedes in der Längsaxe desselben liegt. Infolgedessen fällt auch jeder Hauptpunkt in die Längsaxe seines Gliedes. Davon ist der Rumpf nicht ausgenommen, wenn von der Bewegung des Schultergürtels abgesehen wird, und wenn die für eine gewisse mittlere Haltung geltende Annahme gemacht wird, dass die fünf am Rumpfe befindlichen Gelenkmittelpunkte in einer einzigen Ebene liegen, welche den Schwerpunkt und die Längsaxe des Rumpfes enthält.

Die Lage der Gelenkmittelpunkte zum Hauptpunkte desselben Gliedes wird durch die Hauptstrecken bestimmt. Mit Ausnahme des Rumpfes bilden dieselben bei allen Körpertheilen Strecken auf den Längsaxen. Für den Rumpf ist das nur bei der Hauptstrecke der Fall, welche den Hauptpunkt H_1 mit dem Mittelpunkte des Atlanto-occipitalgelenks verbindet, während die vier anderen Strecken, welche H_1 mit den Schulter- und Hüftgelenkmittelpunkten verbinden und welche gleichfalls in der Ebene der fünf Rumpfgelenkmittelpunkte liegen, gegen die Längsaxe des Rumpfes geneigt sind. Es empfiehlt sich, jede dieser vier Hauptstrecken durch je zwei zu einander senkrecht gerichtete zu ersetzen, von denen die eine die Projection der Verbindungsstrecke des betreffenden Gelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt auf die Rumpflängsaxe und die andere den Abstand dieses Gelenkmittelpunktes von der Rumpflängsaxe darstellt.

Für die Hauptstrecken des menschlichen Körpers sollen nun die folgenden aus der Tafel II ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt sein: An den Extremitätenabschnitten und am Kopfe sind die Strecken mit c_j oder d_j bezeichnet worden, je nachdem sie den Hauptpunkt H_j mit dem dem Rumpfe näher gelegenen oder vom Rumpfe entfernteren Gelenkmittelpunkte verbinden. Die Strecken der Rumpflängsaxe, welche den Mittelpunkt des Kopfgelenks, die Mitte der Schulterlinie und die Mitte der Hüftlinie mit dem ersten Hauptpunkte verbinden, tragen bezüglich die Bezeichnungen k, o, u, und die Entfernungen der Schultergelenk- und Hüftgelenkmittelpunkte von der Rumpflängsaxe bezüglich die Bezeichnungen a und b. Die Verbindungsstrecke des Hauptpunktes H_j mit dem Schwerpunkte S_j desselben Gliedes, welche ebenfalls Hauptstrecke genannt werden soll, ist mit e_j bezeichnet worden.

Die Grössen c_j, d_j, e_j, k, o, u, a und b sollen zunächst nur die absoluten Längen der Strecken ausdrücken. Für die Verrückungen ist

es nun nicht gleichgültig, in welcher Richtung dieselben vom Hauptpunkte aus verlaufen. Man hat daher sowohl auf jeder Längsaxe als auch auf der in der Ebene der fünf Rumpfaxen liegenden, auf der Längsaxe des Rumpfes senkrechten Geraden eine positive und negative Richtung zu unterscheiden. Zur Bestimmung derselben ist es am bequemsten, sich den Körper in die oben näher bezeichnete Normalstellung versetzt zu denken. Es soll dann für die Längsaxen die Richtung nach unten, bezüglich für die Fusslängsaxen die Richtung nach unten und vorn, und für die zur Rumpflängsaxe senkrechten Strecken die Richtung nach der rechten Körperseite zu als positiv eingeführt werden. Es ist demnach z. B. $\overline{H_3 G_{3,5}} = + d_3$, $\overline{H_3 G_{1,2}} = - c_3$, $\overline{M_1 G_{1,8}} = + a$, $\overline{M_1 G_{1,9}} = - a$, u. s. w.

Es wurde oben (S. 63) auseinandergesetzt, dass einem jeden Schwerpunkte S_h für die Verrückung V_j (wo $j \leqq h$) eine Hauptstrecke des j^{ten} Gliedes zugeordnet ist. Dieselbe ist diejenige unter den Hauptstrecken des j^{ten} Gliedes, welche das dem Schwerpunkte S_h innerhalb des Körpers am nächsten liegende Gelenk des j^{ten} Gliedes, d. h. also das Gelenk, welches die unmittelbare oder mittelbare Verbindung zwischen dem j^{ten} Gliede und dem h^{ten} Gliede darstellt, mit dem Hauptpunkte des j^{ten} Gliedes verbindet. Führt man für die dem Schwerpunkte S_h in Bezug auf die Verrückung V_j zugeordnete Hauptstrecke die Bezeichnung f_{jh}, bezüglich für die in Bezug auf die Verrückung V_1 zugeordneten beiden Hauptstrecken die Bezeichnungen f_{1h} und q_{1h} ein, wobei die Grössen f_{jh} sämmtlich auf Längsaxen und die Grössen q_{1h} auf Senkrechten zur Rumpflängsaxe liegen, bezeichnet man ferner insbesondere die dem Schwerpunkte S_h in Bezug auf die Verrückung V_h selbst zugeordnete Hauptstrecke, d. h. die Entfernung e_h des Schwerpunktes S_h von H_h mit f_{hh}, und berücksichtigt man das Vorzeichen dieser Strecken, so ergiebt sich für die Werthe dieser Grössen nach der durch Tafel II eingeführten Bezeichnung die Tabelle:

h	f_{1h}	f_{2h}	f_{3h}	f_{4h}	f_{5h}	f_{6h}	f_{7h}	f_{8h}	f_{9h}	f_{10h}	f_{11h}	f_{12h}	q_{1h}
1	$-e_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	0
2	$+u$	$+e_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+b$
3	$+u$	$-c_2$	$+e_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$-b$
4	$+u$	$+d_2$	$-c_3$	$+e_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+b$
5	$+u$	$-c_2$	$+d_3$	$-c_4$	$+e_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$-b$
6	$+u$	$+d_2$	$-c_3$	$+d_4$	$-c_5$	$+e_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+b$
7	$+u$	$-c_2$	$+d_3$	$-c_4$	$+d_5$	$-c_6$	$+e_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$-b$
8	$-o$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$+e_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+a$
9	$-o$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$+e_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$-a$
10	$-o$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$+d_8$	$-c_9$	$+e_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+a$
11	$-o$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$+d_9$	$-c_{10}$	$+e_{11}$	$+c_{12}$	$-a$
12	$-k$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$-e_{12}$	0

Die Verrückung V_j, bei welcher nur das j^{te} Glied um irgend eine Axe durch den j^{ten} Hauptpunkt H_j unendlich wenig rotirt, während alle anderen Glieder gleichzeitig Translationen ausführen, kann nun allgemein in drei Componenten V_{φ_j}, V_{ϑ_j}, V_{ϱ_j} zerlegt werden. Dabei bedeutet:

V_{φ_j} eine Verrückung, bei welcher von allen Coordinaten nur φ_j seinen Werth um $d\varphi_j$ ändert, während die anderen constant bleiben. Nach der Bedeutung der Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j entspricht dies einer unendlich kleinen Rotation des j^{ten} Gliedes von der Grösse $d\varphi_j$ um eine durch den Hauptpunkt H_j gehende horizontale Axe $\mathfrak{A}_{\varphi_j}$, welche mit der im Raume festen Verticalebene den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_j\right)$ bildet, verbunden mit Translationen der anderen Glieder,

V_{ϑ_j} eine Verrückung, bei welcher allein ϑ_j seinen Werth um $d\vartheta_j$ ändert, während alle anderen Coordinaten constant bleiben. Dies kommt auf eine unendlich kleine Rotation des j^{ten} Gliedes von der Grösse $d\vartheta_j$ um die durch den Hauptpunkt H_j gehende Verticalaxe $\mathfrak{A}_{\vartheta_j}$ und gleichzeitige Translationen der anderen Glieder hinaus,

V_{ϱ_j} eine Verrückung, bei welcher sich nur ϱ_j um $d\varrho_j$ ändert, während alle anderen Coordinaten constant bleiben. Dies entspricht einer unendlich kleinen Rotation des j^{ten} Gliedes um seine eigene (durch H_j gehende) Längsaxe. Im Allgemeinen werden dabei alle anderen Glieder in Ruhe bleiben; nur bei der Rotation des Rumpfes um seine Längsaxe, d. h. also bei der Verrückung V_{ϱ_1} müssen die

Extremitäten gleichzeitig Translationen ausführen; der Kopf bleibt aber auch in diesem Falle im Raume (nicht zum Rumpfe) fest.

Da die Lage eines jeden Gliedes bei festgehaltenem Gesammtschwerpunkt durch die Winkelgrössen φ, ϑ, ϱ eindeutig bestimmt ist, so geht daraus hervor, dass jede Verrückung V_j sich immer auf eine einzige Art durch drei derartige Verrückungen V_{φ_j}, V_{ϑ_j}, V_{ϱ_j} ersetzen lässt.

Man kann daher den früheren Satz, welcher von der Überführung des Körpers aus einer Lage in eine beliebige unendlich benachbarte bei festgehaltenem Gesammtschwerpunkt handelte, jetzt in der Form aussprechen:

Satz: Der menschliche Körper kann aus irgend einer Lage in eine unendlich benachbarte mit demselben Orte des Gesammtschwerpunktes dadurch übergeführt werden, dass man ihn successive 36 Verrückungen V_{φ_j}, V_{ϑ_j}, V_{ϱ_j} $(j = 1, 2 \cdots 12)$ unterwirft. Dies ist immer nur auf eine Art möglich.

Es erfährt dabei jeder der 12 Einzelschwerpunkte 36 unendlich kleine Translationen, deren geometrische Summe die Gesammtverrückung desselben für die allgemeinste Bewegung des menschlichen Körpers darstellt.

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Behandlung des Falles uneingeschränktester Beweglichkeit, welche nach den voraufgegangenen Entwickelungen durchaus keinen Schwierigkeiten mehr unterliegt, infolge der zahlreichen Verrückungen sehr verwickelt wird, und dass der hieraus resultirende Ausdruck für die lebendige Kraft des Körpersystems nur schwer zu übersehen und zu deuten sein wird, so lange man noch nicht über die Verhältnisse bei speciellen, einfacheren Bewegungsarten des Körpers volle Klarheit erlangt hat. Aus diesem Grunde soll zunächst die Behandlung des allgemeinsten Falles, obgleich die Resultate schon fertig vorliegen, nicht weiter verfolgt werden, sondern es soll nur eine besondere Bewegungsart in Betracht gezogen werden, welche sich in sehr vielen, im Leben häufiger vorkommenden Fällen, z. B. gerade beim Gehen und Laufen mit grosser Annäherung realisirt findet.

Untersucht man zunächst nur solche Bewegungen des ganzen Körpers, bei welchen alle Längsaxen parallel

einer festen Verticalebene bleiben, und bei denen keine Rollungen um die Längsaxen der Glieder stattfinden, so kommen von den drei Verrückungsarten V_{φ_j}, V_{ϑ_j}, V_{ϱ_j} nur die drei ersten in Betracht. Es sind nämlich in diesem Falle sowohl alle ϑ_j als auch alle ϱ_j constante Grössen, und zwar sollen sämmtliche ϑ_j den Werth $\frac{\pi}{2}$ und sämmtliche ϱ_j den Werth Null besitzen; infolgedessen ist $d\vartheta_j = d\varrho_j = 0$. Die ganze Bewegung ist dann als eine ebene Bewegung anzusehen. Die Ebene, auf welche die ganze Bewegung sich unverkürzt projicirt, ist eine Verticalebene, welche mit der im Raume festen Verticalebene den Winkel $\vartheta_j = \frac{\pi}{2}$ bildet; dieselbe soll geradezu mit der XZ-Ebene des rechtwinkligen Coordinatensystems zusammenfallen, dann wird für die Bahnen sämmtlicher Punkte des Körpers die Coordinate y einen constanten Werth besitzen.

Auf diesen speciellen Fall der Bewegungen des menschlichen Körpers lassen sich nun Wort für Wort dieselben Betrachtungen anwenden, wie auf den Fall der drei durch zwei Charniergelenke verbundenen Körper. Der Umstand, dass in der Projection auf die Bewegungsebene an zwei Stellen, nämlich dem Durchschnitt der Schulterlinie und Hüftlinie mit dieser Ebene, mehr als zwei Glieder durch ein Gelenk scheinbar verbunden sind, bedingt durchaus keine Complication gegenüber dem Falle einer fortlaufenden Kette von Körpern. Man kann daher sofort den Ausdruck für das mit $\frac{1}{2}m_h$ multiplicirte Quadrat der Verrückung des Schwerpunktes S_h hinschreiben; dasselbe ist (vgl. S. 28)

$$\tfrac{1}{2} m_h v_h^2 = \tfrac{1}{2} \sum_1^{12}{}^j m_h f_{jh}^2 \varphi_j'^2 + \sum_1^{11}{}^i \sum_2^{12}{}^k m_h f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\, \varphi_i' \varphi_k'$$

(wo stets $i < k$ sein muss).

Der Unterschied zwischen dieser und der Formel auf S. 28 liegt ausschliesslich in einer, der vergrösserten Körperanzahl entsprechenden Vermehrung der Glieder.

Bezeichnet man mit $\varkappa_h$ den Trägheitsradius des h^{ten} Gliedes in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S_h gelegte, zur Bewegungsebene und daher auch zur Längsaxe des h^{ten} Gliedes senkrechte Axe, so muss man zu obigem Werthe noch $\frac{1}{2} m_h \varkappa_h^2 \varphi_h'^2$ hinzufügen, um die lebendige Kraft des h^{ten} Gliedes relativ zum Gesammtschwerpunkt zu

bekommen. Die ganze lebendige Kraft des menschlichen Körpers relativ zum Gesammtschwerpunkt wird daher erhalten, indem man der Reihe nach $h = 1, 2 \cdots 12$ setzt und alle diese Werthe addirt.

Als Factor von $\frac{1}{2}\varphi_j'^2$ erscheint dann die Summe $m_j x_j^2 + \sum_1^{12}{}^h m_h f_{jh}^2$ und als Factor von $\cos(\varphi_i - \varphi_k)\,\varphi_i'\varphi_k'$ die Summe $\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh}$.

Aus der Bedeutung der Grössen f_{jh} geht nun hervor, dass die Summe $m_j x_j^2 + \sum_1^{12}{}^h m_h f_{jh}^2$ wieder das Trägheitsmoment des j^{ten} reducirten Systems in Bezug auf die zur Bewegungsebene senkrechte Axe durch den Hauptpunkt H_j des j^{ten} Gliedes ist, so dass man dafür $m_0 k_j^2$ schreiben kann, wenn unter k_j der zugehörige Trägheitsradius verstanden wird.

Ferner ergibt sich ganz allgemein, dass die Summe $\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh}$ durch das negative Product $-m_0 f_{ik} f_{ki}$ ersetzt werden kann. Zu diesem Resultat gelangt man auf folgende Weise:

Es sei $1 < i < k$. Die Summe der Massen, welche am i^{ten} Gliede in entgegengesetzter Richtung als das k^{te} Glied hängen, sei m_i', die Summe der Massen, welche am k^{ten} Gliede in entgegengesetzter Richtung als das i^{te} Glied hängen, sei m_k'; die Massen des i^{ten} und k^{ten} Gliedes selbst seien m_i und m_k und die Summe der dann noch übrig bleibenden, zwischen dem i^{ten} und k^{ten} Gliede befindlichen Massen sei m_{ik}. An dem i^{ten} Gliede hat man drei Hauptstrecken zu unterscheiden: diejenige, welche das Gelenk in der Richtung nach dem k^{ten} Gliede mit H_i verbindet, f_{ik}, diejenige, welche das entgegengesetzte Gelenk mit H_i verbindet, sie soll mit $f_{ii'}$ bezeichnet sein, und die Strecke f_{ii} zwischen dem i^{ten} Schwerpunkt S_i und dem i^{ten} Hauptpunkte H_i. Desgleichen hat man am k^{ten} Gliede drei Hauptstrecken f_{ki}, $f_{kk'}$ und f_{kk} zu unterscheiden, wo f_{ki} das dem i^{ten} Gliede zugekehrte Gelenk, $f_{kk'}$ das entgegengesetzte Gelenk und f_{kk} den Schwerpunkt S_k mit dem Hauptpunkte verbindet.

Es sind daher die

den Schwerpunkten der Massensumme m_i' zugeordneten

Hauptstrecken: $f_{ii'}$ und f_{ki},

den Schwerpunkten der Masse m_i zugeordneten

Hauptstrecken: f_{ii} und f_{ki},

den Schwerpunkten der Massensumme m_{ik} zugeordneten

Hauptstrecken: f_{ik} und f_{ki},

den Schwerpunkten der Masse m_k zugeordneten

Hauptstrecken: f_{ik} und f_{kk},

den Schwerpunkten der Massensumme m_k' zugeordneten

Hauptstrecken: f_{ik} und $f_{kk'}$,

und man hat

$$\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = m_i' f_{ii'} f_{ki} + m_i f_{ii} f_{ki} + m_{ik} f_{ik} f_{ki} + m_k f_{ik} f_{kk} + m_k' f_{ik} f_{kk'}.$$

Nun ist in Folge der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reducirten Systeme

$$m_i' f_{ii'} + m_i f_{ii} = -(m_k' + m_k + m_{ik}) f_{ik}$$
$$m_k f_{kk} + m_k' f_{kk'} = -(m_{ik} + m_i + m_i') f_{ki}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so ergibt sich

$$\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = -(m_k' + m_k + m_{ik} - m_{ik} + m_{ik} + m_i + m_i') f_{ik} f_{ki}$$

und, da $m_k' + m_k + m_{ik} + m_i + m_i' = m_0$ ist:

$$\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = -m_0 f_{ik} f_{ki}. \qquad \text{q. e. d.}$$

Ist $i = 1$, so empfiehlt es sich nicht, den Beweis allgemein zu führen, da zu viel specielle Fälle unterschieden werden müssen. Man überzeugt sich aber leicht unter Benutzung der in der Tabelle auf S. 66 niedergelegten Werthe und der Relationen, welche zwischen den Hauptstrecken je eines Gliedes bestehen müssen, dass auch in diesem Falle gilt:

$$\sum_1^{12}{}^h m_h f_{1h} f_{kh} = -m_0 f_{1k} f_{k1}$$

für alle Werthe von k. Man kann diesen Relationen die, vorläufig noch nicht in Betracht kommende, Relation hinzufügen:

$$\sum_1^{12}{}^h m_h q_{1h} f_{jh} = -m_0 q_{1j} f_{j1}.$$

Beachtet man noch, dass bei freier Beweglichkeit des

menschlichen Körpers zu der lebendigen Kraft relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 die lebendige Kraft $\frac{1}{2} m_0 (\xi_0'^2 + \zeta_0'^2)$ [1]) hinzukommt, welche S_0 in Folge seiner (ebenen) Bewegung besitzen würde, wenn in ihm die Gesammtmasse m_0 vereinigt wäre, so ergibt sich schliesslich als Werth für die gesammte lebendige Kraft T des menschlichen Körpers bei freier Beweglichkeit desselben:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \left[\xi_0'^2 + \zeta_0'^2 + \sum_1^n {}^j k_j^2 \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^{n-1} {}^i \sum_2^n {}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k' \right],$$

wo $n = 12$ und i immer kleiner wie k sein muss.

Die Grössen k_j und f_{ik} lassen sich in jedem Falle leicht berechnen, wenn die Dimensionen, Massen und Trägheitsmomente der einzelnen Körperabschnitte des in Bewegung begriffenen Individuums bekannt sind.

Da hier nur allgemeine mechanische Gesichtspunkte für die Behandlung der Bewegungen des menschlichen Körpers gegeben werden sollen, so mag von der Berechnung dieser Grössen vorläufig abgesehen werden, um so mehr, als auf dieselbe in der später erscheinenden Arbeit über den menschlichen Gang ausführlich eingegangen werden muss.

In dem obigen Ausdrucke für T sind die Componenten der Geschwindigkeit des Gesammtschwerpunktes ξ_0', ζ_0' (wozu im Falle allgemeinster Bewegung noch η_0' kommt) vertreten. Die Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 und ihre Abgeleiteten sind von den sonst noch auftretenden Winkeln und Winkelgeschwindigkeiten unabhängig, so lange die Bewegung vollständig frei ist; dieselben lassen sich dagegen im Allgemeinen als Functionen der Winkel φ, ϑ, ϱ und ihrer Abgeleiteten darstellen, sobald die Bewegung des Körpers an gewisse Bedingungen geknüpft ist. Für die hier betrachtete specielle Bewegungsart heisst dies also insbesondere, die Grössen ξ_0', ζ_0' lassen sich dann durch die φ_j und φ_j' allein ausdrücken.

In vielen Fällen wird die Bedingung für die Beweglichkeit darin bestehen, dass ein Punkt P des Körpers festbleibt; dann werden die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes ξ_0, ζ_0 (und η_0) Functionen der Coordinaten x_1, z_1 (und y_1) dieses Punktes und der Winkelgrössen φ_j (und ϑ_j, ϱ_j).

---

1) η_0' besitzt in diesem speciellen Falle der Bewegungen den Werth Null, da η_0 constant ist.

Für die analytische Ausführung dieses Gedankens leisten wieder die Hauptpunkte der Glieder wichtige Dienste. Es gilt auch bei dem viel verwickelteren System des menschlichen Körpers der schon früher für das Dreikörpersystem gefundene

Satz: Man gelangt immer zu dem Gesammtschwerpunkte S_0 des menschlichen Körpers, wenn man von irgend einem Hauptpunkte H_j aus die geometrische Summe der zu den 11 übrigen Körpern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Körpers dem Hauptpunkte H_j zugekehrt sind.

Beweis dieses Satzes: In der Figur auf Tafel I bedeutet allgemein S_h den Schwerpunkt des h^{ten} Gliedes (die zugehörige Masse ist m_h) und $G_{i,k}$ den Mittelpunkt des Gelenkes zwischen dem i^{ten} und k^{ten} Gliede. S_0 sei der Gesammtschwerpunkt und m_0 die Gesammtmasse; endlich sei H_1 der Hauptpunkt des Rumpfes.

Ist O ein beliebiger Punkt im Raume, so ist nach dem bekannten, schon früher verwendeten, Satze von Leibniz:

$$m_0 [O S_0] = \sum_1^{12}{}' m_i [O S_i],$$

wobei das Σ'-Zeichen die geometrische Summation ausdrücken soll.

Setzt man $\frac{m_i}{m_0} = \mu_i$, so kann man auch schreiben:

$$[O S_0] = \sum_1^{12}{}' \mu_i [O S_i].$$

Der Punkt O ist ganz beliebig. Lässt man denselben beispielsweise mit dem Hauptpunkte H_1 des Rumpfes zusammenfallen, so folgt:

$$[H_1 S_0] = \sum_1^{12}{}' \mu_i [H_1 S_i].$$

Ersetzt man nun noch allgemein die Strecke $H_1 S_i$ durch die geometrische Summe des gebrochenen Linienzugs von H_1 über die das i^{te} Glied successive mit dem Rumpfe verbindenden Gelenke hinweg bis S_i, also z. B. (vgl. Tafel I)

$[H_1 S_{11}]$ durch $[H_1 G_{1,9}] + [G_{1,9} G_{9,11}] + [G_{9,11} S_{11}]$

oder $[H_1 S_6]$ durch $[H_1 G_{1,2}] + [G_{1,2} G_{2,4}] + [G_{2,4} G_{4,6}] + [G_{4,6} S_6]$ u. s. w., so wird

$$\begin{aligned}[H_1 S_0] = {} & \mu_1 [H_1 S_1] \\
& + \mu_2 [H_1 G_{1,2}] + \mu_2 [G_{1,2} S_2] \\
& + \mu_3 [H_1 G_{1,3}] + \mu_3 [G_{1,3} S_3] \\
& + \mu_4 [H_1 G_{1,2}] + \mu_4 [G_{1,2} G_{2,4}] + \mu_4 [G_{2,4} S_4] \\
& + \mu_5 [H_1 G_{1,3}] + \mu_5 [G_{1,3} G_{3,5}] + \mu_5 [G_{3,5} S_5] \\
& + \mu_6 [H_1 G_{1,2}] + \mu_6 [G_{1,2} G_{2,4}] + \mu_6 [G_{2,4} G_{4,6}] + \mu_6 [G_{4,6} S_6] \\
& + \mu_7 [H_1 G_{1,3}] + \mu_7 [G_{1,3} G_{3,5}] + \mu_7 [G_{3,5} G_{5,7}] + \mu_7 [G_{5,7} S_7] \\
& + \mu_8 [H_1 G_{1,8}] + \mu_8 [G_{1,8} S_8] \\
& + \mu_9 [H_1 G_{1,9}] + \mu_9 [G_{1,9} S_9] \\
& + \mu_{10} [H_1 G_{1,8}] + \mu_{10} [G_{1,8} G_{8,10}] + \mu_{10} [G_{8,10} S_{10}] \\
& + \mu_{11} [H_1 G_{1,9}] + \mu_{11} [G_{1,9} G_{9,11}] + \mu_{11} [G_{9,11} S_{11}] \\
& + \mu_{12} [H_1 G_{1,12}] + \mu_{12} [G_{1,12} S_{12}] .\end{aligned}$$

Nun ist infolge der Bedeutung des j^{ten} Hauptpunktes als Schwerpunkt des j^{ten} reducirten Systems:

$$\begin{aligned}& \mu_1 [H_1 S_1] + (\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) [H_1 G_{1,2}] + (\mu_3 + \mu_5 + \mu_7) [H_1 G_{1,3}] \\
& \qquad + (\mu_8 + \mu_{10}) [H_1 G_{1,8}] + (\mu_9 + \mu_{11}) [H_1 G_{1,9}] + \mu_{12} [H_1 G_{1,12}] = 0 \\
& \mu_2 [G_{1,2} S_2] + (\mu_4 + \mu_6) [G_{1,2} G_{2,4}] = [G_{1,2} H_2] \\
& \mu_3 [G_{1,3} S_3] + (\mu_5 + \mu_7) [G_{1,3} G_{3,5}] = [G_{1,3} H_3] \\
& \mu_4 [G_{2,4} S_4] + \mu_6 [G_{2,4} G_{4,6}] = [G_{2,4} H_4] \\
& \mu_5 [G_{3,5} S_5] + \mu_7 [G_{3,5} G_{5,7}] = [G_{3,5} H_5] \\
& \mu_6 [G_{4,6} S_6] = [G_{4,6} H_6] \\
& \mu_7 [G_{5,7} S_7] = [G_{5,7} H_7] \\
& \mu_8 [G_{1,8} S_8] + \mu_{10} [G_{1,8} G_{8,10}] = [G_{1,8} H_8] \\
& \mu_9 [G_{1,9} S_9] + \mu_{11} [G_{1,9} G_{9,11}] = [G_{1,9} H_9] \\
& \mu_{10} [G_{8,10} S_{10}] = [G_{8,10} H_{10}] \\
& \mu_{11} [G_{9,11} S_{11}] = [G_{9,11} H_{11}] \\
& \mu_{12} [G_{1,12} S_{12}] = [G_{1,12} H_{12}] .\end{aligned}$$

Daher erhält man

$$\begin{aligned}[H_1 S_0] = {} & [G_{1,2} H_2] + [G_{1,3} H_3] + [G_{2,4} H_4] + [G_{3,5} H_5] + [G_{4,6} H_6] + [G_{5,7} H_7] \\
& + [G_{1,8} H_8] + [G_{1,9} H_9] + [G_{8,10} H_{10}] + [G_{9,11} H_{11}] + [G_{1,12} H_{12}]\end{aligned}$$

q. e. d.

Anstatt von H_1 auszugehen, kann man auch jeden anderen Hauptpunkt zum Ausgangspunkt nehmen und erhält dann stets die Bestätigung des obigen Satzes. Es ist zu beachten, dass dieses Resultat ganz unabhängig von der Haltung des Körpers ist und auch nicht

die, beim Menschen nahezu realisirte, Annahme, dass die Einzelschwerpunkte in den Längsaxen liegen, zur Voraussetzung hat.

Bleibt nun während der Bewegung ein Punkt P des j^{ten} Gliedes fest oder besitzt er eine bestimmte Lage zu diesem Gliede, so hat man den 11 Strecken nur noch die Strecke $[PH_j]$ hinzuzufügen, wenn man die geometrische Summe von P aus bilden will. Es empfiehlt sich die Strecke $[PH_j]$ durch Projection auf die j^{te} Längsaxe in zwei rechtwinklige Componenten zu zerlegen. In vielen Fällen wird P der Längsaxe selbst angehören, dann fällt die eine der beiden Componenten fort.

Im speciellen Falle des menschlichen Ganges bleibt, während der Körper nur von einem Fusse, z. B. dem rechten, unterstützt ist, für einige Zeit ein Punkt P fest, welcher mit grosser Annäherung auf der Längsaxe des rechten Fusses, d. h. also auf der Verbindungslinie des Tibio-talus-Gelenkmittelpunktes mit dem Schwerpunkte S_6 des rechten Fusses liegt. Die Entfernung dieses Punktes von H_6 sei $+ d_6$, dann erhält man den Ort des Gesammtschwerpunktes S_0 als Endpunkt der von P aus gebildeten geometrischen Summe:

$$[-d_6]+[-d_4]+[-d_2]+[-b]+[-u]+[+c_3]+[+c_5]+[+c_7] \\ +[+c_8]+[+c_{10}]+[+c_9]+[+c_{11}]+[-c_{12}]$$

(vgl. hierzu Tafel II). Die Richtungen dieser Strecken sind in dem angenommenen Falle der ebenen Bewegung durch die Winkelgrössen φ_j vollständig bestimmt, denn $[-b]$ verschwindet in der Projection auf die Bewegungsebene, da diese Strecke senkrecht zur letzteren gerichtet ist.

Da diese Hauptstrecken in gewisser Beziehung dem Gesammtschwerpunkte S_0 zugeordnet sind, so sollen dieselben analog der früheren Bezeichnungsweise mit f_{j0} bezeichnet sein.

Bewegt sich nun der Körper aus einer Stellung in eine unendlich benachbarte so, dass der Punkt P festbleibt, so erfährt der Gesammtschwerpunkt S_0 dabei auch eine Verrückung. Dieselbe setzt sich in gleicher Weise aus 12 zu den verschiedenen Längsaxen senkrechten Verrückungen zusammen, wie die Verrückung des Einzelschwerpunktes S_k; dabei spielen die Hauptstrecken f_{j0} dieselbe Rolle wie die f_{jk} für die Verrückungen von S_k. Man erhält infolgedessen den Werth des Antheiles $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$, welchen der Gesammtschwerpunkt zu der lebendigen Kraft des ganzen Systems beisteuert, indem man

in dem Ausdruck für $\frac{1}{2} m_h v_h^2$ auf S. 68 für $h = 0$ einsetzt. Dabei ergeben sich die Werthe von f_{j0} aus der folgenden Tabelle:

$f_{1,0}$	$f_{2,0}$	$f_{3,0}$	$f_{4,0}$	$f_{5,0}$	$f_{6,0}$	$f_{7,0}$	$f_{8,0}$	$f_{9,0}$	$f_{10,0}$	$f_{11,0}$	$f_{12,0}$
$-u$	$-d_2$	$+c_3$	$-d_4$	$+c_5$	$-d_6$	$+c_7$	$+c_8$	$+c_9$	$+c_{10}$	$+c_{11}$	$-c_{12}$

Es tritt daher in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft relativ zum Gesammtschwerpunkte (die Formel für T auf S. 71 bei Weglassung der Glieder $\xi_0'^2$ und $\zeta_0'^2$) zu den Grössen $m_0 k_j^2$ und $-m_0 f_{ik} f_{ki}$ bezüglich noch hinzu $m_0 f_{j0}^2$ und $+m_0 f_{i0} f_{k0}$. Man erhält infolgedessen als Werth der lebendigen Kraft T

bei der Bedingung, das ein Punkt P des Körpers festbleibt:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \left[\sum_1^n{}^j (k_j^2 + f_{j0}^2) \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^{n-1}{}^j \sum_2^n{}^k (f_{ik} f_{ki} - f_{i0} f_{k0}) \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k' \right],$$

wo $n = 12$ und i stets $< k$ sein muss.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, indem man, ohne von dem Falle der freien Beweglichkeit des Systems auszugehen, von vornherein untersucht, welche Translationen die einzelnen Schwerpunkte S_h erfahren, wenn man dem ganzen Körper eine solche Verrückung ertheilt, bei welcher allein das j^{te} Glied seine Richtung ändert, während alle anderen Glieder nur Translationen ausführen dürfen.

Es ist nicht schwer, einzusehen, dass die Axe der unendlich kleinen Rotation jetzt nicht mehr durch den Hauptpunkt H_j, sondern durch denjenigen Gelenkmittelpunkt des j^{ten} Gliedes hindurchgeht, welcher innerhalb des Körpers dem festen Punkt P am nächsten liegt. Die zwischen diesem Gelenkmittelpunkt und dem festen Punkte P gelegenen Körpertheile bleiben dabei ganz in Ruhe, während alle anderen Glieder Translationen ausführen. Es kommt infolgedessen zu der Translation, welche der Schwerpunkt S_h infolge der unendlich kleinen Drehung des j^{ten} Gliedes um eine Axe durch den Hauptpunkt H_j desselben erfuhr, noch die Translation hinzu, welche der Hauptpunkt H_j selbst erfährt, wenn man die Rotationsaxe parallel mit sich nach demjenigen Gelenkmittelpunkte des j^{ten} Gliedes verlegt, welcher innerhalb des menschlichen Körpers dem festbleibenden Punkte P am nächsten liegt.

Die Entfernung der Hauptpunkte H_j von diesen Gelenkmittel-

punkten wird nun durch die oben eingeführte Grösse f_{j0} dargestellt. Insbesondere setzt sich die Entfernung des Hauptpunktes H_1 vom rechten Hüftgelenkmittelpunkt aus den beiden zu einander rechtwinkligen Strecken $f_{1,0} = -u$ und $q_{1,0} = -b$ zusammen, von denen die letztere für den hier vorläufig allein behandelten Fall der ebenen Bewegung nicht in Frage kommt, da dieselbe rechtwinklig zur Bewegungsebene verläuft. Es gehen infolgedessen die für die Verrückungen des Schwerpunktes S_k in Betracht kommenden Grössen f_{jk} jetzt über in Grössen f'_{jk} und die Grössen q_{1k} über in Grössen q'_{1k}, welche durch die Relationen definirt sind:

$$f'_{jk} = f_{jk} + f_{j0} \quad \text{und} \quad q'_{1k} = q_{1k} + q_{10} \,.$$

Führt man noch folgende Bezeichnungen ein:
l_j für die Grösse der Längsaxe des j^{ten} Gliedes, insbesondere l_6 für die Entfernung des festen Punktes P vom Tibio-talus-Gelenkmittelpunkt, r_j und s_j für die Entfernungen des Schwerpunktes S_j vom proximalen bezüglich distalen Gelenkmittelpunkte, insbesondere s_1 für die Entfernung des Rumpfschwerpunktes S_1 vom Mittelpunkt der Hüftlinie und h_1 für die Entfernung der Hüft- und Schulterlinie von einander, so erhält man für die Werthe der Grössen f'_{jk} folgende Tabelle:

h	f'_{1h}	f'_{2h}	f'_{3h}	f'_{4h}	f'_{5h}	f'_{6h}	f'_{7h}	f'_{8h}	f'_{9h}	f'_{10h}	f'_{11h}	f'_{12h}	q'_{1h}
1	$-s_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	$-b$
2	0	$-s_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$-l_2$	$+r_3$	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	$-2b$
4	0	0	0	$-s_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	0
5	0	$-l_2$	$+l_3$	$-l_4$	$+r_5$	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	$-2b$
6	0	0	0	0	0	$-s_6$	0	0	0	0	0	0	0
7	0	$-l_2$	$+l_3$	$-l_4$	$+l_5$	$-l_6$	$+r_7$	0	0	0	0	0	$-2b$
8	$-h_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	$+r_8$	0	0	0	0	$+(a-b)$
9	$-h_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	$+r_9$	0	0	0	$-(a+b)$
10	$-h_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	$+l_8$	0	$+r_{10}$	0	0	$+(a-b)$
11	$-h_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	$+l_9$	0	$+r_{11}$	0	$-(a+b)$
12	$-l_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	$+r_{12}$	$-b$

Setzt man diese Grössen f'_{jk} an Stelle der f_{jk} in dem Ausdrucke für $\frac{1}{2} m_k v_k^2$ (S. 68) ein, so erhält man den Beitrag, den der Schwerpunkt S_k für die gesammte lebendige Kraft infolge seiner Geschwindigkeit leistet, wenn in ihm die Masse m_k des k^{ten} Gliedes vereinigt ist. Man darf indessen nicht erwarten, den richtigen Ausdruck für die gesammte lebendige Kraft des Systems bei festgehaltenem Punkte P

zu erhalten, wenn man die f'_{jk} an Stelle der f_{jk} auch in dem Ausdrucke für T_r relativ zum Gesammtschwerpunkte einsetzen würde, denn die Grössen f'_{jk} genügen nicht denselben Relationen, wie die f_{jk} und die q'_{1k} nicht denselben wie die q_{1k}.

Es ergibt sich nämlich jetzt:

$$\sum_1^n {}^k m_k f'^2_{jk} = \sum_1^n {}^k m_k f^2_{jk} + 2 f_{j0} \sum_1^n {}^k m_k f_{jk} + f^2_{j0} \sum_1^n {}^k m_k$$

$$\sum_1^n {}^k m_k f'_{ik} f'_{kk} = \sum_1^n {}^k m_k f_{ik} f_{kk} + f_{i0} \sum_1^n {}^k m_k f_{kk} + f_{k0} \sum_1^n {}^k m_k f_{ik} + f_{i0} f_{k0} \sum_1^n {}^k m_k$$

$$\sum_1^n {}^k m_k q'^2_{1k} = \sum_1^n {}^k m_k q^2_{1k} + 2 q_{10} \sum_1^n {}^k m_k q^2_{1k} + q^2_{10} \sum_1^n {}^k m_k$$

$$\sum_1^n {}^k m_k q'_{1k} f'_{jk} = \sum_1^n {}^k m_k q_{1k} f_{jk} + f_{j0} \sum_1^n {}^k m_k q_{1k} + q_{10} \sum_1^n {}^k m_k f_{jk} + q_{10} f_{j0} \sum_1^n {}^k m_k \,.$$

Aus der Bedeutung der Grössen f_{jk} und q_{1k} als Hauptstrecken folgt, dass

$$\sum_1^n {}^k m_k f_{jk} = 0 \,, \quad \sum_1^n {}^k m_k f_{ik} = 0 \,, \quad \sum_1^n {}^k m_k f_{kk} = 0 \,, \quad \sum_1^n {}^k m_k q_{1k} = 0 \,.$$

Setzt man $\sum_1^n {}^k m_k = m_0$, so folgt schliesslich

$$\sum_1^n {}^k m_k f'^2_{jk} = \sum_1^n {}^k m_k f^2_{jk} + m_0 f^2_{j0}$$

$$\sum_1^n {}^k m_k f'_{ik} f'_{kk} = \sum_1^n {}^k m_k f_{ik} f_{kk} + m_0 f_{i0} f_{k0} = - m_0 (f_{ik} f_{ki} - f_{i0} f_{k0})$$

$$\sum_1^n {}^k m_k q'^2_{1k} = \sum_1^n {}^k m_k q^2_{1k} + m_0 q^2_{10}$$

$$\sum_1^n {}^k m_k q'_{1k} f'_{jk} = \sum_1^n {}^k m_k q_{1k} f_{jk} + m_0 q_{10} f_{j0} = - m_0 (q_{1j} f_{j1} - q_{10} f_{j0}) \,.$$

Die Relationen, welche die Grössen q enthalten, sind hier mit angeführt worden, weil sie für den allgemeinsten Bewegungsfall Bedeutung besitzen. Aus den die Grössen f allein enthaltenden Relationen findet man in der That die schon auf dem anderen Wege abgeleiteten Formeln für T.

Bleibt irgend ein anderer Punkt auf einer der 12 Längsaxen während der Bewegung fest, so ändern sich nur die Werthe von f_{j0} in entsprechender Weise. Es bedeutet f_{j0} dabei stets die Länge derjenigen Strecke auf der Längsaxe des j^{ten} Gliedes, welche den dem

Punkte P innerhalb des Körpers am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkt bezüglich dessen Projection auf die Längsaxe (beim Rumpf) mit dem Hauptpunkte H_j verbindet.

Verminderung der Anzahl der beweglichen Körpertheile.

Nimmt man für die Bewegungen des Gehens den Kopf zum Rumpfe festgestellt an, so vermindert sich die Anzahl der Glieder in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft. Man hat dann den Rumpf mit dem Kopfe zusammen als einen einzigen starren Körper aufzufassen, dessen Hauptpunkt jetzt dem Kopfe näher liegt als der Hauptpunkt des Rumpfes allein. Die Hauptpunkte aller übrigen Körpertheile werden dadurch nicht berührt. Infolgedessen ändern sich nur die Hauptstrecken des Rumpfes; die Hauptstrecken des Kopfes verschwinden vollständig, so dass die Summen in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft sich jetzt nur noch von 1 bis 11 zu erstrecken haben. Wollte man ausserdem einen Arm oder beide Arme zum Rumpfe feststellen und auch dabei die Beweglichkeit in den Ellbogengelenken ausschliessen, so hätte man die Summen sogar nur über 9 bezüglich 7 Glieder zu erstrecken. Gleichzeitig treten an Stelle des Hauptpunktes H_1 und der zugehörigen Hauptstrecken jetzt der Hauptpunkt und die Hauptstrecken des zu einem starren Körper vereinigten Systems »Rumpf + Kopf + ein Arm« bezüglich »Rumpf + Kopf + beide Arme«, während die Hauptpunkte und Hauptstrecken für alle übrigen Glieder unverändert bleiben.

Die Lage des neuen Hauptpunktes H_1 lässt sich mit Hülfe der Lagen der Hauptpunkte der zu einem starren Systeme zu vereinigenden Körper und der zugehörigen Hauptstrecken leicht bestimmen. Man hat zu dem Zwecke nur von einem der in Frage kommenden Hauptpunkte aus die geometrische Summe der ihm zugekehrten Hauptstrecken zu bilden, welche zu den übrigen der zu einander festgestellten Körpertheile gehören.

Von der Richtigkeit dieses Satzes kann man sich in jedem Falle ohne alle Rechnung auf folgende Weise überzeugen:

Es soll z. B. der Hauptpunkt für das zu einem starren Körper vereinigte System »Rumpf + Kopf + beide Arme« bestimmt werden. Derselbe ist der Schwerpunkt des Massensystems, welches man erhält, wenn man in jedem der beiden Hüftgelenkmittelpunkte die

Masse des ganzen Beins und im Gesammtschwerpunkt des Systems »Rumpf + Kopf + beide Arme« die Gesammtmasse dieses Systems concentrirt annimmt. Die Länge dieses Hauptpunktes ist ganz unabhängig von der Gestalt der Beine und der Lage der Schwerpunkte der einzelnen Abschnitte der Beine. Sie würde insbesondere genau dieselbe bleiben, wenn man an Stelle der Beine an jedem Hüftgelenk einen Körper drehbar anbringen würde, dessen Masse gleich der Masse des ganzen Beines wäre und dessen Schwerpunkt in den Hüftgelenkmittelpunkt hineinfiele. Der Hauptpunkt eines jeden der beiden Körper fiele dann ebenfalls in den Hüftgelenkmittelpunkt hinein, und die dem Rumpfe zugekehrte Hauptstrecke desselben hätte die Länge Null. Die Länge der Hauptstrecken und die Lage der Hauptpunkte sämmtlicher anderen Glieder könnte dadurch nicht verändert werden. Der Gesammtschwerpunkt dieses neuen Körpersystems würde nun nach den früheren Entwickelungen von H_1 aus gewonnen werden allein durch Bilden der geometrischen Summe der dem Hauptpunkte H_1 zugekehrten Hauptstrecken vom Kopf und von den Abschnitten der Arme, denn die zu den Beinen gehörenden Hauptstrecken kommen infolge ihrer verschwindenden Länge dabei nicht mehr in Betracht. Der Gesammtschwerpunkt wäre dann aber, infolge der besonderen Natur des Systems, gerade der Hauptpunkt H_1 des starren Systems »Rumpf + Kopf + beide Arme«.

V. Die Bewegungsgleichungen des menschlichen Körpers.

Die Beziehungen, welche zwischen der Änderung der lebendigen Kraft einerseits und den Elementararbeiten der wirksamen inneren und äusseren Kräfte andererseits bestehen, sind auch beim menschlichen Körper wieder gegeben durch die bestimmten Differentialgleichungen der Bewegung in der von LAGRANGE herrührenden Form, bei der die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch allgemeine Coordinaten ersetzt sind, welche die Lage des Systems vollständig bestimmen. Für den menschlichen Körper stellt die Gesammtheit der Winkelgrössen φ, ϑ, ϱ verbunden mit den drei Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 des Gesammtschwerpunktes bei freier Beweglichkeit oder mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines festbleibenden Punktes P bei bedingter Beweglichkeit ein solches System allgemeiner Coordinaten dar, durch welches die Lage und Haltung des Körpers eindeutig bestimmt ist. Das System der Differentialgleichungen lautet allgemein bei der Zergliederung in n Körpertheile für das frei bewegliche System:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} = Q_{\varphi_h} \qquad (h = 1, 2 \cdots n)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_h} = Q_{\vartheta_h} \qquad (h = 1, 2 \cdots n)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varrho_h} = Q_{\varrho_h} \qquad (h = 1, 2 \cdots n)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_0} = Q_{\xi_0}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_0} = Q_{\eta_0}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_0} = Q_{\zeta_0}.$$

Für das betrachtete bedingt bewegliche System kommen die letzten drei Gleichungen in Wegfall, da die ξ_0, η_0, ζ_0 durch die Winkelgrössen φ_h, ϑ_h, ϱ_h und die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des festbleibenden Punktes P ausgedrückt werden können, und die letzten drei Coordinaten constante Werthe besitzen.

Dabei sind unter T die gesammte lebendige Kraft und unter $Q_{\varphi_h}\, d\varphi_h$, $Q_{\vartheta_h}\, d\vartheta_h$, $Q_{\varrho_h}\, d\varrho_h$, $Q_{\xi_0}\, d\xi_0$, $Q_{\eta_0}\, d\eta_0$, $Q_{\zeta_0}\, d\zeta_0$ die Summen der partiellen Elementararbeiten zu verstehen, welche von sämmtlichen am System angreifenden inneren und äusseren Kräften geleistet werden, wenn man dem menschlichen Körper eine solche mit den Bedingungen der Be-

wegung verträgliche unendlich kleine Verrückung ertheilt, bei welcher bezüglich nur eine der Grössen φ_h, ϑ_h, ϱ_h, ξ_0, η_0, ζ_0 unendlich wenig geändert wird, während alle anderen Coordinaten constant bleiben.

Es sind nun zunächst die Ausdrücke für die linken Seiten der Differentialgleichungen zu berechnen.

Wenn es auch gewiss von grossem Werthe ist, die allgemeinen Formeln zu besitzen, aus denen man die für jeden bestimmten Fall geltenden durch Specialisirung gewinnen kann, so sollen dieselben an dieser Stelle doch ebenso wenig angegeben werden, als es oben für den allgemeinen Ausdruck der lebendigen Kraft geschehen ist. Die meisten im Leben vorkommenden Fälle geordneter Bewegung bedingen eine so grosse Vereinfachung der Ausdrücke, dass der Umfang der letzteren in gar keinem Verhältniss steht zu der Ausdehnung der allgemeinen Formeln. Es empfiehlt sich daher, für jeden Fall zunächst den Ausdruck für die lebendige Kraft T des menschlichen Körpers besonders abzuleiten, in der Weise wie es oben für eine bestimmte Bewegungsart schon geschehen ist, und dann von diesem bei der Aufstellung der Differentialgleichungen auszugehen.

Für die in Betracht gezogene Art der Bewegung, welche durch $\vartheta_j = \frac{\pi}{2}$, $\varrho_j = 0$ charakterisirt ist, und zu der unter bestimmten, im Leben annähernd verwirklichten Voraussetzungen auch der Gang gehört, hatte sich bei freier Beweglichkeit der auf S. 71 niedergelegte und bei Feststellung eines Punktes der Fusslängsaxe der Werth auf S. 75 für T ergeben.

Durch Ausführung der nothwendigen Differentiationen erhält man bei freier Beweglichkeit des Systems die $n + 2$ Bewegungsgleichungen:

$$m_0 \Bigg[k_h^2 \frac{d^2 \varphi_h}{dt^2} - \sum_1^{h-1} {}^i f_{ih} f_{hi} \cos(\varphi_h - \varphi_i) \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} - \sum_{h+1}^{n} {}^k f_{hk} f_{kh} \cos(\varphi_h - \varphi_k) \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2}$$

$$- \sum_1^{h-1} {}^i f_{ih} f_{hi} \sin(\varphi_h - \varphi_i) \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2 - \sum_{h+1}^{n} {}^k f_{hk} f_{kh} \sin(\varphi_h - \varphi_k) \left(\frac{d\varphi_k}{dt}\right)^2 \Bigg] = Q_{\varphi_h}$$

$$(h = 1, 2, \cdots n),$$

$$m_0 \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = Q_{\xi_0} \quad \text{und} \quad m_0 \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} = Q_{\zeta_0}$$

und
für den Fall, dass ein Punkt P der Fusslängsaxe festbleibt, die n Bewegungsgleichungen:

$$m_0 \Big[(k_h^2 + f_{h0}^2) \frac{d^2 \varphi_h}{dt^2} - \sum_1^{h-1} {}^i (f_{ih} f_{hi} - f_{i0} f_{h0}) \cos(\varphi_h - \varphi_i) \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2}$$
$$- \sum_{h+1}^{n} {}^k (f_{hk} f_{kh} - f_{h0} f_{k0}) \cos(\varphi_h - \varphi_k) \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2}$$
$$- \sum_1^{h-1} {}^i (f_{ih} f_{hi} - f_{i0} f_{h0}) \sin(\varphi_h - \varphi_i) \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2$$
$$- \sum_{h+1}^{n} {}^k (f_{hk} f_{kh} - f_{h0} f_{k0}) \sin(\varphi_h - \varphi_k) \left(\frac{d\varphi_k}{dt}\right)^2 \Big] = Q_{\varphi_h}$$
$$(h = 1, 2, \cdots n).$$

Mit Ausnahme der Grössen Q_{ξ_0}, Q_{ζ_0} im ersten Falle, welche einfach die Componentensummen der äusseren Kräfte parallel der X-Axe bezüglich Z-Axe bedeuten, stellen die Q_{φ_h} Summen von Drehungsmomenten dar. Die Methode für die Ableitung der letzteren ist beim speciellen Falle des Dreikörpersystems ausführlich dargelegt worden und braucht daher hier nicht wiederholt zu werden. Es muss speciellen Untersuchungen überlassen bleiben, die Werthe dieser Drehungsmomente für bestimmte Fälle auszurechnen, und es ist insbesondere Aufgabe der Anatomie, die Werthe der Drehungsmomente, welche die sämmtlichen Muskeln des menschlichen Körpers für die verschiedenen Körpertheile besitzen, bis auf den einen unbestimmten Factor, die Muskelspannung, auf empirischem Wege abzuleiten. Es ist in der Einleitung erörtert worden, wie wenig Resultate in dieser Beziehung bis jetzt vorliegen und ein wie weites Feld sich der Untersuchung noch darbietet.

In entsprechender Weise wie bei dem einfacheren System lassen sich die obigen Bewegungsgleichungen in etwas kürzerer Form schreiben, wenn man den Trägheitsradius σ_h des h^{ten} reducirten Systems in Bezug auf den Einzelschwerpunkt S_h des h^{ten} Gliedes einführt und beachtet, dass

$$\sigma_h^2 = k_h^2 + f_{hh}^2, \quad \cos 0 = 1 \quad \text{und} \quad \sin 0 = 0 \qquad \text{ist.}$$

Man erkennt dann leicht die Richtigkeit der folgenden Schreibweise beim Falle freier Beweglichkeit:

$$m_0\left\{\sigma_h^2\cdot\frac{d^2\varphi_h}{dt^2}-\sum_1^n{}^j f_{hj}f_{jh}\left[\cos(\varphi_h-\varphi_j)\frac{d^2\varphi_j}{dt^2}+\sin(\varphi_h-\varphi_j)\left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2\right]\right\}=Q_{\varphi_h}$$

$$(h=1,2,\ldots n),$$

$$m_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2}=Q_{\xi_0}\quad\text{und}\quad m_0\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}=Q_{\zeta_0},$$

und bei dem betrachteten Falle bedingter Beweglichkeit:

$$m_0\left\{\sigma_h^2\cdot\frac{d^2\varphi_h}{dt^2}-\sum_1^n{}^j(f_{hj}f_{jh}-f_{h0}f_{j0})\left[\cos(\varphi_h-\varphi_j)\frac{d^2\varphi_j}{dt^2}+\sin(\varphi_h-\varphi_j)\left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2\right]\right\}=Q_{\varphi_h}$$

$$(h=1,2,\ldots n).$$

Damit ist das eingangs gesteckte Ziel erreicht. Diese Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen der einzelnen durch Gelenke verbundenen Körpertheile einerseits und den auf die letzteren einwirkenden äusseren Kräften und Drehungsmomenten der inneren Kräfte andererseits ermöglichen es nun, die unbekannten Spannungen der Muskeln während der Bewegung in der schon früher angedeuteten Weise zu bestimmen. Die Ausführbarkeit dieses Gedankens soll demnächst in der erwähnten Arbeit über den Gang des Menschen dargelegt werden. Hier handelte es sich allein darum, einen nothwendigen mathematisch-physikalischen Beitrag zur Methode der Untersuchung der Muskelwirkung bei der Bewegung des Lebenden zu liefern. Derselbe wird überall da Verwendung finden, wo es sich nicht nur um Aufstellung einer Hypothese für die Thätigkeit der Muskeln bei den im Leben ausgeführten Bewegungen des menschlichen Körpers handelt, sondern wo man, auf der Grundlage eingehender und genauer Messungen der Bewegungszustände der einzelnen Körpertheile und deren Aenderungen für den ganzen Verlauf der Bewegung, Berechnungen der Intensität der Muskelspannungen ausführen will.

Wenn auch der hierdurch angezeigte Weg der Untersuchung ein sehr mühsamer ist, auf dem man nur langsam vorwärts schreiten kann, so steht doch zu erwarten, dass man bei consequenter Verfolgung desselben allmählich einen tieferen Einblick in die Thätigkeit der Muskeln gewinnt.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 5

I. **Die Methode der Ableitung der lebendigen Kraft** 17

A. Das frei bewegliche System 19

B. Das bedingt bewegliche System 32

II. **Die Elementararbeiten der Kräfte** 39

A. Das frei bewegliche System 39

1) Elementararbeiten äusserer Kräfte 40

a. Allgemeine Betrachtungen 40

b. Die Elementararbeiten der Schwere 42

2) Elementararbeiten innerer Kräfte (Muskelkräfte) 43

a. Die beiden Kräfte wirken zwischen zwei benachbarten Körpern (eingelenkige Muskeln) 44

α) Die Zuglinie ist geradlinig zwischen den beiden Ansatzpunkten ausgespannt 44

β) Die Zuglinie läuft über einen Vorsprung des einen Körpers 45

b. Die beiden Kräfte wirken zwischen zwei nicht benachbarten Körpern (mehrgelenkige Muskeln) 46

B. Das bedingt bewegliche System 47

1) Elementararbeiten äusserer Kräfte 48

a. Allgemeine Betrachtungen 48

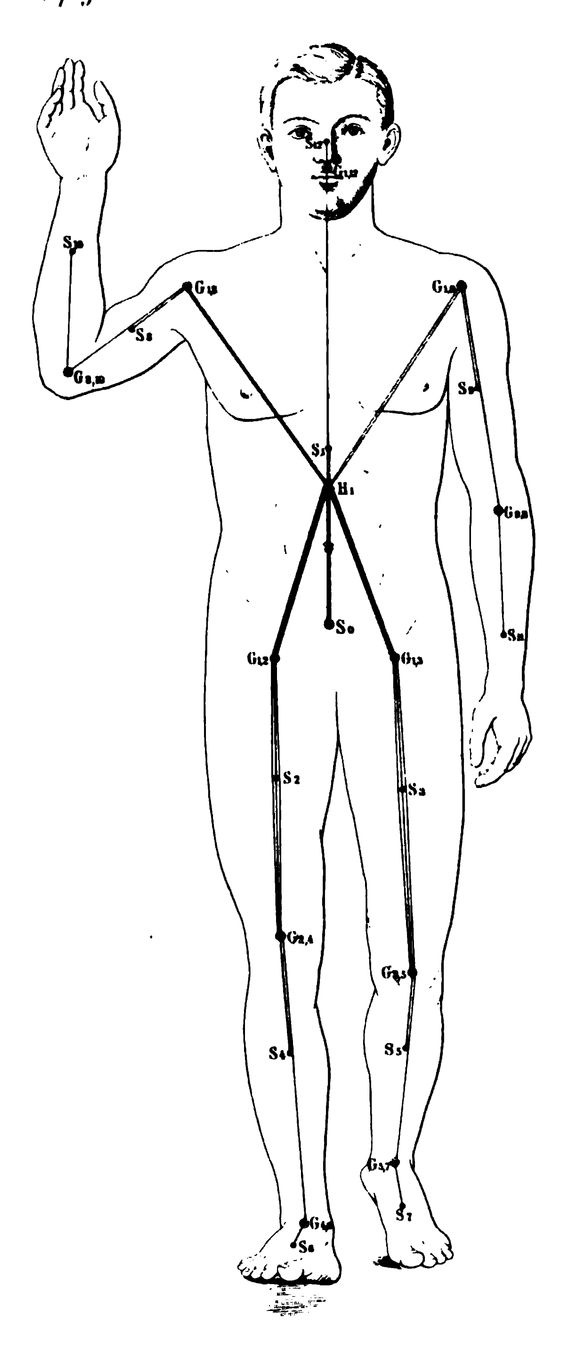
b. Elementararbeiten der Schwere 50

2) Elementararbeiten innerer Kräfte 51

II. **Die Beziehungen zwischen den Änderungen der lebendigen Kraft und den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte** 52

IV. **Die lebendige Kraft des menschlichen Körpers** 56

IV. **Die Bewegungsgleichungen des menschlichen Körpers** 80

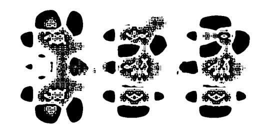


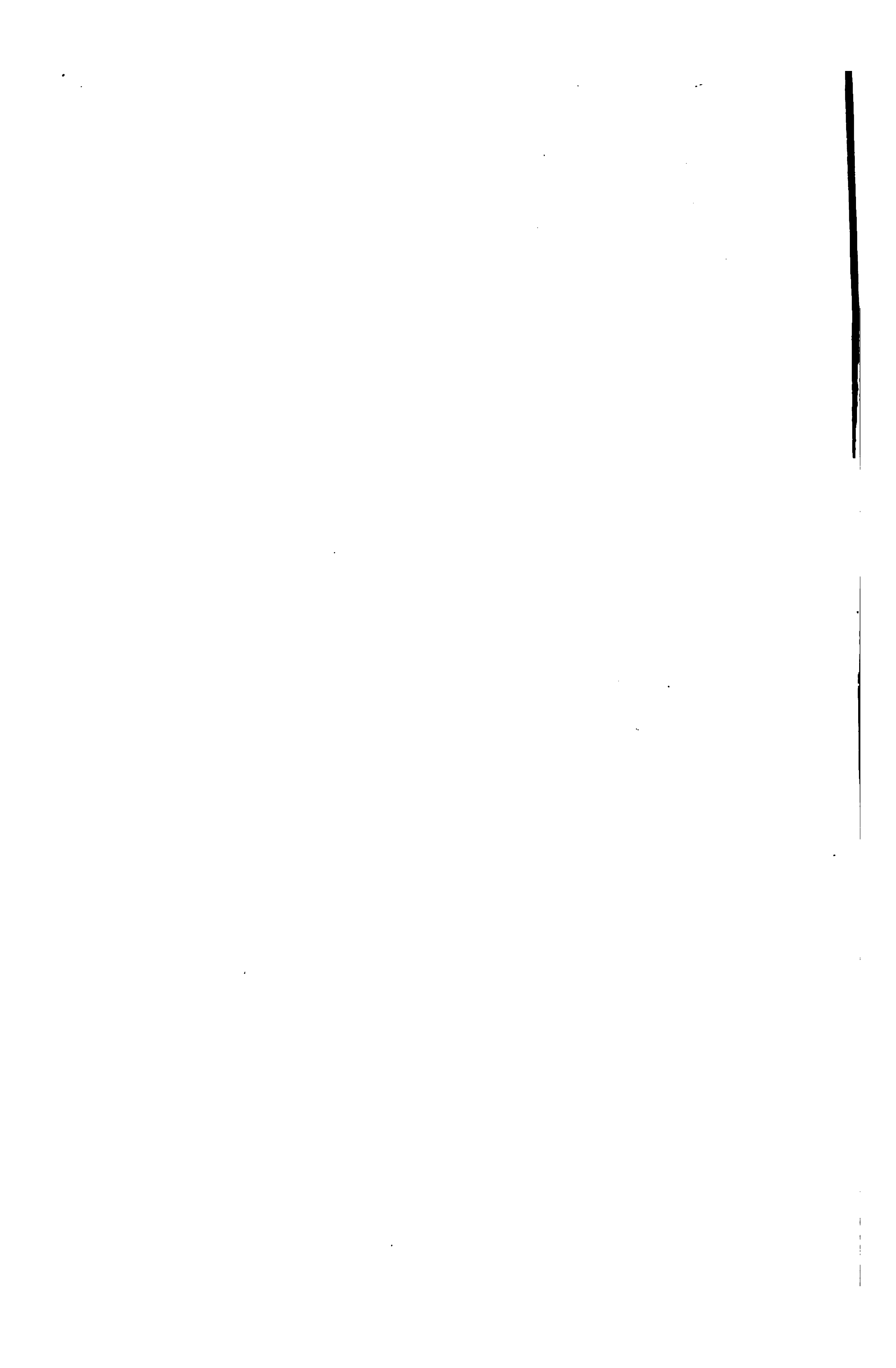
◉ *Gelenkmittelpunkte.*

• *Schwerpunkte* (● S0 *Gesammtschwerpunkt.*)

× H1 *Hauptpunkt des Rumpfes.*

Tab. II.





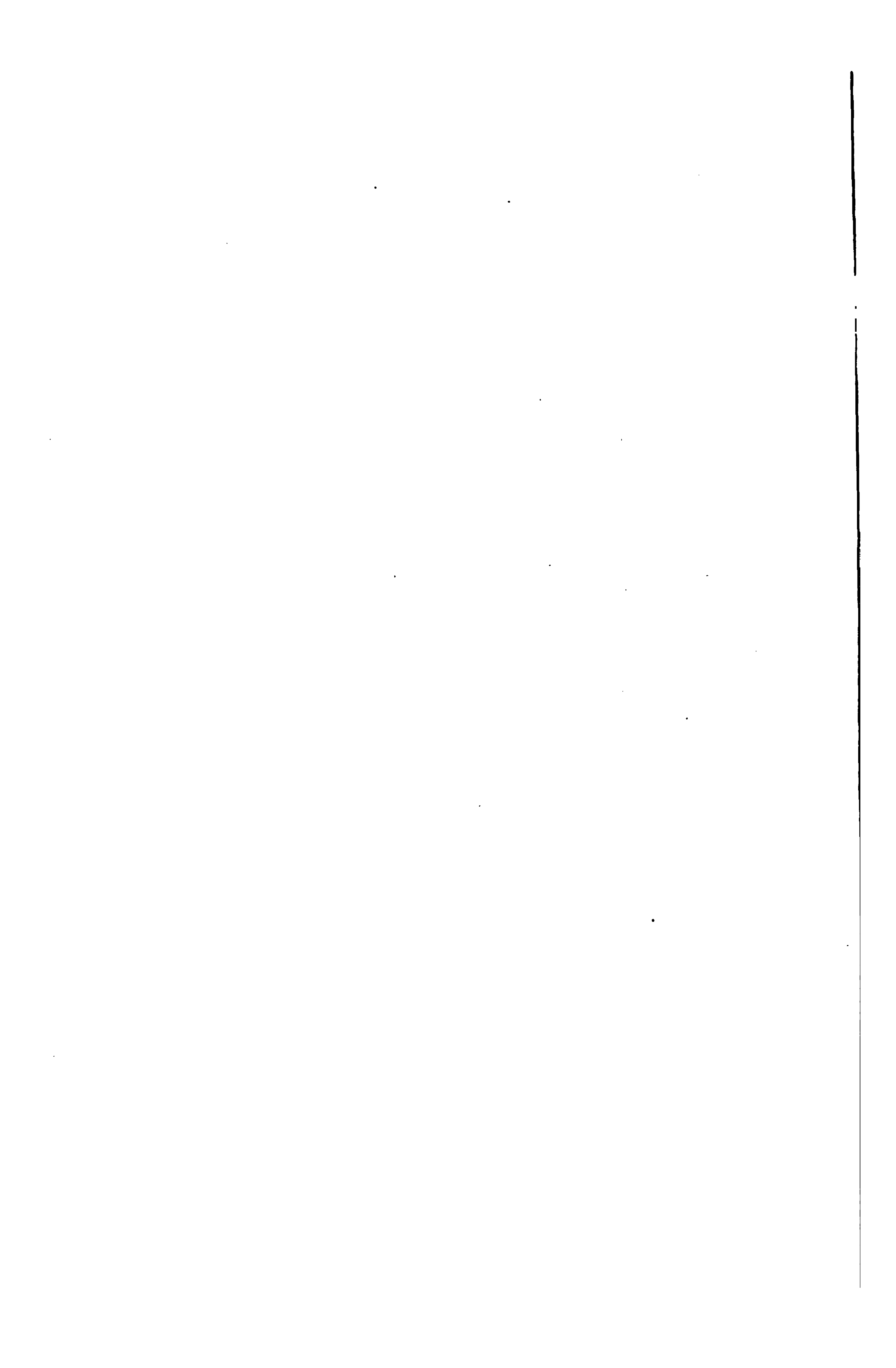
SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE, ORTHOGONALE SUBSTITUTIONEN UND ELLIPTISCHE FUNCTIONEN.

EINE ANALYTISCH-GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNG

VON

E. STUDY.

MIT SECHZEHN FIGUREN IM TEXT.



Vorwort.

In der vorliegenden Schrift wird der Versuch gemacht, der sphärischen Trigonometrie eine neue Seite abzugewinnen. Der Verfasser hat es unternommen, neuere Anschauungsweisen, besonders den Gruppenbegriff, für diesen Zweig der Elementargeometrie fruchtbar zu machen. Von Einzelergebnissen mögen hervorgehoben werden die Beziehung der trigonometrischen Formeln zur Theorie der orthogonalen Substitutionen; die Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum; die Darstellung der sphärischen Dreiecke durch Kreisvierecke in der Ebene; endlich die Vertiefung und Verallgemeinerung eines von Lagrange herrührenden Satzes, der die sphärische Trigonometrie mit der Theorie der elliptischen Functionen in Verbindung bringt. Alle diese Untersuchungen sind, wie ausdrücklich hervorgehoben werden muss, rein theoretischer Natur; für den praktischen Geometer unmittelbar verwerthbare Resultate wird man in dieser Arbeit nicht finden.

Um das Gebotene einem möglichst weiten Kreise zugänglich zu machen, ist vom Leser nur eine allgemeine mathematische Vorbildung gefordert worden, wenigstens in den beiden ersten Abschnitten, die für sich ein Ganzes bilden. Allerdings konnte einige Bekanntschaft mit dem so überaus wichtigen Gruppenbegriff nicht entbehrt werden, der zwar einem Theile der jüngeren Generation geläufig ist, den dem akademischen Leben ferner stehenden Mathematikern aber leider noch immer nicht durch eine eigentlich pädagogische, den Bedürfnissen der Lehrer angepasste Darstellung zugänglich gemacht worden ist. Der Verfasser hat auf diesen Zustand in der Weise Rücksicht genommen, dass er die im Texte vorkommenden Begriffe der Gruppentheorie da, wo sie zuerst auftreten, erklärt hat. Die hiernach etwa noch bleibende, in der Häufung ungewohnter Begriffe liegende

Schwierigkeit wird der der Gruppentheorie nicht kundige Leser wohl grösstentheils vermeiden können, wenn er mit dem *zweiten* Abschnitt beginnen und den Inhalt des ersten Abschnittes nach dem jeweiligen Bedürfniss nachholen will. Das Interesse des dritten Abschnittes liegt wohl mehr noch im Gebiete der elliptischen Functionen als in dem der Trigonometrie selbst. Hier musste die WEIERSTRASS'sche Theorie der elliptischen Functionen als bekannt angenommen werden, jedoch nur in ihren Grundzügen, nämlich etwa in dem Umfange, wie sie von HALPHEN in der ersten Hälfte des ersten Bandes (Cap. I—VII) seines Traité des fonctions elliptiques (Paris 1886) dargestellt worden ist.

Die Stellung der Elementargeometrie innerhalb der heutigen Wissenschaft ist so eigenthümlich, dass im vorliegenden Falle eine über den gerade behandelten Gegenstand hinausgehende Betrachtung gerechtfertigt sein dürfte.

Es liegt in der Natur der Sache, dass neue Gedanken in Schulbücher nur sehr langsam eindringen können. Leider aber ist, wie es scheint, auch nur eine kleine Anzahl von solchen Werken vorhanden, die elementare Gegenstände aus einem höheren Standpunkt und in modernem Geiste behandeln. Ueberhaupt hat seit den Tagen von MÖBIUS, STEINER und CHASLES das Interesse an elementargeometrischer Forschung stetig abgenommen. Glänzende Entdeckungen in anderen Gebieten, neue Richtungen innerhalb der Geometrie selbst haben neue Aufgaben gebracht, die die Kräfte der Mathematiker vollauf in Anspruch genommen haben. Heute ist die Geometrie des Euclides aus unseren herorragendsten Fachzeitschriften beinahe völlig verdrängt, und auch aus dem akademischen Unterricht ist sie nahezu verschwunden. Die noch vorhandene, an Umfang keineswegs geringe Production trägt vielfach ein antiquirtes Gepräge, so dass wohl Mancher den Eindruck davongetragen haben mag, diese »einfachen« Dinge seien »in der Hauptsache längst erledigt«.

Aber besteht denn thatsächlich ein solcher Gegensatz zwischen der Geometrie der Alten und der modernen Mathematik? Ist der alte Boden durch die herkömmliche, doch ziemlich primitive Art der Bearbeitung wirklich schon erschöpft? Sollten nicht vielmehr eben die Werkzeuge und Methoden, die zur Erschliessung neuer Gebiete gedient haben, geeignet sein, auch der elementaren Geometrie Schätze

neuer Art abzugewinnen? Und wenn dem so ist: ist es wünschenswerth, dass gerade die mathematische Disciplin, die für die Technik, wie für die physikalische Forschung die nothwendige Grundlage bildet, der bei der Erziehung unserer Jugend eine Hauptrolle zugetheilt ist, noch länger vernachlässigt wird? Sollten wir nicht die Wissenschaft von dem Raume, in dem wir nun einmal leben, mit allen zu Gebote stehenden Mitteln fördern, um das anschauliche Denken zu kräftigen, um ein wirksames Gegengewicht zu schaffen gegen den in unseren Tagen noch immer wachsenden, ja von Einigen beinahe systematisch gepflegten Hang zu einseitiger Abstraction?

Wenn solche Gedanken, wie es ja erfreulicher Weise den Anschein hat, breiteren Boden gewinnen, so darf der Verfasser vielleicht hoffen, dass man seiner Bemühung einige Aufmerksamkeit schenken wird. Möchte diese Arbeit, wenn auch nur an *einer* schmalen Stelle, die Kluft ausfüllen helfen, die die elementare Geometrie trennt von der lebendigen Wissenschaft! —

Mit Dankbarkeit muss ich der Theilnahme gedenken, die Herr FRANZ MEYER in Clausthal meinen Bestrebungen gewidmet hat. Er hat das fertige Manuscript, mit besonderer Rücksicht auf die pädagogische Brauchbarkeit der Darstellung, einer Durchsicht unterworfen; auch hat er die Freundlichkeit gehabt, eine Correctur zu übernehmen. Zu besonderem Danke bin ich der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften verpflichtet für die Unterstützung, die sie mir durch Aufnahme der vorliegenden Untersuchung in ihre Abhandlungen gewährt hat.

Marburg, im Mai 1893.

I. Abschnitt.

Geometrische Untersuchung der sphärischen Dreiecke.

§ 1.

Von der Gestalt eines Kugeldreiecks.

Wenn es sich darum handelt, den algebraischen Zusammenhang zwischen den goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks genau kennen zu lernen, so muss man sich von den Beschränkungen befreien, die in den elementaren Lehrbüchern dem Begriff eines sphärischen Dreiecks auferlegt werden; denn diese Beschränkungen haben ihren Grund nicht im Wesen der Sache, sondern in den praktischen Anwendungen, die ein Bedürfniss nach einer Untersuchung der allgemeinsten Kugeldreiecke nicht haben hervortreten lassen. Wir werden daher zunächst, nach dem Vorgange von Möbius, den elementaren Dreiecksbegriff abändern und erweitern[1]), um dann, über den von Möbius eingenommenen Standpunkt noch hinausgehend, den Begriff des sphärischen Dreiecks zu entwickeln, der einer algebraischen Untersuchung, wie der vorliegenden, angemessen erscheint.

Für den Inhalt dieses ersten Abschnittes (abgesehen von § 7) ist wesentlich nur der Begriff der Bewegung, der Verschiebung einer starren Figur auf der Kugelfläche, nicht aber der des Maasses, der Darstellung einer Winkelgrösse oder eines Bogens durch eine *Zahl.* Wir können Winkel, auch ohne Maasszahlen, durch die Begriffe $>$, $=$, $<$ mit einander vergleichen; wir können sagen, ob der erste auf den zweiten gelegt, ihn überragt, gerade deckt, oder hinter ihm zurückbleibt. Es ist ferner klar, was man in diesem Sinne unter der Summe oder Differenz zweier Winkel zu verstehen hat. Die

---

1) Die in § 1 vorgetragene grundlegende Auffassung der sphärischen Trigonometrie ist enthalten in den Abhandlungen von Möbius: »Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik« (1846), Ges. Werke Bd. II, S. 1 und »Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit« (1860) ebenda S. 71.

Summe aller Winkel um einen Punkt herum, den Winkel um den man drehen muss, damit jeder Punkt der Kugel seine ursprüngliche Lage wieder einnimmt, können wir mit 2π bezeichnen, ohne dabei an eine Zahl zu denken, u. s. w. In derselben Weise bezeichnen wir auch mit 2π den Umfang eines auf der Kugel gezogenen Hauptkreises, d. i. des Schnittes der Kugel mit einer durch den Mittelpunkt gelegten Ebene, oder eines Kreises, der mit sich selbst durch eine halbe Umdrehung (Drehung um den Winkel π) zur Deckung gelangt. Die hiermit vollzogene Abstraction ist übrigens für das Verständniss des Folgenden nicht nothwendig. Wer eine Schwierigkeit darin findet, der mag unter einem Bogen a oder Winkel α immerhin das Maass eines Kreisbogens oder Winkels verstehen, der auf einer Kugel vom Radius Eins gelegen ist.

Solche Winkel oder Bogen von Hauptkreisen, die sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden, werden wir bis auf Weiteres als gleich ansehen, da sie alle durch wiederholtes Anlegen des von vorn herein ausgezeichneten Winkels oder Bogens 2π aus einem unter ihnen hervorgehen. Wir werden dann annehmen dürfen, dass Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks zwischen den Grenzen 0 und 2π enthalten sind; und es wird nun darauf ankommen, dass wir uns von der Gestalt der hiernach möglichen Kugeldreiecke Rechenschaft geben.

Wir denken uns zunächst für die Winkel um irgend einen Punkt der Kugelfläche herum einen Drehungssinn festgelegt, in dem sie positiv gerechnet werden sollen, etwa den Drehungssinn, der für einen ausserhalb der Kugel in der Nähe des Punktes stehenden Beobachter dem Sinne der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Verschieben wir sodann diesen Punkt über die ganze Kugelfläche, so haben wir damit auch für alle anderen Punkte der Kugel einen positiven Drehungssinn bestimmt.

Es seien nun die Punkte A_1, A_2, A_3 der Kugel durch Hauptkreise verbunden. Auf jedem dieser Kreise nehmen wir ebenfalls einen positiven Drehungssinn willkürlich an, und bezeichnen mit a_1, a_2, a_3 die zwischen 0 und 2π enthaltenen Bogen, die man durchlaufen muss, um von A_2 im positiven Sinn nach A_3, von da nach A_1, und von hier aus wieder nach A_2 zu gelangen. Ferner bezeichnen wir mit α_1 den zwischen 0 und 2π enthaltenen Winkel, um den man den Hauptkreis A_3A_1, unter Festhaltung der Ecke A_1, im positiven

Sinne drehen muss, damit seine positive Richtung mit der positiven Richtung des Hauptkreises $A_1 A_2$ zusammenfällt; und entsprechend definiren wir zwei weitere Winkel α_2 und α_3.

Der Inbegriff der sechs Stücke a_1, a_2, a_3, α_1, α_2, α_3 ist nun für uns ein »sphärisches Dreieck«. Die Winkel α_i nennen wir schlechthin die »Winkel«, die Bogen a_i die »Seiten« des Dreiecks[1]). *Je zwei Dreiecke, die in diesen sechs Stücken übereinstimmen, gelten in unserer Untersuchung als identisch*, auch wenn sie auf der Kugel verschiedene Lagen haben und vielleicht gar nicht congruent, sondern nur symmetrisch sein sollten.

Zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks findet, bei unserer Definition (aber nicht bei der Definition der elementaren Lehrbücher) ein *vollkommenes Reciprocitätsverhältniss* statt. Zu jedem Hauptkreis auf der Kugel gehören nämlich zwei Pole, die gemeinsamen Schnittpunkte aller der Hauptkreise, die den ersten rechtwinklig treffen. Wir ordnen nun jedem Hauptkreis mit bestimmtem Drehungssinn den Pol zu, der für einen von aussen auf die Kugel blickenden Beobachter, bei Durchlaufung des Hauptkreises im positiven Sinne, zur Linken liegt. Damit erhalten wir offenbar ein einfaches Mittel, die Winkel um einen Punkt herum mit Kreisbogen zu vergleichen, und umgekehrt. Man gelangt so zur Construction des sogenannten *Polardreiecks*, dessen Ecken die Pole der drei Seiten des gegebenen Dreiecks sind, und dessen Seiten wiederum die Ecken des gegebenen Dreiecks zu Polen haben. Dieses Polardreieck hat, wie unmittelbar ersichtlich, Seiten $= \alpha_i$ und Winkel $= a_i$. *Die Kugeldreiecke ordnen sich also zu Paaren, die durch Vertauschung der Seiten und Winkel in einander übergehen.*

---

1) In den Elementarbüchern werden nicht die Winkel α_i, sondern deren Nebenwinkel $\pi - \alpha_i$ durch besondere Zeichen dargestellt, und »Winkel« des Dreiecks genannt. Dies ist auch bei vielen Anwendungen ganz am Platze, namentlich in der Geodäsie, wo eben die inneren Dreieckswinkel unmittelbar abgelesen werden. Bei rein theoretischen Entwickelungen aber ist ein solches Verfahren unzweckmässig, da es zu einer Menge unnöthiger Rechnungen und sonstiger Weitläufigkeiten Anlass gibt und die Symmetrie der Formeln zerstört. — Man könnte leicht allen Anforderungen gerecht werden, wenn man beim Aufbau der Trigonometrie die dem Wesen der Sache entsprechenden Bezeichnungen wählen wollte, um dann am Schlusse die für den praktischen Gebrauch umgerechneten Formeln tabellarisch zusammenzustellen.

Da wir die positiven Richtungen der drei Hauptkreise willkürlich angenommen haben, so können wir drei gegebene Punkte A_1, A_2, A_3 im Allgemeinen durch acht verschiedene Dreiecke verbinden; und diese Zahl erhöht sich auf 16, da ja auch der Drehungssinn für die Winkel um einen Punkt herum beliebig war. Die Fig. 1 zeigt in stereographischer Projection die Gestalt von vieren der zuerst genannten acht Dreiecke, die zu wesentlich verschiedenen Dreiecksformen führen; aus ihnen kann man die übrigen leicht ableiten.

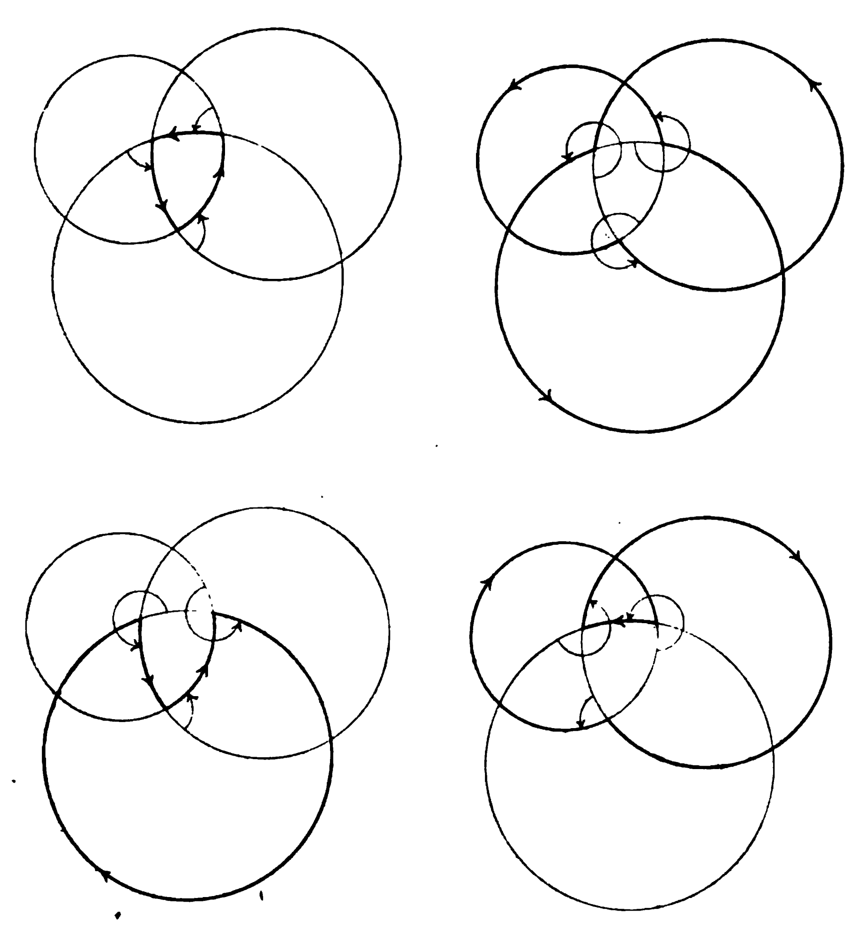


Fig. 1.

Es ist unter Umständen zweckmässig, zwei Dreiecke auch dann als nicht verschieden anzusehen, wenn sie durch Umkehrung des positiven Drehungssinnes der Winkel in einander übergehen. Nach dem Princip der Dualität wird man dann auch zwei solche Dreiecke

als gleichwerthig betrachten, die dadurch aus einander hervorgehen, dass man den positiven Drehungssinn aller drei Seiten gleichzeitig in den entgegengesetzten verwandelt. Dann werden zwei der in Fig. 1 verzeichneten Dreiecke überflüssig, und es gehören nur noch vier »verschiedene« Dreiecke zu gegebenen Ecken.

§ 2.

Ungleichungen für die Seiten und Winkel.

Die Winkel eines sphärischen Dreiecks sind durch die Seiten vollständig bestimmt, und umgekehrt, abgesehen von der bereits besprochenen Willkür. Man kann aber drei gegebene Kreisbogen a_1, a_2, a_3 nicht immer zu einem Kugeldreieck zusammensetzen; die Bogen a_i müssen vielmehr einem System von vier Ungleichungen genügen, oder genauer einem von acht solchen Ungleichungssystemen. Um diese Bedingungen in zweckmässiger Form darzustellen, führen wir statt der drei Bogen a_i vier Kreisbogen s_i ein, deren Summe gleich π ist, durch die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} 2s_0 = 2\pi - a_1 - a_2 - a_3 \\ 2s_1 = - a_1 + a_2 + a_3 \\ 2s_2 = \phantom{2\pi - {}} a_1 - a_2 + a_3 \\ 2s_3 = \phantom{2\pi - {}} a_1 + a_2 - a_3 . \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Bogen, deren Gebrauch für unsere ganze Analyse von der grössten Wichtigkeit ist, stellen sich, wie der Leser leicht beweisen wird, die genannten Ungleichungssysteme dar, wie folgt:

(2)

	A_0	A_0'	A_1	A_1'	A_2	A_2'	A_3	A_3'
s_0	$\geqq 0$	$\leqq -\pi$	$\geqq -\pi$	$\leqq 0$	$\geqq -\pi$	$\leqq 0$	$\geqq -\pi$	$\leqq 0$
s_1	$\geqq 0$	$\leqq \pi$	$\geqq \pi$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq \pi$	$\geqq 0$	$\leqq \pi$
s_2	$\geqq 0$	$\leqq \pi$	$\geqq 0$	$\leqq \pi$	$\geqq \pi$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq \pi$
s_3	$\geqq 0$	$\leqq \pi$	$\geqq 0$	$\leqq \pi$	$\geqq 0$	$\leqq \pi$	$\geqq \pi$	$\leqq 0$

Die acht Dreiecke mit verschiedenen Seiten, die ihre Ecken in drei gegebenen Punkten haben, vertheilen sich auf die hierdurch definirten acht Dreiecksschaaren. Die Schaar A_0 enthält die construirbaren Dreiecke, deren Seiten zwischen den Grenzen 0 und π

liegen, also die Dreiecke, die in der elementaren Trigonometrie allein betrachtet zu werden pflegen. Die Dreiecke der Schaar A_1 entstehen aus denen der Schaar A_0 durch die Substitution

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = a_2 + \pi, \quad a_3' = a_3 + \pi;$$

oder auch durch die Substitution

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = 2\pi - a_2, \quad a_3' = 2\pi - a_3;$$

hier liegt also a_1 zwischen 0 und π, a_2 und a_3 dagegen liegen zwischen π und 2π; endlich entstehen die Dreiecke der Schaar A_k' aus denen der Schaar A_k durch die Substitution

$$a_1' = 2\pi - a_1, \quad a_2' = 2\pi - a_2, \quad a_3' = 2\pi - a_3;$$

die Seiten der Dreiecke A_0' sind also zwischen π und 2π enthalten, während bei der Schaar A_1' a_2 und a_3 zwischen 0 und π liegen, a_1 dagegen zwischen π und 2π.

Definiren wir ferner vier Winkel σ_i, deren Summe wieder π ist, durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} 2\sigma_0 = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\sigma_1 = \quad - \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\sigma_2 = \quad \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\sigma_3 = \quad \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \end{cases}$$

so erhalten wir den Ungleichungen (2) ganz entsprechende Ungleichungen für die Winkel. Wir wollen diese Ungleichungen, ohne sie besonders hinzuschreiben, in derselben Reihenfolge mit A_i, A_i' bezeichnen ($i = 0, 1, 2, 3$). Es gilt dann der der Anschauung unmittelbar zu entnehmende Satz, dass bei einem sphärischen Dreieck jede der Combinationen

$$(A_i, \mathsf{A}_i), \quad (A_i, \mathsf{A}_i'), \quad (A_i', \mathsf{A}_i), \quad (A_i', \mathsf{A}_i')$$

vorkommen kann, dagegen keine der Combinationen

$$(A_i, \mathsf{A}_k), \quad (A_i, \mathsf{A}_k'), \quad (A_i', \mathsf{A}_k), \quad (A_i', \mathsf{A}_k'),$$

wenn $i \neq k$. Die 16 Dreiecke mit gegebenen Ecken vertheilen sich also auf die 16 Schaaren, die den zulässigen Verbindungen der Ungleichungen A_i, A_i', A_i, A_i' entsprechen.

Die aufgestellten Ungleichungen zwischen den Seiten oder den Winkeln haben sich uns ergeben ohne vorherige Entwickelung der Formeln der sphärischen Trigonometrie (ja sogar ohne Hülfe des Maass-

begriffs). Anders verhält es sich mit den Ungleichungen, in denen Seiten und Winkel zugleich vorkommen. Diese spielen aber in unserer Untersuchung keine Rolle, und werden daher ganz ausserhalb des Kreises der Betrachtung bleiben.

Betrachten wir die Seiten a_i *als veränderlich, so definiren die Ungleichungen* (2) *gewisse Gebiete, innerhalb deren sich diese Stücke bewegen dürfen, und sie schliessen zugleich andere Gebiete aus.* Es ist wünschenswerth, auch die ausgeschlossenen Gebiete in einer der Tafel (2) ähnlichen Form darzustellen. Man erhält die fragliche Tafel, oder vielmehr *vier* verschiedene Tafeln, deren Verticalreihen analog der Bezeichnung A_i, A_i' mit B_{ik}, B_{ik}' bezeichnet werden mögen, aus (2) einfach dadurch, dass man in der k^{ten} Horizontalreihe von (2) $[k = 0, 1, 2, 3]$ die Zeichen $\geqq$ und $\leqq$ mit einander vertauscht. In der That, nimmt man an, dass $\pi \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq 0$ ist, so ist entweder

$$\begin{array}{llllll} A_0) & s_0 \geqq 0 & s_1 \geqq 0 & s_2 \geqq 0 & s_3 \geqq 0, & \text{oder} \\ B_{00}) & s_0 \leqq 0 & s_1 \geqq 0 & s_2 \geqq 0 & s_3 \geqq 0, & \text{oder} \\ B_{01}) & s_0 \geqq 0 & s_1 \leqq 0 & s_2 \geqq 0 & s_3 \geqq 0. & \end{array}$$

Aus diesen Fällen gehen sodann die übrigen durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 und durch die angegebenen Substitutionen hervor.

Es gibt also, wenn man von Grenzfällen absieht, 16 Typen vollständig reeller Dreiecke, 32 Typen solcher Dreiecke, bei denen nur die Seiten, und ebenso 32 Typen von Dreiecken, bei denen nur die Winkel reell sind.

§ 3.

Uebergangsformen.

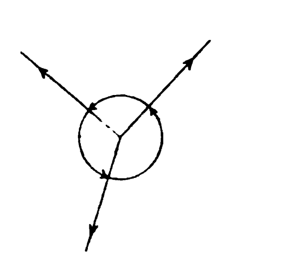
Die in § 1 und § 2 geschilderten Gestalten sphärischer Dreiecke bilden keineswegs getrennte Mannigfaltigkeiten, sondern sie können, bei passender Aenderung der Seiten und Winkel, *stetig* in einander übergeführt werden. Dazwischen schalten sich gewisse Dreiecke speciellen Charakters, ausgeartete Dreiecke ein. Diese Grenzfälle sind nicht nur an sich interessant, sondern sie sind auch für unsere Untersuchung von Bedeutung; sie sollen daher im Folgenden ebenfalls verzeichnet werden. Es wird dabei genügen, unter diesen besonderen Dreiecken die zu betrachten, die noch von *zwei* Constanten

abhängen (also von einer Constanten weniger als das allgemeine Dreieck); ausserdem werden wir von je vier solchen Dreiecken, die durch die Substitutionen $a_i' = \pm a_i$, $\alpha_i' = \pm \alpha_i$ zusammenhängen, immer nur einen Repräsentanten aufstellen.

Die genannten Dreiecke zerfallen in zwei verschiedene Classen. Die Dreiecke der ersten Classe wollen wir *Grenzdreiecke* nennen, weil sie die Mannigfaltigkeit der reellen Dreiecke abgrenzen gegen die zu Schluss des § 2 definirten Mannigfaltigkeiten von Dreiecken, die zwar reelle Seiten, aber keine reellen Winkel, oder reelle Winkel, aber keine reellen Seiten haben.

Solcher Dreiecke gibt es acht verschiedene Arten, von denen wir aber nur vier aufzuführen brauchen, da die übrigen aus zweien unter ihnen durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 erhalten werden. Sie sind gekennzeichnet durch die nach dem Modul 2π zu nehmenden Congruenzen[1]:

$a_1 \equiv 0 \quad a_2 \equiv 0 \quad a_3 \equiv 0$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0$	$\alpha_1 \equiv 0 \quad \alpha_2 \equiv 0 \quad \alpha_3 \equiv 0$ $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0$



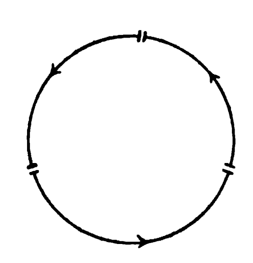




Fig. 2.

$a_1 \equiv 0 \quad a_2 \equiv \pi \quad a_3 \equiv \pi$ $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0$	$\alpha_1 \equiv 0 \quad \alpha_2 \equiv \pi \quad \alpha_3 \equiv \pi$ $-a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0.$

(S. Fig. 3.)

---

1) Das von Gauss in die Analysis eingeführte Congruenzzeichen $\equiv$, in der Verbindung $a \equiv b \pmod{c}$ (a congruent zu b modulo c oder nach dem Modul c) gebraucht, hat die Bedeutung: a unterscheidet sich von b um ein ganzzahliges Vielfaches von c: $a = b + kc$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). $a \equiv 0 \pmod{2\pi}$ heisst also: Der Bogen a ist ein mehrmals im positiven oder negativen Sinn vollständig durchlaufener Hauptkreis.

Jedes der hierhergehörigen Dreiecke vermittelt den Uebergang zwischen mehreren der 16 in § 2 aufgezählten Dreieckstypen, und zwar immer zwischen solchen Dreiecksmannigfaltigkeiten, die in der

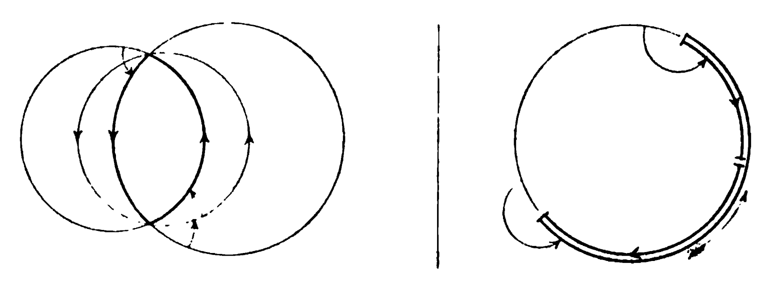


Fig. 3.

Tafel (2) des § 2 einen gemeinsamen unteren Index haben. Die Art, wie die einzelnen Mannigfaltigkeiten durch Vermittelung der Grenzdreiecke zusammenhängen, lässt sich durch die folgende einfache Formel darstellen:

$\alpha_1 \equiv 0,\ \alpha_2 \equiv 0,\ \alpha_3 \equiv 0$	$\alpha_1 \equiv 0,\ \alpha_2 \equiv 0,\ \alpha_3 \equiv 0$
$(A_k \mathsf{A}_k) \quad (A_k \mathsf{A}_k')$	$(A_k \mathsf{A}_k) \longleftrightarrow (A_k \mathsf{A}_k')$
$\updownarrow \qquad \updownarrow$	
$(A_k' \mathsf{A}_k) \quad (A_k' \mathsf{A}_k')$	$(A_k' \mathsf{A}_k) \longleftrightarrow (A_k' \mathsf{A}_k')$,

worin die Congruenzen nunmehr nach dem Modul π (nicht 2π) zu nehmen sind. Ein vorgelegtes Grenzdreieck gehört im Allgemeinen zu einem ganz bestimmten Index k, und es vermittelt überdies den Uebergang zwischen zwei ganz bestimmten unserer 16 Dreiecksmannigfaltigkeiten. Die acht Arten von Grenzdreiecken zerfallen daher jede noch in $4 \cdot 2$ Unterarten, so dass man im Ganzen 64 Fälle auseinanderzuhalten hat. Sei z. B. $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 0$ mod. 2π, so sind die folgenden acht Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{cases} 0 < a_1,\ a_2,\ a_3 < \pi : (A_0 \mathsf{A}_0) \longleftrightarrow (A_0 \mathsf{A}_0'), \\ \pi < a_1,\ a_2,\ a_3 < 2\pi : (A_0' \mathsf{A}_0) \longleftrightarrow (A_0' \mathsf{A}_0'); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a_1 < \pi < a_2,\ a_3 < 2\pi : (A_1 \mathsf{A}_1) \longleftrightarrow (A_1 \mathsf{A}_1'), \\ 0 < a_2,\ a_3 < \pi < a_1 < 2\pi : (A_1' \mathsf{A}_1) \longleftrightarrow (A_1' \mathsf{A}_1'); \end{cases}$$

u. s. w. Die Fig. 2 bringt, wenn der rechter Hand dargestellte Kreis selbst ein Hauptkreis der Kugel ist, nur den ersten dieser Unterfälle

zur Anschauung. Die übrigen Annahmen führen zum Theil auf mehrfach überdeckte Kreisbogen. —

Die besonderen Dreiecke der zweiten von uns zu betrachtenden Classe nennen wir *Uebergangsdreiecke.* Sie vermitteln den Zusammenhang zwischen Dreiecksmannigfaltigkeiten mit verschiedenem unterem Index. Von ihnen haben wir *zwölf* Arten zu unterscheiden, von denen geeignete Repräsentanten durch die folgenden nach dem Modul 2π zu nehmenden Congruenzen definirt sind:

$a_1 \equiv 0$	$\alpha_1 \equiv 0$	$a_1 \equiv \pi$	$\alpha_1 \equiv \pi$
$a_2 + a_3 \equiv 0$	$\alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0$	$a_2 - a_3 \equiv \pi$	$\alpha_2 - \alpha_3 \equiv \pi$

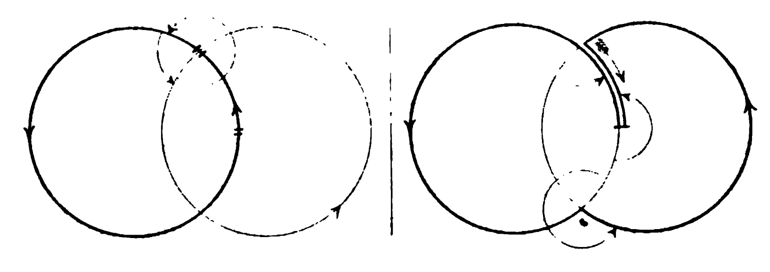


Fig. 4.

$a_1 \equiv 0$	$\alpha_1 \equiv \pi$	$a_1 \equiv \pi$	$\alpha_1 \equiv 0$
$a_2 - a_3 \equiv 0$	$\alpha_2 + \alpha_3 \equiv \pi$	$a_2 + a_3 \equiv \pi$	$\alpha_2 - \alpha_3 \equiv 0$

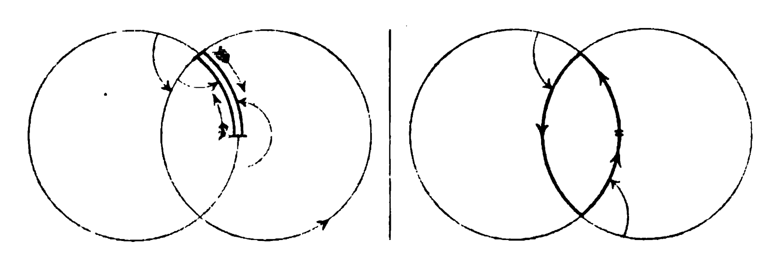


Fig. 5.

Bei der Darstellung des durch die Uebergangsdreiecke vermittelten Zusammenhangs zwischen den verschiedenen Mannigfaltigkeiten reeller Dreiecke können wir die beiden ersten Fälle zusammenfassen, und ebenso die beiden letzten; wir erhalten demnach nur zwei wesentlich verschiedene Formeln, aus denen die sechs übrigen durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehen:

$a_1 \equiv 0,\ \alpha_1 \equiv 0$ oder $a_1 \equiv \pi,\ \alpha_1 \equiv \pi$ (mod. 2π):

$$\begin{array}{cccc} (A_2\mathsf{A}_2) & (A_2\mathsf{A}_2') & (A_2'\mathsf{A}_2) & (A_2'\mathsf{A}_2') \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (A_3'\mathsf{A}_3') & (A_3'\mathsf{A}_3) & (A_3\mathsf{A}_3') & (A_3\mathsf{A}_3)\,; \end{array}$$

$a_1 \equiv 0,\ \alpha_1 \equiv \pi$ oder $a_1 \equiv \pi,\ \alpha_1 \equiv 0$ (mod. 2π):

$$\begin{array}{cccc} (A_0\mathsf{A}_0) & (A_0\mathsf{A}_0') & (A_0'\mathsf{A}_0) & (A_0'\mathsf{A}_0') \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (A_1'\mathsf{A}_1') & (A_1'\mathsf{A}_1) & (A_1\mathsf{A}_1') & (A_1\mathsf{A}_1)\,. \end{array}$$

Jede unserer 12 Dreiecksarten umfasst demnach vier Unterarten, so dass im Ganzen 48 Fälle zu unterscheiden sind.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass zwischen den in § 2 gefundenen 16 Arten reeller Dreiecke ein stetiger Uebergang möglich ist, der noch in mannigfacher Weise ausgeführt werden kann. Es ist aber festzuhalten, dass wir bei der Herleitung dieses Satzes von der Voraussetzung ausgegangen sind, dass Dreiecke, deren Seiten und Winkel nur um Vielfache von 2π verschieden sind, als identisch gelten, dass also eine sprungweise Aenderung um 2π auch als eine *stetige* Aenderung gilt.

Später (in § 10 des zweiten Abschnittes) werden wir lernen, die in gegenwärtigem Paragraphen ausgeführten Uebergänge noch tiefer aufzufassen. Wir werden dann einen vollständigen Einblick in den Zusammenhang der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gewinnen, die von allen reellen sphärischen Dreiecken gebildet wird.

§ 4.

Nachbardreiecke.

Gehen wir nicht, wie in § 1, von drei bestimmten Punkten der Kugel aus, sondern von einem Dreikant oder Dreiflach, dessen Scheitel der Mittelpunkt der Kugel ist, so gelangen wir zu einer grösseren Zahl von sphärischen Dreiecken, deren gegenseitige Beziehungen wir nun ermitteln wollen.

Unter den Schnittpunkten der Kanten unseres Dreikants mit der Kugelfläche können wir auf 8 Arten je einen so auswählen, dass auf jeder Kante ein Punkt liegt. Drei solche Punkte lassen sich dann, nach § 1, durch 16 verschiedene Dreiecke verbinden. Von

den 8 . 16 = 128 Dreiecken, die auf diese Weise entstehen, stimmen aber immer je zwei solche überein, die durch die Spiegelung am Mittelpunkte der Kugel in einander übergehen. Die 64 wirklich verschiedenen Dreiecke, die hiernach übrig bleiben, bezeichnen wir als *Nachbardreiecke*. Ihre Zahl reducirt sich auf 16, wenn man noch je vier solche Dreiecke zusammenfasst, die durch gleichzeitige Vorzeichenwechsel sämmtlicher Seiten oder sämmtlicher Winkel in einander übergeführt werden (vgl. den Schluss von § 1).

Die Seiten und Winkel der 64 Nachbardreiecke hängen auf sehr einfache Weise, nämlich durch *lineare Substitutionen* zusammen; und diese Substitutionen bilden der Natur der Sache nach eine *Gruppe*, d. h. ihr Inbegriff hat die Eigenschaft, dass die aus zwei hinter einander ausgeführten Substitutionen zusammengesetzte Substitution der nämlichen Gesammtheit von Substitutionen angehört[1]). Diese Gruppe, mit mehreren ihrer Untergruppen, ist für unsere Betrachtung von der grössten Bedeutung. Wir werden für sie daher ein besonderes Zeichen, $\mathfrak{G}_{64}$, anwenden, das zugleich die Zahl ihrer Substitutionen angibt. Wir haben nun die Eigenschaften von $\mathfrak{G}_{64}$ genauer zu untersuchen.

Gehen wir von einem der 64 Nachbardreiecke aus, so gelangen wir zunächst zu *drei* anderen, durch die folgenden Substitutionen (in denen die einzelnen Grössen immer nur mod. 2π bestimmt sind):

(1)

	a_1'	a_2'	a_3'	α_1'	α_2'	α_3'.
S_0	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
S_1	a_1	$\pi + a_2$	$\pi + a_3$	$2\pi + \alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$
S_2	$\pi + a_1$	a_2	$\pi + a_3$	$-\alpha_1$	$2\pi + \alpha_2$	$-\alpha_3$
S_3	$\pi + a_1$	$\pi + a_2$	a_3	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$2\pi + \alpha_3$

1) Wir erinnern an die bekannte Darstellung der Substitutionen einer Gruppe durch einzelne Buchstaben, wie S, T, u. s. w., die nach Art von Producten aneinandergereiht werden. $S . T$ bedeutet die Substitution, die entsteht, wenn man erst S, *nachher* T ausführt. $S^0 = T^0 = \ldots = 1$ bedeutet die Substitution, die jede der transformirten Grössen in sich selbst überführt, und also nichts ändert, die identische Substitution oder Identität. S^{-1} ist die Substitution, die vor oder nach S angewendet, zur Identität führt, die »Entgegengesetzte von S«, deren Wirkung die Wirkung von S aufhebt: $S^{-1}S = SS^{-1} = S^0 = 1$. $T' = S^{-1}TS$ heisst »die Transformirte von T vermöge S«. Transformirt man alle Substitutionen $T^0, T_1, T_2, \ldots$ einer Gruppe vermöge derselben Substitution S, so entsteht wieder eine Gruppe, die Transformirte der gegebenen Gruppe vermöge S.

und ebenso entstehen drei neue Dreiecke durch die dualistisch entgegenstehenden Substitutionen:

(2)

	a_1'	a_2'	a_3'	α_1'	α_2'	α_3'
Σ_0	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
Σ_1	$2\pi + a_1$	$-a_2$	$-a_3$	α_1	$\pi + \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$
Σ_2	$-a_1$	$2\pi + a_2$	$-a_3$	$\pi + \alpha_1$	α_2	$\pi + \alpha_3$
Σ_3	$-a_1$	$-a_2$	$2\pi + a_3$	$\pi + \alpha_1$	$\pi + \alpha_2$	α_3

Die Substitutionen S_i bilden für sich eine Gruppe, und ebenso die Substitutionen Σ_i.

Beide zusammen erzeugen, beliebig oft hinter einander ausgeführt, eine Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$ von 16 involutorischen (und damit auch vertauschbaren) Substitutionen, eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$.[1]

Diese Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$ selbst wird ebenfalls noch von (vertauschbaren) involutorischen Substitutionen gebildet. Sie entsteht durch Zusammensetzung der Substitutionen (1) *und* (2) *mit denen der folgenden Gruppe $\mathfrak{H}_4$:*

(3)

	a_1'	a_2'	a_3'	α_1'	α_2'	α_3'
1	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
T	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	α_1	α_2	α_3
T	a_1	a_2	a_3	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$
$T\mathrm{T}$	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$

Wir haben in der letzten Tafel die identische Substitution mit 1 bezeichnet, in den Tafeln (1) und (2) ist sie der Gleichförmigkeit halber S_0 und Σ_0 genannt worden.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit des angegebenen Satzes, indem man der Reihe nach die folgenden Formeln entwickelt:

1) Eine Substitution S heisst *involutorisch*, wenn sie, zweimal hinter einander angewendet, zur Identität führt, also der symbolischen Gleichung $S^2 = 1$ oder $S = S^{-1}$ genügt. Die Identität $S^0 = 1$, die nicht die Periode 2, sondern die Periode 1 hat, nennt man gewöhnlich nicht involutorisch; doch kann der Ausdruck »Gruppe von involutorischen Substitutionen« zu keinem Missverständniss führen.

In einer Gruppe von involutorischen Substitutionen sind je zwei Substitutionen S und T *vertauschbar*, d. h., die Reihenfolge ist gleichgültig, in der man sie anwendet: es besteht die symbolische Gleichung: $ST = TS$, oder $T^{-1}ST = S$, oder $S^{-1}TS = T$.

$$(4)\qquad \begin{cases} S_1^2 = S_2^2 = S_2^3 = S_1\,S_2\,S_3 = 1\,, \\ \Sigma_1^2 = \Sigma_2^2 = \Sigma_3^2 = \Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3 = 1\,, \\ T^2 = \mathrm{T}^2 = (T\mathrm{T})^2 = T.\mathrm{T}.(T\mathrm{T}) = 1\,, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} S_i\,T = T\,S_i, \qquad S_i\,\mathrm{T} = \mathrm{T}\,S_i, \\ \qquad S_i\,\Sigma_k = \Sigma_k\,S_i, \qquad (i, k = 1, 2, 3) \\ \Sigma_i\,\mathrm{T} = \mathrm{T}\,\Sigma_i, \qquad \Sigma_i\,T = T\,\Sigma_i\,. \end{cases}$$

Es geht daraus hervor, dass man jede Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$ in die Form setzen kann

$$(6)\qquad T^e\,S_i\,\mathrm{T}^\varepsilon\,\Sigma_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3;\; e, \varepsilon = 0, 1),$$

und zwar nur auf eine *einzige* Weise, abgesehen natürlich von der Anordnung der Factoren, die gleichgültig ist.

Wir haben hier die sämmtlichen Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$ durch die acht erzeugenden Operationen S_i, Σ_i, T, T ausgedrückt, und haben damit eine Darstellung der Gruppe gewonnen, die deren wesentlichste Eigenschaften auf den ersten Blick erkennen lässt. Man kann aber daneben mit Nutzen auch ein kleineres System, ein System von nur sechs erzeugenden Operationen verwenden, das den Vortheil bietet, die Zerlegung einer irgendwie gegebenen Substitution von $\mathfrak{G}_{64}$ ohne jede Rechnung sichtbar zu machen.

Bemerken wir nämlich, dass jede Substitution von $\mathfrak{G}_{64}$ aus einem bestimmten Vorzeichenwechsel der Grössen a_i, α_i, verbunden mit der Hinzufügung gewisser Vielfacher von π besteht, und dass die Substitutionen von $\mathfrak{G}_{64}$ durch die vorkommenden 2^6 Vorzeichenwechsel allein schon bestimmt sind, so bietet sich von selbst die Einführung der erzeugenden Operationen $\mathrm{T}S_i$, $T\Sigma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dar, wo z. B. $\mathrm{T}S_1$ die Substitution

$$a_1' = a_1, \qquad a_2' = \pi + a_2, \qquad a_3' = \pi + a_3\,,$$
$$\alpha_1' = 2\pi - \alpha_1, \qquad \alpha_2' = \alpha_2, \qquad \alpha_3' = \alpha_3$$

bedeutet. Diese Substitutionen führen nur je einen Vorzeichenwechsel herbei; man kann daher jede Substitution von $\mathfrak{G}_{64}$, wieder nur auf eine einzige Weise, in die Form

$$(7)\qquad (\mathrm{T}S_1)^{e_1}\,(\mathrm{T}S_2)^{e_2}\,(\mathrm{T}S_3)^{e_3}\,(T\Sigma_1)^{\varepsilon_1}\,(T\Sigma_2)^{\varepsilon_2}\,(T\Sigma_3)^{\varepsilon_3}$$

bringen, worin die Exponenten e_i, ε_i die Zahlen 0 und 1 bedeuten. Von dieser Darstellung von $\mathfrak{G}_{64}$ durch eine sogenannte *Basis* kehrt man dann zur Darstellung (6) zurück mit Hülfe der Formeln

$$
(8) \qquad \begin{aligned} (\mathrm{T}S_2)(\mathrm{T}S_3) &= S_1, \quad (\mathrm{T}S_1)(\mathrm{T}S_2)(\mathrm{T}S_3) = \mathrm{T}, \\ (T\Sigma_2)(T\Sigma_3) &= \Sigma_1, \quad (T\Sigma_1)(T\Sigma_2)(T\Sigma_3) = T. \end{aligned}
$$

Es hat keine Schwierigkeit, die sämmtlichen Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$ zu bestimmen. Für uns mag es indessen genügen, noch eine dieser Gruppen anzugeben, die von vier Substitutionen gebildet wird:

(9)

	a_1'	a_2'	a_3'	α_1'	α_2'	α_3'	
$S_0\Sigma_0$	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3	
$S_1\Sigma_1$	a_1	$\pi - a_2$	$\pi - a_3$	α_1	$\pi - \alpha_2$	$\pi - \alpha_3$	(mod. $\mathfrak{K}$)
$S_2\Sigma_2$	$\pi - a_1$	a_2	$\pi - a_3$	$\pi - \alpha_1$	α_2	$\pi - \alpha_3$	
$S_3\Sigma_3$	$\pi - a_1$	$\pi - a_2$	a_3	$\pi - \alpha_1$	$\pi - \alpha_2$	α_3	

Das rechter Hand hinzugefügte Zeichen wird im nächsten § seine Erklärung finden. Eben dort wird das hier noch belanglose Vielfache von 2π Bedeutung gewinnen, das wir in die Formeln (1) und (2) aufgenommen haben, um nicht sogleich wieder neue Bezeichnungen einführen zu müssen.

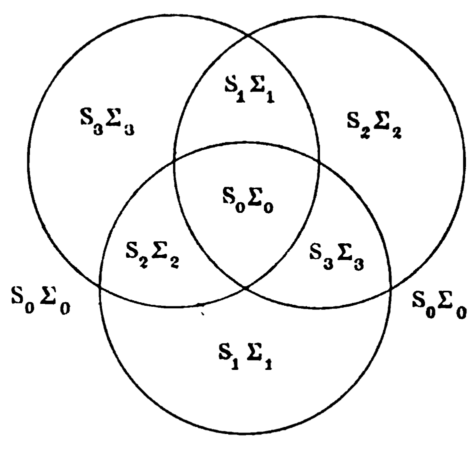


Fig. 6.

Es wird keine Schwierigkeit machen, sich in allen Fällen von der gegenseitigen Lage der Nachbardreiecke Rechenschaft zu geben. Am Besten denkt man sich die 64 Dreiecke zu je 16 aus den vier Dreiecken (9) hervorgegangen, deren gegenseitige Lage durch die schematische Figur 6 dargestellt wird.

§ 5.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$.

Die Einfachheit der Ergebnisse des § 4 war dadurch bedingt, dass wir Dreiecke als identisch ansahen, deren Seiten und Winkel sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden. Nunmehr wollen wir einen anderen Standpunkt einnehmen, der uns zu tiefer liegenden Einsichten verhelfen soll, indem wir alle diese Dreiecke auseinander halten[1]).

Wir denken uns die Substitutionen S_i, Σ_i, T, T nach wie vor durch die Formeln (1), (2), (3) des § 4 definirt, betrachten aber jetzt die Substitutionen der Gruppe

$$a_i' = a_i + 2k_i\pi, \quad \alpha_i' = \alpha_i + 2\varkappa_i\pi, \tag{1}$$

worin k_i und $\varkappa_i$ irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, als verschieden von der identischen Substitution. Nun werden wir natürlich die Relationen (4), (5), (8) des § 4 in dieser einfachen Form nicht mehr aufrecht erhalten können. Es entsteht die Frage, welche Relationen an ihre Stelle treten.

Um dies zu erkennen, denken wir uns zunächst die Formeln (5), § 4, so geschrieben, dass auf der rechten Seite die identische Substitution erscheint (z. B. $S_i\Sigma_k S_i^{-1}\Sigma_k^{-1} = 1$), und bilden nun die auf der linken Seite stehenden Substitutionen:

	a_1'	a_2'	a_3'	α_1'	α_2'	α_3'
S_1^2	a_1	$2\pi + a_2$	$2\pi + a_3$	$4\pi + \alpha_1$	α_2	α_3
$S_1 S_2 S_3$	$2\pi + a_1$	$2\pi + a_2$	$2\pi + a_3$	$2\pi + \alpha_1$	$-2\pi + \alpha_2$	$2\pi + \alpha_3$
$S_1 T S_1^{-1} T^{-1}$	a_1	$2\pi + a_2$	$2\pi + a_3$	α_1	α_2	α_3
$S_1 \mathrm{T} S_1^{-1} \mathrm{T}^{-1}$	a_1	a_2	a_3	$4\pi + \alpha_1$	α_2	α_3
$S_1 \Sigma_1 S_1^{-1} \Sigma_1^{-1}$	a_1	$2\pi + a_2$	$2\pi + a_3$	α_1	$-2\pi + \alpha_2$	$-2\pi + \alpha_3$
$S_2 \Sigma_3 S_2^{-1} \Sigma_3^{-1}$	$2\pi + a_1$	a_2	a_3	$-2\pi + \alpha_1$	α_2	α_3

1) Der in den folgenden §§ auseinandergesetzte Dreiecksbegriff ist nicht zu verwechseln mit dem etwas engeren, den Herr F. Klein neuerdings zu Zwecken der Functionentheorie eingeführt hat (Math. Ann. Bd. 37, S. 578 u. ff.). Für Herrn Klein ist das »Dreieck« eine einfach zusammenhängende, über die Kugel gespannte Fläche. Die Substitutionen, die »Dreiecke« mit denselben Ecken verbinden, bilden bei ihm *keine* Gruppe.

Wie man sieht, gehören alle diese Substitutionen, und die analogen, die durch Vertauschung der Seiten und Winkel, und durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 aus ihnen hervorgehen, zu der durch die Formeln (1) definirten Gruppe. Sie erzeugen aber, in beliebiger Wiederholung hinter einander ausgeführt, keineswegs diese Gruppe selbst, sondern nur eine Untergruppe, als deren erzeugende Operationen die folgenden und die zu ihnen analogen Substitutionen gelten können:

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & 2\pi + a_2, & 2\pi + a_3, & \alpha_1 & \alpha_2, & \alpha_3, \\ a_1, & a_2, & a_3, & \alpha_1 & 2\pi + \alpha_2, & 2\pi + \alpha_3, \\ 2\pi + a_1, & a_2, & a_3, & 2\pi + \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3. \end{array}$$

Wir bezeichnen die allgemeine Substitution dieser Gruppe, die den Gleichungen (1) gegenüber durch die Bedingung

$$\Sigma k_i + \Sigma \varkappa_i \equiv 0 \text{ mod. } 2 \tag{2}$$

gekennzeichnet ist, mit K, und die Gruppe selbst mit $\mathfrak{K}$. Dann erhalten wir die gesuchten Relationen unmittelbar in der Form

$$\begin{cases} S_1^2 \equiv S_2^2 \equiv S_3^2 \equiv S_1 S_2 S_3 \equiv 1 \quad (\text{mod. } \mathfrak{K}) \\ \Sigma_1^2 \equiv \Sigma_2^2 \equiv \Sigma_3^2 \equiv \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \equiv 1 \quad (\text{mod. } \mathfrak{K}) \\ T^2 = \mathrm{T}^2 = (T\mathrm{T})^2 = T.\mathrm{T}.(T\mathrm{T}) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} S_i T \equiv T S_i, \quad S_i \mathrm{T} \equiv \mathrm{T} S_i, \quad (\text{mod. } \mathfrak{K}) \\ \qquad S_i \Sigma_k \equiv \Sigma_k S_i, \qquad (\text{mod. } \mathfrak{K}) \\ \Sigma_i \mathrm{T} \equiv \mathrm{T} \Sigma_i, \quad \Sigma_i T \equiv T \Sigma_i \quad (\text{mod. } \mathfrak{K}). \end{cases} \tag{4}$$

Der Gebrauch des Zeichens $\equiv$ statt des Zeichens $=$ und die in Klammer hinzugefügte Bemerkung sollen andeuten, dass diese Gleichungen nur richtig sind bis auf einen in jedem Falle besonders zu bestimmenden, uns aber nicht näher interessirenden Factor K. — Aus (3) und (4) folgen noch, als Verallgemeinerung der Relationen (8), § 4, die in demselben Sinne zu verstehenden Congruenzen

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{T}S_2)(\mathrm{T}S_3) \equiv S_1, & (\mathrm{T}S_1)(\mathrm{T}S_2)(\mathrm{T}S_3) \equiv \mathrm{T} \\ (T\Sigma_2)(T\Sigma_3) \equiv \Sigma_1, & (T\Sigma_1)(T\Sigma_2)(T\Sigma_3) \equiv T \end{array}\right\} (\text{mod. } \mathfrak{K}). \tag{5}$$

Wir definiren nun eine Gruppe $\mathfrak{G}$ als den Inbegriff aller der Substitutionen, die aus den erzeugenden Operationen S_i, Σ_i, T, T durch unbegrenzte Wiederholung entstehen.

Die angestellte Betrachtung setzt uns in den Stand, die allgemeine Substitution dieser Gruppe anzugeben. Die Formeln (3) ... (5) zeigen nämlich, dass diese Substitution in die Form

$$(6)\qquad (TS_1)^{e_1}(TS_2)^{e_2}(TS_3)^{e_3}(T\Sigma_1)^{\varepsilon_1}(T\Sigma_2)^{\varepsilon_2}(T\Sigma_3)^{\varepsilon_3}\,.\,K$$
$$(e_i,\ \varepsilon_i = 0,\ 1)$$

gesetzt werden kann, und zwar bei bestimmter Anordnung der Factoren dieses Productes nur auf eine einzige Weise. Die fragliche Substitution lautet also

$$a_1' = (-1)^{e_1} a_1 + [2\varepsilon_1 + (-1)^{e_1}(e_2 + e_3) + 2k_1]\pi$$
$$\alpha_1' = (-1)^{\varepsilon_1} \alpha_1 + [2e_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varkappa_1]\pi, \quad \text{u. s. w.}$$

Hierfür schreiben wir besser

$$(7)\qquad a_i' = (-1)^{\varepsilon_i} a_i + m_i\pi, \quad \alpha_i' = (-1)^{e_i}\alpha_i + \mu_i\pi \ (e_i,\ \varepsilon_i = 0,\ 1),$$

worin nun die ganzen Zahlen m_i und μ_i den folgenden Bedingungen zu genügen haben

$$(8)\qquad \begin{cases} m_1 + e_2 + e_3 \equiv 0, & \mu_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \equiv 0, \\ m_2 + e_3 + e_1 \equiv 0, & \mu_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2) \\ m_3 + e_1 + e_2 \equiv 0, & \mu_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \equiv 0, \end{cases}$$

$$(9)\qquad \frac{1}{2}\Sigma m_i + \frac{1}{2}\Sigma\mu_i + \begin{Bmatrix} e_2\varepsilon_3 + e_3\varepsilon_1 + e_1\varepsilon_2 \\ +\ \varepsilon_2 e_3 + \varepsilon_3 e_1 + \varepsilon_1 e_2 \end{Bmatrix} \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2).$$

Von diesen Congruenzen sind die unter (8) zusammengestellten der Ausdruck dafür, dass die Grössen k_i und $\varkappa_i$ ganze Zahlen sind; die Formel (9) aber, in der die beiden ersten Summanden links wegen der Relationen (8) ebenfalls ganze Zahlen sind, sagt aus, dass die Grössen k_i und $\varkappa_i$ überdies der Bedingung (2) genügen.

Wir fassen nun unsere Ergebnisse zusammen, indem wir zugleich noch einige weitere, naheliegende und leicht zu prüfende Bemerkungen hinzufügen.

Die unendlich vielen sphärischen Dreiecke, die zu dem nämlichen Dreikant gehören, gehen in einander über durch eine Gruppe von linearen Substitutionen, die durch die Formeln (7) *und* (8) *definirt ist.*

Diese Gruppe enthält u. A. zwei bemerkenswerthe invariante Untergruppen[1]*: erstens die durch die Bedingung* (9) *definirte Gruppe* $\mathfrak{G}$,

---

1) Transformirt man alle die Substitutionen T einer Gruppe G, die einer Untergruppe g angehören, vermöge sämmtlicher Substitutionen $S_\varkappa$ von G, so kann der Fall eintreten, dass die transformirte Substitution $T' = S_\varkappa^{-1}TS_\varkappa$ immer wieder zu g gehört. In diesem wichtigen Falle heisst g »*innerhalb G invariant*« (einige Autoren sagen »ausgezeichnet«). Beispielsweise ist die Gruppe aller collinearen Transformationen eine invariante Untergruppe der Gruppe aller collinearen und dualistischen Transformationen.

die von den Substitutionen S_i, Σ_i, T, T *erzeugt wird, und (wenn der nicht ganz scharfe Ausdruck erlaubt ist) die Hälfte der in* (7), (8) *enthaltenen Substitutionen umfasst, zweitens die Gruppe*

$$(1) \qquad a_i' = a_i + 2k_i\pi, \quad \alpha_i' = \alpha_i + 2\varkappa_i\pi.$$

Beide Gruppen durchdringen sich in der durch (1) *und* (2) *definirten Gruppe* $\mathfrak{K}$.

Zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ *sind nun die in* § 4 *betrachteten, von vertauschbaren involutorischen Substitutionen gebildeten Gruppen* $\mathfrak{G}_{64}$ *und* $\mathfrak{G}_{16}$ *isomorph*[1]. $\mathfrak{G}$ *reducirt sich nämlich zunächst auf die Gruppe* $\mathfrak{G}_{64}$, *sobald man die Substitutionen von* $\mathfrak{K}$ *der identischen Substitution zuordnet (als von der Identität nicht verschieden ansieht) und sie reducirt sich weiter auf die Gruppe* $\mathfrak{G}_{16}$, *wenn man überdies noch die Substitutionen der Gruppe* $\mathfrak{H}_4$ (§ 4, Nr. 3) *der identischen Substitution zuordnet.*

Ausser den hier betrachteten Untergruppen enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ noch unendlich viele andere invariante Untergruppen. Mit ihrer Hülfe kann man zu einer unbegrenzten Zahl endlicher Gruppen gelangen. Von diesen sind die Gruppen $\mathfrak{G}_{64}$ und $\mathfrak{G}_{16}$ in mancher Hinsicht die interessantesten und wichtigsten. Wir werden ausser ihnen nur noch eine von 128 Substitutionen gebildete Gruppe zu betrachten haben (§ 7).

---

1) In dem einfachen Falle, der uns hier allein angeht, besteht der Begriff des Isomorphismus zweier Gruppen G und g in Folgendem: Man kann die Substitutionen einer Gruppe G in Schaaren oder Reihen S_i, S_i', S_i'', ... S_k, S_k', S_k''..., ... ordnen, deren jede einer bestimmten Substitution s_i, s_k, ... einer anderen Gruppe g entspricht, derart, dass aus jeder symbolischen Gleichung $S_i^{(\lambda)} S_k^{(\mu)} = S_l^{(\nu)}$ folgt: $s_i s_k = s_l$. Enthält jede Schaar von G nur eine einzige Substitution, so heisst der Isomorphismus *holoëdrisch*, im anderen Falle *meroëdrisch*. Bei meroëdrisch-isomorpher Beziehung bilden alle Substitutionen von G, denen in g die identische Substitution entspricht, eine *invariante Untergruppe* von G.

Umgekehrt entsteht aus jeder Gruppe G eine zu ihr isomorphe Gruppe g, wenn man die in einer invarianten Untergruppe Γ von G enthaltenen Substitutionen nicht mehr von einander (und also auch nicht von der identischen Substitution) unterscheidet, als äquivalent betrachtet, oder, wie wir sagen, »*der Identität zuordnet*«.

Besonders wichtig ist für uns der im Texte vorliegende und auch später noch öfter wiederkehrende Fall, dass aus einer unendlichen Gruppe G, durch Zuordnung einer invarianten (ebenfalls unendlichen) Untergruppe Γ zur Identität, eine neue Gruppe g entsteht, die nur noch eine *endliche* Zahl von Substitutionen umfasst.

§ 6.

Eintheilung der sphärischen Dreiecke in zwei Classen.

Die Theorie der im vorigen § betrachteten Gruppe $\mathfrak{G}$ steht in einem eigenthümlichen Zusammenhang mit einer gewissen Eintheilung aller sphärischen Dreiecke in zwei Classen, deren Kenntniss für die Auffassung der sphärischen Trigonometrie von Wichtigkeit ist.

Wir denken uns ein sphärisches Dreieck über die Kugelfläche verschoben, indem wir Seiten und Winkel stetig ändern, und führen es schliesslich auf irgend einem Wege in eine solche Lage zurück, dass es aus dem Mittelpunkte der Kugel durch dasselbe Dreikant oder Dreiflach projicirt wird, wie zu Anfang. Die Seiten und Winkel des neuen Dreiecks werden dann mit denen des ursprünglichen durch eine lineare Substitution verknüpft sein, die nothwendig enthalten ist unter den in § 5 in den Formeln (7) und (8) angegebenen Substitutionen. Kann man nun auf diese Weise, bei geeigneter Wahl des Weges der Ueberführung, alle jene Substitutionen erreichen, d. h. kann man zu sämmtlichen Dreiecken gelangen, die zu dem gegebenen Dreikant gehören, oder erreicht man nur einen Theil dieser Dreiecke?

Die Antwort ist, dass man wirklich nur zu einem Theile der genannten Dreiecke gelangt, nämlich zu denen, die aus dem ursprünglich angenommenen durch die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ hervorgehen.

Suchen wir zunächst einzusehen, dass in der That je zwei Dreiecke, die durch eine Substitution von $\mathfrak{G}$ verknüpft sind, stetig in einander übergeführt werden können.

Nach § 5 kann man die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ auf 64 Schaaren vertheilen, die den Substitutionen der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$ entsprechen; je zwei Dreiecke derselben Schaar gehen aus einander hervor durch eine Substitution von $\mathfrak{K}$. Wir werden also zu zeigen haben: erstens, dass man jede Substitution von $\mathfrak{K}$ durch eine stetige Aenderung des sphärischen Dreiecks erreichen kann, zweitens, dass auch zwischen den 64 Schaaren selbst noch ein stetiger Uebergang möglich ist.

Um das Erste einzusehen, denken wir uns das Dreieck in eine solche Gestalt übergeführt, dass eine seiner Seiten, etwa a_1, $\equiv \pi$ mod. 2π wird. (Vgl. Fig. 5, rechts.) Lassen wir dann diese Seite a_1,

indem wir ihre Endpunkte festhalten, um diese Endpunkte sich drehen, so können wir (durch stetige Aenderung) ein neues Dreieck ableiten, bei dem die Winkel α_2 und α_3 um ein beliebiges, für beide gemeinschaftliches Vielfaches von 2π gewachsen sind; und diese Aenderung bleibt erhalten, wenn wir das Dreieck schliesslich auf demselben Wege wieder in seine anfängliche Lage zurückbringen. Wir werden also jede Substitution der Form

$$\begin{array}{lll} a_1' = a_1, & a_2' = a_2, & a_3' = a_3, \\ \alpha_1' = \alpha_1, & \alpha_2' = \alpha_2 + 2k\pi, & \alpha_3' = \alpha_3 + 2k\pi \end{array}$$

durch stetige Aenderung hervorrufen können.

Nehmen wir ferner mit einem Dreieck eine stetige Aenderung der Art vor, dass wir die der Seite a_3 gegenüberliegende Ecke A_3 den Kreisbogen A_2A_3 im positiven Sinne durchlaufen lassen, während wir A_1 und A_2 festhalten, so wird nach einem vollen Umlauf a_1 um 2π gewachsen sein, während der gegenüberliegende Winkel α_1 sich um ebensoviel vermindert oder vermehrt hat, je nach der Wahl des für die Winkel angenommenen Drehungssinnes. Wir gelangen so entweder zu allen Substitutionen

$$a_1' = a_1 + 2k\pi, \quad \alpha_1' = \alpha_1 - 2k\pi, \begin{cases} a_2' = a_2, & a_3' = a_3, \\ \alpha_2' = \alpha_2, & \alpha_3' = \alpha_3, \end{cases}$$

oder zu allen Substitutionen

$$a_1' = a_1 + 2k\pi, \quad \alpha_1' = \alpha_1 + 2k\pi, \begin{cases} a_2' = a_2, & a_3' = a_3, \\ \alpha_2' = \alpha_2, & \alpha_3' = \alpha_3. \end{cases}$$

In jedem dieser beiden Fälle aber kann man, wie leicht zu zeigen ist, aus Substitutionen der gefundenen Arten, und den zu ihnen dualistischen, die ganze Gruppe $\mathfrak{K}$ zusammensetzen. *Solche Dreiecke, die durch eine Substitution der Gruppe $\mathfrak{K}$ zusammenhängen, können also stetig in einander übergeführt werden.*

Um zweitens die Möglichkeit eines stetigen Uebergangs zwischen den 64 Dreiecksschaaren einzusehen, führen wir für den Augenblick die Bezeichnung ein:

$$a_i = 2n_i\pi + \bar{a}_i, \quad \alpha_i = 2\nu_i\pi + \bar{\alpha}_i,$$

indem wir uns die ganzen Zahlen n_i und ν_i so bestimmt denken, dass $\bar{a}_i$ und $\bar{\alpha}_i$ in die Grenzen 0 und 2π fallen. Wir führen nun, wie vorhin, das Dreieck in eine solche Lage über, dass $\bar{a}_1 = \pi$ wird, lassen sodann α_2 und α_3 durch geeignete Drehung von $\bar{a}_1$ um π wachsen, und führen das Dreieck schliesslich auf demselben Wege

wieder in seine anfängliche Lage zurück. Wir haben dann die folgende Substitution hervorgebracht:

$$\begin{aligned}
a_1' &= 2n_1\pi + (2\pi - \bar{a}_1) &&= -a_1 + (4n_1 + 2)\pi \\
a_2' &= 2n_2\pi + \bar{a}_2 &&= a_2 \\
a_3' &= 2n_3\pi + \bar{a}_3 &&= a_3 \\
\alpha_1' &= 2\nu_1\pi + \bar{\alpha}_1 &&= \alpha_1 \\
\alpha_2' &= 2\nu_2\pi + (\bar{\alpha}_2 + \pi) &&= \alpha_2 + \pi \\
\alpha_3' &= 2\nu_3\pi + (\bar{\alpha}_3 + \pi) &&= \alpha_3 + \pi.
\end{aligned}$$

Dies ist wieder eine Substitution von $\mathfrak{G}$; und zwar unterscheidet sie sich von der erzeugenden Substitution $T\Sigma_1$ nur um einen Factor K. Da man aber die übrigen erzeugenden Substitutionen $T\Sigma_i$, TS_i auf ähnliche Art gewinnen kann, so ist bewiesen, dass zwischen den 64 Dreiecksschaaren wirklich ein stetiger Uebergang stattfindet.

Dreiecke, deren Seiten und Winkel durch eine Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$ zusammenhängen, können demnach durch stetige Aenderung in einander übergeführt werden. Der Nachweis der umgekehrten Behauptung, dass nämlich Dreiecke, die zu demselben Dreikant gehören, aber nicht durch eine Substitution von $\mathfrak{G}$ zusammenhängen, auch *nicht* stetig in einander übergeführt werden können, kann mit den uns hier zu Gebote stehenden Hülfsmitteln ebenfalls geführt werden. Wir können ihn jedoch bei Seite lassen, da dieser Satz später, nach Entwickelung der Formeln der sphärischen Trigonometrie, selbstverständlich erscheinen wird. Solche Dreiecke unterscheiden sich nämlich der Art in ihren analytischen Eigenschaften, dass zwischen ihnen selbst auf imaginärem Wege, durch sogenannte analytische Fortsetzung, ein stetiger Uebergang nicht möglich ist. — Wir wollen die Thatsache hier einstweilen als bewiesen annehmen, um sogleich noch eine wichtige Folgerung daraus zu ziehen. Sie führt nämlich zu einer Eintheilung aller sphärischen Dreiecke in zwei Classen.

Eigentliche sphärische Dreiecke wollen wir solche nennen, die aus einem Dreieck, dessen Seiten und Winkel zwischen den Grenzen 0 *und* π *liegen, durch stetige Aenderung hergeleitet werden können; uneigentliche die, bei denen dies nicht der Fall ist.*

Dann ergibt sich aus dem Gesagten sofort:

Sowohl die Mannigfaltigkeit der eigentlichen als auch die der uneigentlichen Dreiecke wird durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ in sich selbst über-

geführt; beide Mannigfaltigkeiten werden dagegen vertauscht durch die zweite Substitutionenschaar, die entsteht, wenn man an Stelle der Definitionsgleichung von 𝔖 (Nr. 9, § 5) *diese setzt:*

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\,\Sigma m_i + \frac{1}{2}\,\Sigma \mu_i + \left\{\begin{matrix} e_2\varepsilon_3 + e_3\varepsilon_1 + e_1\varepsilon_2 \\ + \varepsilon_2 e_3 + \varepsilon_3 e_1 + \varepsilon_1 e_2 \end{matrix}\right\} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Beide Mannigfaltigkeiten können also auf unendlich viele Weisen eindeutig umkehrbar auf einander bezogen werden, z. B. durch die Substitution

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 + 2\pi, & a_2' &= a_2, & a_3' &= a_3 \\ \alpha_1' &= \alpha_1 \quad, & \alpha_2' &= \alpha_2, & \alpha_3' &= \alpha_3; \end{aligned}$$

es genügt daher meistens, nur eine von ihnen zu betrachten, nämlich die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Dreiecke, die der elementaren Auffassung näher liegt, und überdies, wie wir sehen werden, durch die grössere Eleganz der für sie geltenden Formeln ausgezeichnet ist.

Von den in § 2 aufgezählten 16 Dreiecksarten sind, bei Festhaltung der dort angeführten Bestimmungen, die Hälfte eigentliche und die Hälfte uneigentliche Dreiecke. Eigentliche Dreiecke sind

$$(A_0 A_0), \quad (A_0' A_0'), \quad (A_k A_k'), \quad (A_k' A_k) \quad (k = 1, 2, 3),$$

uneigentliche Dreiecke dagegen

$$(A_0 A_0'), \quad (A_0' A_0), \quad (A_k A_k), \quad (A_k' A_k') \quad (k = 1, 2, 3).$$

(Zu der ersten Reihe gehören z. B. von den in Fig. 1 (S. 93) verzeichneten Dreiecken die beiden oberen, zur zweiten die beiden unteren.) Hieraus ergibt sich ein einfaches Kennzeichen dafür, ob ein vorgelegtes Dreieck ein eigentliches oder uneigentliches Dreieck ist.

Man reducire das gegebene Dreieck, durch Zufügung geeigneter Vielfacher von 2π zu den Seiten und Winkeln auf ein solches, dessen Seiten und Winkel zwischen 0 und 2π liegen. Das vorgelegte Dreieck ist nun ein eigentliches Dreieck, wenn das reducirte Dreieck ein eigentliches Dreieck ist, und wenn die Reduction durch eine Substitution der Gruppe 𝔎 erfolgt ist; ebenso auch dann, wenn das reducirte Dreieck zu den uneigentlichen gehört, und wenn die Reduction durch eine Substitution erfolgt ist, die nicht zu 𝔎 gehört; dagegen ist es ein uneigentliches Dreieck in den beiden übrigen Fällen.

§ 7.

Die goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks. — Erweiterte Gruppen.

Zur Vorbereitung der Untersuchungen des nächsten Abschnitts wollen wir hier einige Bemerkungen zusammenstellen, die sich auf die Aenderungen beziehen, die die goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel bei den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ erleiden.

Die Functionen $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$ ändern sich nicht bei den Substitutionen der Gruppen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}_4$; ihr Inbegriff *gehört*, wie wir sagen können, zu der von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}_4$ erzeugten Gruppe $(\mathfrak{K}, \mathfrak{H}_4)$: Sie gehen bei den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$ in 16 verschiedene Werthsysteme über, die man natürlich ohne Weiteres hinschreiben kann.

Ebenso nehmen auch die Functionen $\sin a_i$, $\sin \alpha_i$ 16 verschiedene Werthe an; diese aber gehören zu einer anderen Untergruppe von $\mathfrak{G}$, nämlich zu der, die von den Substitutionen K, $S_i \Sigma_i$ (§ 4 Nr. 9) erzeugt wird. Zu jedem Werthsystem der Cosinus gehören noch vier verschiedene Werthsysteme des Sinus, $\pm \sin a_i$, $\pm \sin \alpha_i$.

Die Functionen $\operatorname{tg} \frac{a_i}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}$, die sich durch die Sinus und Cosinus zusammen rational ausdrücken lassen, gehören zur Gruppe $\mathfrak{K}$. Sie nehmen also bei den Substitutionen von $\mathfrak{G}$ 64 Werthsysteme an, entsprechend den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$. Dasselbe gilt von den Grössen $\operatorname{tg} s_\varkappa$, $\operatorname{tg} \sigma_\varkappa$, die sich durch die Grössen $\operatorname{tg} \frac{a_i}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}$ rational darstellen lassen, wie auch umgekehrt diese wieder durch jene rational ausdrückbar sind.

Die Functionen $\operatorname{tg} \frac{s_\varkappa}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\sigma_\varkappa}{2}$ nehmen bei den Substitutionen von $\mathfrak{G}$ 128 verschiedene Werthsysteme an, die durch eine *Gruppe* $\mathfrak{G}_{128}$ *von nicht vertauschbaren Substitutionen* in einander übergehen. Sie gehören nämlich, wie eine leichte Rechnung zeigt, zu einer Untergruppe $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$, die durch die Congruenzen

$$\Sigma k_i \equiv \Sigma \varkappa_i \equiv 0 \pmod{2}$$

bestimmt ist. Ferner führt zu einer Gruppe von 32 nicht vertauschbaren Substitutionen jedes der beiden Grössensysteme $\sin s_\varkappa$, $\sin \sigma_\varkappa$. Es ist aber zu bemerken, dass die Verhältnisse einer jeden der beiden letzten Grössenreihen, und ebenso auch die Verhältnisse der acht

Grössen $\cos s_\varkappa$, $\cos \sigma_\varkappa$ zur Gruppe $(\mathfrak{H}_4, \mathfrak{K})$ gehören, und also je 16 den Substitutionen von $\mathfrak{G}_{16}$ entsprechende Werthsysteme annehmen.

Wir stellen die für das Folgende wichtigsten dieser Bemerkungen, zugleich mit einer weiteren naheliegenden Folgerung in anderer Anordnung übersichtlich zusammen.

I. Das Grössensystem

$$\begin{array}{|llll|} \hline \operatorname{tg}\frac{s_0}{2}, & \operatorname{tg}\frac{s_1}{2}, & \operatorname{tg}\frac{s_2}{2}, & \operatorname{tg}\frac{s_3}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_3}{2} \\ \hline \end{array}$$

gehört zur Gruppe $\mathfrak{K}'$, und nimmt also bei den Substitutionen von $\mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{G}_{128}$ 128 verschiedene Werthsysteme an.

II. Die Grössensysteme

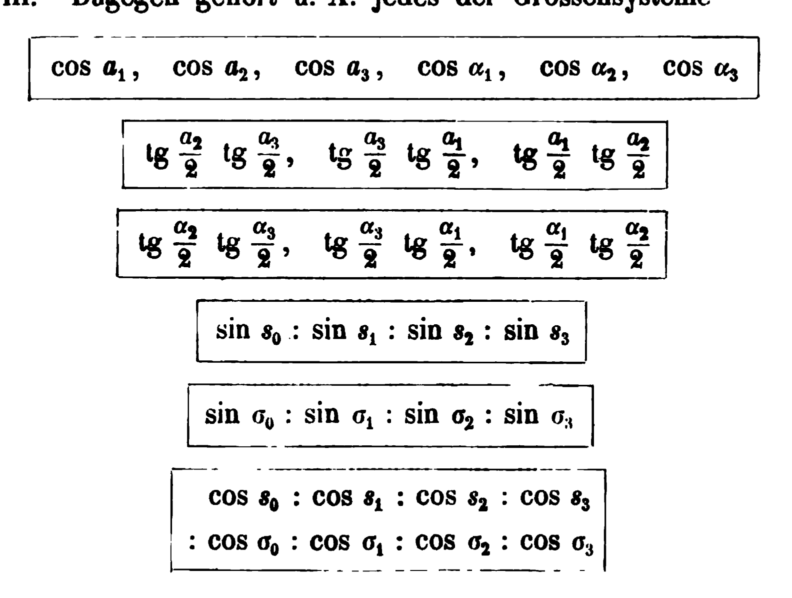
$$\begin{array}{|llllll|} \hline \operatorname{tg}\frac{a_1}{2}, & \operatorname{tg}\frac{a_2}{2}, & \operatorname{tg}\frac{a_3}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2} \\ \hline \end{array}$$

und

$$\begin{array}{|llll|} \hline \operatorname{tg} s_0, & \operatorname{tg} s_1, & \operatorname{tg} s_2, & \operatorname{tg} s_3 \\ \operatorname{tg} \sigma_0, & \operatorname{tg} \sigma_1, & \operatorname{tg} \sigma_2, & \operatorname{tg} \sigma_3 \\ \hline \end{array}$$

gehören zur Gruppe $\mathfrak{K}$, und gehen daher bei den Substitutionen von $\mathfrak{G}$ in 64 verschiedene Werthsysteme über, die den Substitutionen von $\mathfrak{G}_{64}$ entsprechen.

III. Dagegen gehört u. A. jedes der Grössensysteme



$$\boxed{\cos a_1, \quad \cos a_2, \quad \cos a_3, \quad \cos \alpha_1, \quad \cos \alpha_2, \quad \cos \alpha_3}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{a_2}{2}\operatorname{tg}\frac{a_3}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{a_3}{2}\operatorname{tg}\frac{a_1}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{a_1}{2}\operatorname{tg}\frac{a_2}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}$$

$$\boxed{\sin s_0 : \sin s_1 : \sin s_2 : \sin s_3}$$

$$\boxed{\sin \sigma_0 : \sin \sigma_1 : \sin \sigma_2 : \sin \sigma_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos s_0 : \cos s_1 : \cos s_2 : \cos s_3 \\ : \cos \sigma_0 : \cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 \end{array}}$$

zur Gruppe $(\mathfrak{H}_4, \mathfrak{K})$. Diese Systeme von trigonometrischen Functionen nehmen also nur 16 verschiedene Werthsysteme an, die den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$ entsprechen.

Diese Bemerkungen, die man leicht noch weiter ausdehnen könnte, sind zur Vorbereitung des Folgenden nicht durchaus nothwendig; sie werden aber zur Erleichterung der Auffassung dienen. Sie zeigen jedenfalls hier schon, dass die Betrachtung der Gruppen $\mathfrak{G}_{128}$ und $\mathfrak{G}_{64}$, und noch mehr der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$ für das Verständniss der Formeln der sphärischen Trigonometrie von Bedeutung sein muss. —

Um unsere späteren Entwickelungen nicht unterbrechen zu müssen, wollen wir an dieser Stelle schon einige Gruppen definiren, die aus den aufgezählten, wie wir sagen wollen, durch Erweiterung hervorgehen.

Eine *erste Erweiterung* der Gruppe $\mathfrak{G}$ und der aus ihr abgeleiteten endlichen Gruppen $\mathfrak{G}_{128}$, $\mathfrak{G}_{64}$, $\mathfrak{G}_{16}$ soll darin bestehen, dass wir noch die sechs Vertauschungen der Indices 1, 2, 3 hinzufügen, dass wir also die Anordnung, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Benennung der Seiten und Winkel umändern. Die Gruppen, die auf solche Art aus $\mathfrak{G}_{128}$, $\mathfrak{G}_{64}$, $\mathfrak{G}_{16}$ entstehen, umfassen jedesmal die sechsfache Substitutionenzahl, und können daher etwa durch die Zeichen $\mathfrak{G}_{6.128}$, $\mathfrak{G}_{6.64}$, $\mathfrak{G}_{6.16}$ dargestellt werden. Für uns ist von Wichtigkeit die letzte dieser Gruppen, die einfach mit $\mathfrak{G}_{96}$ bezeichnet werden soll.

Eine *zweite Erweiterung* besteht in der Vertauschung der Seiten mit den entsprechenden Winkeln, im Uebergang zum Polardreieck

$$a_x' = \alpha_x, \quad \alpha_x' = a_x.$$

Aus jeder unserer Gruppen geht so eine neue hervor mit der doppelten Substitutionenzahl; aus den zuletzt genannten schon erweiterten Gruppen z. B. entstehen Gruppen, deren Erzeugungsweise durch die Bezeichnungen $\mathfrak{G}_{2.6.128}$, $\mathfrak{G}_{2.6.64}$, $\mathfrak{G}_{2.6.16}$ angedeutet wird. Für uns werden besonders die erste und die letzte Gruppe Interesse gewinnen; wir bezeichnen sie, nach der Zahl ihrer Substitutionen, einfach mit $\mathfrak{G}_{1536}$ und $\mathfrak{G}_{192}$.

Die umfassendste dieser Gruppen, $\mathfrak{G}_{1536}$, entsteht aus der zweimal erweiterten Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn wir alle die Substitutionen der identischen Substitution zuordnen, die die sämmtlichen Grössen $\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}$

ungeändert lassen, wenn wir also die Substitutionen von $\mathfrak{K}'$ (s. S. 113) als nicht wesentlich verschieden betrachten von der identischen Substitution (vgl. § 5, S. 108, Anmerkung).

Die schematische Figur 7 versinnlicht einen Theil der Beziehungen der aufgestellten Gruppen. Sie soll dazu dienen, die eingeführten

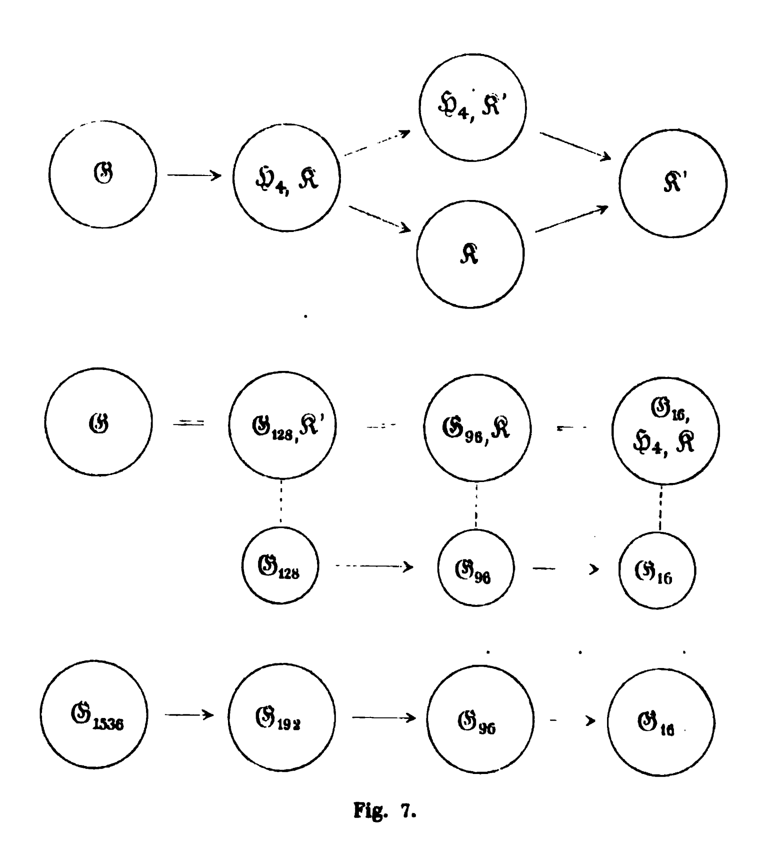


Fig. 7.

Bezeichnungen dem Gedächtnisse leichter einzuprägen. Freilich ist diese bildliche Darstellung sehr lückenhaft; will man grössere Vollständigkeit erzielen, so muss man sich auch entschliessen, eine grössere Menge von Bezeichnungen zu gebrauchen.

§ 8.

Ebene Dreiecke.

Die ebene Trigonometrie ist bekanntlich ein Grenzfall der sphärischen. Man lasse den Radius der Kugel ins Unendliche wachsen, während man die Ecken etwa eines solchen Dreiecks, dessen Seiten

und Winkel zwischen 0 und π liegen, festhält: Dann entsteht im Grenzfall ein ebenes Dreieck, mit der Winkelsumme 2π.

Bei der Behandlung der ebenen Dreiecke, die einiges Eigenthümliche darbietet, wollen wir einen etwas anderen Gedankengang innehalten, als bei der Betrachtung der sphärischen.

Wir nehmen auch hier wieder einen gemeinsamen positiven Drehungssinn für alle Winkel an — etwa den, der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist —, und wir schreiben den Geraden, die die Seiten enthalten, eine positive Richtung zu. Eine Seite $\bar{a}_i$ des ebenen Dreiecks soll als positiv gelten, wenn bei positiver Umlaufung der drei Seiten die Strecke $\bar{a}_i$ selbst durchlaufen wird, als negativ, wenn der zu dieser Seite gehörige Linienzug sich durchs Unendliche erstreckt.

Wir gehen aus von einem Dreieck mit positiven Seiten $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, und Winkeln $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\alpha}_3$, die zwischen den Grenzen 0 und π liegen, und deren Summe $= 2\pi$ ist[1]). Wir definiren nun sogleich das allgemeinste von uns zu betrachtende ebene Dreieck als ein solches, dessen Seiten und Winkel sich aus denen des genannten durch *stetige* Aenderung herleiten lassen; wobei wir, aus nahe liegenden Gründen, unter den »stetigen« Aenderungen den Uebergang einer Seite von positiver zu negativer Länge durch das Unendliche hindurch mitbegreifen wollen. Wir fragen nach allen möglichen *Gestalten* eines solchen Dreiecks und insbesondere nach der Gesammtheit der mit einem gegebenen Dreieck verbundenen *Nachbardreiecke*, d. i. nach allen Dreiecken, deren Seiten und Ecken in die nämlichen Geraden und Punkte der Ebene fallen.

Zunächst ist deutlich, dass man von den Winkeln eines ebenen Dreiecks zwei beliebig annehmen kann; der dritte ist dann bestimmt durch die Forderung, dass die Winkelsumme den constanten Werth 2π haben soll. Wir brauchen daher Dreiecke nicht zu unterscheiden,

---

1) Wir erinnern daran, dass die Winkel $\bar{\alpha}_k$ die sonst als Aussenwinkel bezeichneten Grössen sind. Statt ihre Summe $= 2\pi$ anzunehmen, könnten wir sie ebensowohl irgend einem anderen Vielfachen von 2π gleichsetzen. Aber die unendlich vielen so entstehenden Dreiecksmannigfaltigkeiten, deren jede ein Continuum bildet, unterscheiden sich nicht wesentlich in den von uns zu betrachtenden Eigenschaften, so dass es genügt, irgend eine von ihnen zu untersuchen.

deren Seiten übereinstimmen, und deren Winkel durch eine Substitution $\bar{K}$ der folgenden Gruppe $\bar{\mathfrak{K}}$ zusammenhängen:

$$(1) \qquad \bar{\alpha}_1' = \bar{\alpha}_1 + 2\varkappa_1\pi, \; \bar{\alpha}_2' = \bar{\alpha}_2 + 2\varkappa_2\pi, \; \bar{\alpha}_3' = \bar{\alpha}_3 + 2\varkappa_3\pi$$
$$(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0);$$

denn solche Dreiecke können durch einfache stetige Aenderungen — vollständige Umdrehungen einer oder mehrerer Seiten — in einander übergeführt werden.

Die Substitutionen $\bar{K}$ der Gruppe $\bar{\mathfrak{K}}$ sehen wir demnach als nicht wesentlich verschieden von der identischen Substitution an. Wir können nun sogleich die mit einem gegebenen Dreieck verbundenen *Nachbardreiecke* angeben. Sie werden erhalten durch wiederholte Anwendung der Substitutionen:

(2)

	$\bar{\mathfrak{a}}_1'$	$\bar{\mathfrak{a}}_2'$	$\bar{\mathfrak{a}}_3'$	$\bar{\alpha}_1'$	$\bar{\alpha}_2'$	$\bar{\alpha}_3'$
1	$\bar{\mathfrak{a}}_1$	$\bar{\mathfrak{a}}_2$	$\bar{\mathfrak{a}}_3$	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3$
$\mathfrak{S}_1$	$-\bar{\mathfrak{a}}_1$	$\bar{\mathfrak{a}}_2$	$\bar{\mathfrak{a}}_3$	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2 + \pi$	$\bar{\alpha}_3 - \pi$
$\mathfrak{S}_2$	$\bar{\mathfrak{a}}_1$	$-\bar{\mathfrak{a}}_2$	$\bar{\mathfrak{a}}_3$	$\bar{\alpha}_1 - \pi$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3 + \pi$
$\mathfrak{S}_3$	$\bar{\mathfrak{a}}_1$	$\bar{\mathfrak{a}}_2$	$-\bar{\mathfrak{a}}_3$	$\bar{\alpha}_1 + \pi$	$\bar{\alpha}_2 - \pi$	$\bar{\alpha}_3$
$\mathfrak{T}$	$\bar{\mathfrak{a}}_1$	$\bar{\mathfrak{a}}_2$	$\bar{\mathfrak{a}}_3$	$-\bar{\alpha}_1$	$2\pi - \bar{\alpha}_2$	$2\pi - \bar{\alpha}_3$

(mod. $\bar{K}$).

Diese Substitutionen erzeugen, mod. $\bar{K}$, *eine Gruppe von sechzehn involutorischen (und also vertauschbaren) Substitutionen* — eine Gruppe, die in der ebenen Trigonometrie dieselbe Stellung einnimmt, wie die Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$ in der sphärischen. Man überzeugt sich sofort davon, dass zwischen diesen verschiedenen Dreiecken wirklich ein stetiger Uebergang möglich ist, und dass man thatsächlich vermöge (2) bereits alle Nachbardreiecke hat. Die Substitution $\mathfrak{S}_1$ z. B. entsteht, wenn man die Seite $\bar{\mathfrak{a}}_1$ eine Umwendung (halbe Umdrehung) ausführen lässt, die Substitution $\mathfrak{T}$, wenn man etwa die Ecke 1 auf der zugehörigen Höhe so weit verschiebt, bis ein zu dem vorgelegten symmetrisches Dreieck entsteht; u. s. w.

Mit dem Gesagten ist auch bereits die Frage nach den möglichen *Gestalten* eines ebenen Dreiecks erledigt. Es gibt, wenn man von Grenzfällen und von der verschiedenen Bezeichnung der Seiten absieht, *acht* Typen ebener Dreiecke. Diese werden durch die Figur 8 versinnlicht. Bei jedem einzelnen Dreieck ist neben der Figur angegeben, welcher Substitution unserer Gruppe es entspringt, unter der Voraussetzung,

dass die horizontale Seite dem Index 1 zugehört, und dass beim Ausgangsdreieck die Seiten und Winkel positiv sind. (Die ausserdem beigefügten Bezeichnungen werden sogleich erklärt werden.) — Man

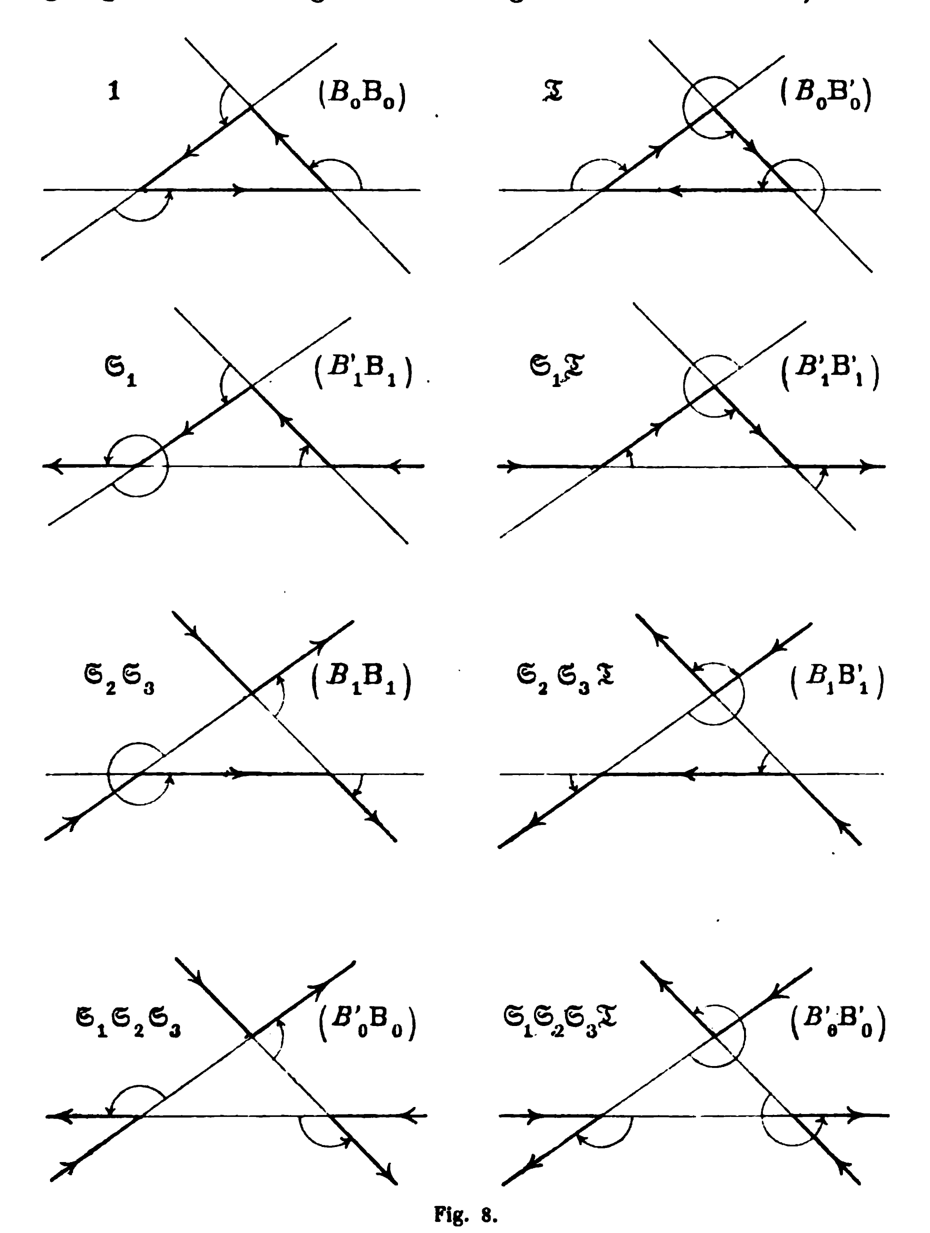


Fig. 8.

bemerke, dass bei der Hälfte der acht Typen (Fig. 8 links) die Ecken des Dreiecks im Sinne der positiven Drehungsrichtung der Winkel auf einander folgen, bei der anderen Hälfte (Fig. 8 rechts) im Sinne der negativen Drehungsrichtung.

Unterscheiden wir, wie in § 2, die verschieden benannten Seiten, so erhöht sich die Zahl der auseinander zu haltenden Dreiecksgestalten auf 16, und diese entsprechen gerade den 16 zusammengehörigen Nachbardreiecken, oder den 16 Substitutionen unserer Gruppe. Wir wollen für die 16 Dreiecksarten Bezeichnungen $(B_\varkappa \mathrm{B}_\varkappa)$, $(B_\varkappa' \mathrm{B}_\varkappa)$, $(B_\varkappa \mathrm{B}_\varkappa')$, $(B_\varkappa' \mathrm{B}_\varkappa')$ einführen, die den in § 2 bei den sphärischen Dreiecken gebrauchten Bezeichnungen entsprechen, und wie folgt definirt sind:

(3)

	B_0	B_0'	B_1	B_1'	B_2	B_2'	B_3	B_3'
$\bar{a}_1$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$
$\bar{a}_2$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$
$\bar{a}_3$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$

(4)

	B_0	B_0'	B_1	B_1'	B_2	B_2'	B_3	B_3'
$\bar{\alpha}_1$	I	II	I	II	II	I	II	I
$\bar{\alpha}_2$	I	II	II	I	I	II	II	I
$\bar{\alpha}_3$	I	II	II	I	II	I	I	II

Das Zeichen I bedeutet hier, dass der betreffende Winkel, nachdem er durch Zufügung eines geeigneten Vielfachen von 2π auf das Intervall von 0 bis 2π gebracht ist, zwischen 0 und π fällt, das Zeichen II, dass er dem Intervall von π bis 2π angehört. —

Wir betrachten nun wieder die *Uebergangsformen*, die Dreiecke, die den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Dreiecksmannigfaltigkeiten $(B\mathrm{B})$ vermitteln. Aehnlich wie in der sphärischen Trigonometrie unterscheiden wir auch hier Grenzdreiecke und Uebergangsdreiecke im engeren Sinne. Diese Bezeichnungsweise können wir allerdings erst später vollständig rechtfertigen (II. Abschnitt, § 14). Für jetzt bemerken wir nur, dass die »Grenzdreiecke« die Mannigfaltigkeit der construirbaren reellen Dreiecke trennen von gewissen Dreiecksmannigfaltigkeiten, bei denen die Seiten oder Winkel imaginär sind, während bei den »Uebergangsdreiecken« Aehnliches nicht stattfindet. In allen Fällen behandeln wir nur solche Dreiecke, die noch von *zwei* willkürlichen Parametern abhängen. (Vgl. § 3.)

Grenzdreiecke erster Art.

Hierher stellen wir vier Dreiecksclassen, die definirt sind durch je eine der Gleichungen $\bar{s}_\varkappa = 0$, wofern

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
2\bar{s}_0 &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3,\\
2\bar{s}_1 &= -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3,\\
2\bar{s}_2 &= \bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3,\\
2\bar{s}_3 &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3
\end{aligned}
$$

gesetzt wird. Sie vermitteln den Uebergang zwischen je zwei Dreieckstypen nach folgendem Schema:

$$(B_\varkappa \mathrm{B}_\varkappa) \longleftrightarrow (B_\varkappa \mathrm{B}_\varkappa'), \qquad (B_\varkappa' \mathrm{B}_\varkappa) \longleftrightarrow (B_\varkappa' \mathrm{B}_\varkappa').$$

Jede dieser Dreiecksarten enthält noch 3 . 2 Unterarten, deren jede den Uebergang zwischen zwei völlig bestimmten Dreiecksgestalten vermittelt. Im Falle $\bar{s}_0 = 0$ z. B. hat man die folgenden Möglichkeiten:

$$\bar{a}_1 < 0,\ \bar{a}_2 > 0,\ \bar{a}_3 > 0\ :\ (B_1' \mathrm{B}_1) \longleftrightarrow (B_1' \mathrm{B}_1')$$
$$\bar{a}_1 > 0,\ \bar{a}_2 < 0,\ \bar{a}_3 < 0\ :\ (\mathrm{B}_1\ B_1) \longleftrightarrow (B_1\ \mathrm{B}_1')\ ,\ \text{u. s. w.}$$

Im Ganzen sind demnach 4 . 3 . 2 = 24 Fälle auseinander zu halten, die man leicht aufzählen wird.

Grenzdreiecke zweiter Art. (Unendlich kleine Dreiecke.)

Dreiecke, deren Winkel nicht beschränkt sind, während die Seiten die Länge Null haben. Hierher gehören 4 . 2 = 8 Dreiecksclassen, die den Zusammenhang zwischen je zwei Dreiecksmannigfaltigkeiten nach folgendem Schema vermitteln:

$$(B_\varkappa \mathrm{B}_\varkappa) \longleftrightarrow (B_\varkappa' \mathrm{B}_\varkappa)\ ;\ (B_\varkappa \mathrm{B}_\varkappa') \longleftrightarrow (B_\varkappa' \mathrm{B}_\varkappa')$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, 3).$$

Uebergangsdreiecke erster Art.

Hierher stellen wir sechs verschiedene Arten von Dreiecken, jede mit vier Unterarten, z. B.

$$\bar{a}_1 = 0,\quad \bar{\alpha}_1 \equiv 0 \bmod. 2\pi:$$

$$
\begin{array}{cccc}
(B_2 \mathrm{B}_2) & (B_2 \mathrm{B}_2') & (B_2' \mathrm{B}_2) & (B_2' \mathrm{B}_2')\\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\
(B_3' \mathrm{B}_3') & (B_3' \mathrm{B}_3) & (B_3 \mathrm{B}_3') & (B_3 \mathrm{B}_3)
\end{array}
$$

$$\bar{a}_1 = 0,\quad \bar{\alpha}_1 \equiv \pi \bmod. 2\pi:$$

$$
\begin{array}{cccc}
(B_0 \mathrm{B}_0) & (B_0 \mathrm{B}_0') & (B_0' \mathrm{B}_0) & (B_0' \mathrm{B}_0')\\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\
(B_1' \mathrm{B}_1') & (B_1' \mathrm{B}_1) & (B_1 \mathrm{B}_1') & (B_1 \mathrm{B}_1).
\end{array}
$$

Man erkennt ohne Weiteres, dass alle bis jetzt aufgezählten Arten specieller ebener Dreiecke Grenzfälle der in § 3 behandelten speciellen sphärischen Dreiecke sind. In der Geometrie der Ebene kommen aber noch andere ausgeartete Dreiecke vor, die in der Geometrie auf der Kugelfläche kein (reelles) Analogon haben. Es sind dies zunächst die

Uebergangangsdreiecke zweiter Art,

Dreiecke mit zwei parallelen und daher unendlich langen Seiten. Hier sind ebensoviele Fälle auseinander zu halten, wie bei den Uebergangsdreiecken erster Art. Der Zusammenhang der einzelnen Dreiecksmannigfaltigkeiten gestaltet sich aber jetzt anders:

$$\bar{\alpha}_1 \equiv 0 \text{ mod. } 2\pi$$

$(\mathrm{B}_2 B_2)$	$(B_2 \mathrm{B}_2')$	$(B_2' \mathrm{B}_2)$	$(B_2' \mathrm{B}_2')$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$(B_3 \mathrm{B}_3')$	$(B_3 \mathrm{B}_3)$	$(\mathrm{B}_3' B_3')$	$(\mathrm{B}_3' B_3)$

$$\bar{\alpha}_1 \equiv \pi \text{ mod. } 2\pi$$

$(\mathrm{B}_0 B_0)$	$(\mathrm{B}_0 B_0')$	$(B_0' \mathrm{B}_0)$	$(B_0' \mathrm{B}_0')$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$(B_1 \mathrm{B}_1')$	$(B_1 \mathrm{B}_1)$	$(B_1' \mathrm{B}_1')$	$(B_1' \mathrm{B}_1)$.

Endlich haben wir, um unsere Aufzählung vollständig zu machen, noch eine Classe von Grenzdreiecken hinzuzufügen:

Grenzdreiecke dritter Art. (Unendlich grosse Dreiecke.)

Es sind dies Dreiecke, deren Winkel nicht beschränkt sind, und deren Seiten sämmtlich die Länge ∞ haben. Sie verhalten sich ganz wie die Grenzdreiecke zweiter Art, die unendlich kleinen Dreiecke, und vermitteln ganz in derselben Weise den Uebergang zwischen je zwei Dreiecksgestalten. —

Schliesslich mögen wir noch bemerken, dass die vorhin (S. 117, 118) definirten Gruppen sich ebenso wie die der sphärischen Trigonometrie *erweitern* lassen dadurch, dass man noch die Vertauschungen der Seiten hinzufügt. Aus der erwähnten Gruppe von 16 Substitutionen geht so eine Gruppe von 96 nicht vertauschbaren Substitutionen hervor.

II. Abschnitt.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie und ihr Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Substitutionen.

> Dans l'analyse la perfection consiste à n'employer que le moindre nombre possible de principes, et à faire sortir de ces principes toutes les vérités qu'ils peuvent renfermer, par la seule force de l'analyse. (LAGRANGE.)

In älteren Werken kann man die sphärische Trigonometrie in der Weise behandelt finden, dass die Hauptsätze einzeln aus geometrischen Constructionen hergeleitet und als selbständige, gleichberechtigte Bestandtheile der Theorie neben einander hingestellt werden. Seit LAGRANGE in seiner classischen Abhandlung gezeigt hatte, wie man durch einfache Umformungen aus einer einzigen Gruppe von drei Gleichungen die ganze sphärische Trigonometrie entwickeln könne [1], ist eine andere Darstellungsweise üblich geworden. Sieht man sich indessen den gebräuchlichen Lehrgang genauer an, so findet man, dass die von LAGRANGE aufgestellte Forderung, aus der Geometrie nur das Nöthigste zu entnehmen, und alles Weitere analytisch herzuleiten, doch nicht überall erfüllt wird. Besonders in den Beweisen der nach LAGRANGE hinzugekommenen Sätze wird bei der Ausziehung der mehrfach auftretenden Quadratwurzeln öfter als nöthig von den Ungleichungen Gebrauch gemacht, denen man die sphärischen Dreiecke zu unterwerfen pflegt. Welche Möglichkeiten für die Vorzeichen der Wurzeln bei einer rein algebraischen Entwickelung bestehen, bleibt dahingestellt, und noch weniger wird erörtert, was eine etwanige andere Bestimmung jener Vorzeichen zu bedeuten habe. Ja in einigen Lehrbüchern wird, wenn ich nicht irre, aus pädagogischen Gründen,

1) Siehe die Anmerkung auf S. 125.

das von Lagrange Erreichte wieder zerstört, indem eine Gruppe von sechs oder gar acht Gleichungen an die Spitze gestellt wird — während doch nur geometrisch, nicht auch analytisch von vorn herein klar ist, dass diese Gleichungen von den Seiten und Winkeln des Dreiecks noch drei Stücke willkürlich lassen.

Aus diesen Gründen werden wir uns nicht auf andere Darstellungen berufen, sondern wir werden die wesentlichsten Formeln der sphärischen Trigonometrie selbst ableiten, natürlich in aller Kürze, soweit es sich um bekannte Dinge handelt[1]). Dabei schliessen wir uns im Allgemeinen dem in neuerer Zeit üblich gewordenen, durchaus zweckmässigen Lehrgang an, werden aber Sorge tragen, dass nicht mehr aus der Geometrie entlehnt wird, als durchaus nothwendig ist.

Es wird hierdurch nur eine geringe Weitläufigkeit verursacht werden. Da die von uns verwendeten Bezeichnungen mit den üblichen nicht ganz übereinstimmen, so ist eine Zusammenstellung der wichtigsten trigonometrischen Formeln ohnehin unerlässlich.

§ 1.

Die Grundformeln.

Wir bezeichnen die Seiten des sphärischen Dreiecks, wie im ersten Abschnitt, mit a_1, a_2, a_3, die Winkel mit α_1, α_2, α_3. Von diesen sechs Stücken können drei als unabhängig-veränderliche Grössen betrachtet werden. Man wird daher, wenn man nichts Ueberflüssiges benutzen will, als Grundlage der Entwickelung eine Gruppe von *drei* unabhängigen Gleichungen zwischen jenen sechs Stücken wählen. Zu diesem Zwecke empfehlen sich, wegen ihrer einfachen geometrischen Herleitung, am meisten *die drei ersten Formeln des Cosinussatzes:*

$$(1)\quad \begin{cases} \cos a_1 = \cos a_2 \,.\, \cos a_3 - \sin a_2 \,.\, \sin a_3 \,.\, \cos \alpha_1\,, \\ \cos a_2 = \cos a_3 \,.\, \cos a_1 - \sin a_3 \,.\, \sin a_1 \,.\, \cos \alpha_2\,, \\ \cos a_3 = \cos a_1 \,.\, \cos a_2 - \sin a_1 \,.\, \sin a_2 \,.\, \cos \alpha_3\,. \end{cases}$$

Die drei anderen Formeln, die aus diesen durch Vertauschung

---

1) Wegen der sogenannten *Auflösung* der sphärischen Dreiecke, die hier nicht berücksichtigt werden konnte, verweisen wir auf die zahlreichen Lehrbücher, besonders auf den durch Reichthum des Inhalts und Eleganz der Darstellung in gleicher Weise ausgezeichneten Traité de Trigonométrie von J. A. Serret (7me éd. Paris 1888).

der Seiten und Winkel hervorgehen, benutzen wir mit Absicht *nicht*; wir werden sie vielmehr aus den Formeln (1) ableiten[1]).

Zunächst folgert man aus den Gleichungen (1) durch eine einfache Umformung sechs Gleichungen, von denen nur die beiden ersten hergesetzt werden mögen:

$$(2)\qquad \sin^2\frac{\alpha_1}{2}=\frac{\sin s_0 \,.\, \sin s_1}{\sin a_2 \,.\, \sin a_3},\quad \cos^2\frac{\alpha_1}{2}=\frac{\sin s_2 \,.\, \sin s_3}{\sin a_2 \,.\, \sin a_3}.$$

Die Bedeutung der Grössen s_i ist hier dieselbe, wie in § 2 des ersten Abschnittes (s. S. 94). Aus (2), oder auch unmittelbar aus (1) ergibt sich die Proportion

$$\sin^2 a_1 : \sin^2 a_2 : \sin^2 a_3 = \sin^2 \alpha_1 : \sin^2 \alpha_2 : \sin^2 \alpha_3 .$$

Wir denken uns nun die Vorzeichen der Grössen $\sin \alpha_i$, die in den Gleichungen (1) nicht vorkommen, und aus diesen Gleichungen allein auch nicht vollständig bestimmt werden können, so gewählt, wie es die in § 1 des ersten Abschnitts getroffene Festsetzung über den gemeinsamen positiven Drehungssinn aller Winkel auf der Kugel erfordert. Dann entsteht der sogenannte *Sinussatz*:

$$(3)\qquad \frac{\sin a_1}{\sin \alpha_1}=\frac{\sin a_2}{\sin \alpha_2}=\frac{\sin a_3}{\sin \alpha_3}=\frac{P}{\Pi},$$

worin

$$(4)\quad \begin{cases} P=\sin a_2 \,.\, \sin a_3 \,.\, \sin\alpha_1=\sin a_3 \,.\, \sin a_1 \,.\, \sin\alpha_2=\sin a_1 \,.\, \sin a_2 \,.\, \sin\alpha_3 \\ \Pi=\sin \alpha_2 \,.\, \sin \alpha_3 \,.\, \sin a_1=\sin \alpha_3 \,.\, \sin \alpha_1 \,.\, \sin a_2=\sin \alpha_1 \,.\, \sin \alpha_2 \,.\, \sin a_3 \end{cases}$$

die von Staudt (Crelle's J. Bd. 24, S. 252) so bezeichneten *Sinus* des Dreiecks und seines Polardreiecks bedeuten.

Die Quadrate dieser Grössen P und Π lassen sich rational ausdrücken durch die Grössen $\cos a_i$ und $\cos \alpha_i$. Man entnimmt nämlich den Formeln (1) und (2) ohne Mühe die erste der Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} P^2 = 4\sin s_0 \,.\, \sin s_1 \,.\, \sin s_2 \,.\, \sin s_3 \\ = 1-\cos^2 a_1-\cos^2 a_2-\cos^2 a_3+2\cos a_1 \,.\, \cos a_2 \,.\, \cos a_3, \\ \Pi^2 = 4\sin \sigma_0 \,.\, \sin \sigma_1 \,.\, \sin \sigma_2 \,.\, \sin \sigma_3 \\ = 1-\cos^2 \alpha_1-\cos^2 \alpha_2-\cos^2 \alpha_3+2\cos \alpha_1 \,.\, \cos \alpha_2 \,.\, \cos \alpha_3, \end{cases}$$

während die analoge Formel für Π^2, die wir der Vollständigkeit

1) Der Inhalt des § 1 rührt grösstentheils von Lagrange her (Journal de l'École polytechnique, cah. 6, an VI). Mehrere Umformungen hatte bereits Euler angegeben (Acta Petrop. 1779), der überhaupt als der eigentliche Schöpfer der sphärischen Trigonometrie bezeichnet werden muss.

halber gleich mit aufgeschrieben haben, die vorhergehende Ableitung der zu (1) dualistischen Formelgruppe erfordert.

Diese zweite Formelgruppe des Cosinussatzes kann man nun gewinnen, wie folgt.

Man hat, wie gesagt, nach der ersten Formel (1):

$$\sin^2 a_2 . \sin^2 a_3 . \sin^2 \alpha_1 = (\cos a_2 . \cos a_3 - \cos a_1) \cos a_1 + 1 - \cos^2 a_2 - \cos^2 a_3 + \cos a_1 . \cos a_2 . \cos a_3 .$$

Hieraus folgt, nach Multiplication der linken und rechten Seite mit $\cos a_1$:

$$\cos a_1 . \sin^2 a_2 . \sin^2 a_3 . \sin^2 \alpha_1 = -(\cos a_2 . \cos a_3 - \cos a_1) \sin^2 a_1 + (\cos a_1 . \cos a_3 - \cos a_2)(\cos a_1 . \cos a_2 - \cos a_3),$$

oder, nach erneuter Benutzung der Formeln (1):

$$\cos a_1 . \sin a_2 . \sin a_3 . \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 a_1} = -\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 . \cos \alpha_3 ;$$

und diese Formel geht mit Hülfe des Sinussatzes (3) über in die erste der Formeln

$$(6) \quad \begin{cases} \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 . \cos \alpha_3 - \sin \alpha_2 . \sin \alpha_3 . \cos a_1 , \\ \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 . \cos \alpha_1 - \sin \alpha_3 . \sin \alpha_1 . \cos a_2 , \\ \cos \alpha_3 = \cos \alpha_1 . \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 . \sin \alpha_2 . \cos a_3 . \end{cases}$$

Ungezwungener ergeben sich diese Formeln natürlich durch das Princip der Dualität, oder auch aus den in Bezug auf Seiten und Winkel symmetrisch gebauten Delambre'schen Formeln (s. § 3).

Verbindet man die Formeln (5), die wir jetzt beide benutzen dürfen, mit der aus (3) folgenden Relation

$$\frac{P^2}{\Pi^2} = \frac{\sin^2 a_1 + \sin^2 a_2 + \sin^2 a_3}{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3},$$

so entsteht ein bemerkenswerther Ausdruck für das Verhältniss $P^2 : \Pi^2$, dem wir später wieder begegnen werden:

$$(7) \qquad \frac{P^2}{\Pi^2} = \frac{1 - \cos a_1 . \cos a_2 . \cos a_3}{1 - \cos \alpha_1 . \cos \alpha_2 . \cos \alpha_3} .$$

Aus den Formeln des Sinus- und des Cosinussatzes ergeben sich noch einige Formelgruppen, die für die Praxis wenig Bedeutung haben, aber vom algebraischen Standpunkt aus nicht geringere Beachtung verdienen, als andere Formeln der sphärischen Trigonometrie. So zunächst die drei Formeln Cagnoli's, die durch ihre Symmetrie zwischen Seiten und Winkeln bemerkenswerth sind:

$$(8)\quad \begin{aligned} &\sin a_2 \,.\, \sin a_3 - \cos a_2 \,.\, \cos a_3 \,.\, \cos \alpha_1 \\ &= \sin \alpha_2 \,.\, \sin \alpha_3 - \cos \alpha_2 \,.\, \cos \alpha_3 \,.\, \cos a_1 \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Man gelangt zu diesen Relationen am schnellsten, wenn man der ersten Gleichung (1) den Factor $\cos \alpha_1$ und der ersten Gleichung (6) den Factor $\cos a_1$ hinzufügt, das Product $\cos a_1 \,.\, \cos \alpha_1$ eliminirt, und dann den Sinussatz benutzt.

Schreibt man ferner die dritte der Formeln (1) so:

$$\sin a_2 (\cos a_3 \sin a_2 + \sin a_1 \cos \alpha_3) + \cos a_2 (\cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1) = 0,$$

so kommt man, bei Anwendung der ersten Formel (1), nach Abscheidung des Factors $\sin a_2$, zu der ersten der Formeln

$$(9)\quad \begin{aligned} \cos \alpha_3 \,.\, \sin a_1 + \cos a_3 \,.\, \sin a_2 + \cos a_2 \,.\, \cos \alpha_1 \,.\, \sin a_3 &= 0 \\ \cos a_3 \,.\, \sin a_1 + \cos \alpha_3 \,.\, \sin a_2 + \cos a_1 \,.\, \cos \alpha_2 \,.\, \sin a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Solcher Relationen hat man im Ganzen sechs verschiedene, wenn man je zwei, die durch Vertauschung von $\sin a_i$ und $\sin \alpha_i$ in einander übergehen, als gleichbedeutend rechnet. Da bei ihrer Ableitung nur die Formeln (1) und (3) benutzt sind, so kommt man, auf dem umgekehrten Wege, auch von hier aus wieder zu den Formeln (6).

Alle im gegenwärtigen Paragraphen entwickelten Formeln gelten in gleicher Weise für eigentliche wie für uneigentliche Dreiecke; denn die Functionen Cosinus und Sinus ändern sich nicht, wenn man das Argument um ein beliebiges Vielfaches von 2π vermehrt.

§ 2.

Die Delambre'schen und L'Huilier'schen Formeln.

Wir knüpfen jetzt an die Formeln (2) des § 1 an, indem wir aus ihnen die Relationen herleiten

$$\frac{\sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 s_2}{\sin^2 a_1}}, \quad \frac{\cos \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 s_3}{\sin^2 a_1}}.$$

Die Werthe der beiden Quadratwurzeln, die man hier auszuziehen hat, sind nicht von einander unabhängig. Es muss vielmehr, wenn die erste Wurzel durch $\varepsilon \cdot \frac{\sin s_2}{\sin a_1}$ erklärt wird ($\varepsilon = \pm 1$), die zweite durch $\varepsilon \cdot \frac{\sin s_3}{\sin a_1}$ erklärt werden. Bezeichnen wir nämlich die

zweite Wurzel mit $\varepsilon' . \frac{\sin s_3}{\sin a_1}$ $(\varepsilon' = \pm 1)$, so folgt $\frac{\sin \alpha_2 . \sin \alpha_3}{4 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}} =$ $\varepsilon\varepsilon' . \frac{\sin s_2 . \sin s_3}{\sin^2 a_1}$, oder, wegen der Formeln (2), (5) des § 1:

$$\sin^2 a_1 . \sin a_2 . \sin a_3 . \sin \alpha_2 . \sin \alpha_3 = \varepsilon\varepsilon' . P^2,$$

d. h., es ist $\varepsilon\varepsilon' = +1$. Aus der Verbindung der beiden so gewonnenen Relationen gehen nun die beiden ersten der sogenannten GAUSS'schen, besser DELAMBRE'schen Formeln hervor[1]:

$$(1)\quad \text{I.}\begin{cases} \dfrac{\sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \pm \dfrac{\cos \frac{a_2 - a_3}{2}}{\cos \frac{a_1}{2}}, & \dfrac{\sin \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \mp \dfrac{\sin \frac{a_2 - a_3}{2}}{\sin \frac{a_1}{2}}, \\[2ex] \dfrac{\cos \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}} = \mp \dfrac{\cos \frac{a_2 + a_3}{2}}{\cos \frac{a_1}{2}}, & \dfrac{\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}} = \pm \dfrac{\sin \frac{a_2 + a_3}{2}}{\sin \frac{a_1}{2}}. \end{cases}$$

Dabei gehören zunächst in der oberen Reihe die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen; ebenso gehören aber in der ganzen Formelgruppe I die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen. Man erkennt dies, indem man entweder z. B. auch die Formeln links auf eine ähnliche Weise herleitet, wie wir soeben die beiden oberen Formeln gewonnen haben — oder auch, von den oberen Formeln ausgehend, durch Benutzung des Sinussatzes:

$$\frac{\sin \alpha_2 \pm \sin \alpha_3}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin a_2 \pm \sin a_3}{\sin a_1}.$$

Neben diese Formeln I stellen sich noch zwei weitere, mit II und III zu bezeichnende Formelsysteme, die aus jenen durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehen. In jedem einzelnen von ihnen gehören die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen[2].

---

1) Diese wichtige Formelgruppe ist bekanntlich ungefähr gleichzeitig von DELAMBRE (1807), MOLLWEIDE (1808) und GAUSS (1809) veröffentlicht worden.

2) Eine andere Herleitung der Formeln I, die auf GAUSS selbst zurückgeführt wird, findet sich bei BALTZER (Elemente der Mathematik, II. 5. Aufl. S. 119). Dort fehlt indessen der algebraische Nachweis für die Zusammengehörigkeit der Vorzeichen in den drei Formelgruppen I, II, III. Diese Zusammengehörigkeit wird nämlich aus dem Umstande erschlossen, dass alle Seiten und Winkel der betrachteten Dreiecke kleiner als π sind. Eine solche Schlussweise ist, nach dem in der Einleitung Gesagten, nicht befriedigend, und in unserem Zusammenhange, wo jene Voraussetzung gar nicht zutrifft, auch nicht genügend.

Um zu zeigen, dass auch in allen drei Formelgruppen I, II, III *gleichzeitig* entweder nur die oberen oder nur die unteren Vorzeichen gewählt werden dürfen, führen wir die Entwickelung sogleich noch einen Schritt weiter, indem wir die Ableitung der Simon-L'Huilier-schen Formeln für $\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}$ vorbereiten.

Die Delambre'schen Formeln verbinden je vier Grössen in dieser Weise: $\frac{a}{b} = \pm\frac{c}{d}$. Schreibt man hierfür $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c\mp d}{c\pm d}$, so ergeben sich, wenn in den Formeln I die oberen Vorzeichen angenommen werden, die Relationen

$$(2)\quad \mathrm{I}\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_3}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_3}{2} = \operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2};\end{cases}$$

wenn dagegen die unteren Vorzeichen gelten, die Relationen

$$(2^*)\quad \mathrm{I}\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s_2}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_3}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_1}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_3}{2} = \operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_3}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_3}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s_0}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_1}{2}.\end{cases}$$

Bildet man nun die entsprechenden Formeln II und III, so sieht man sofort, dass die Annahme unzulässig ist, es könnten in einer der Formelgruppen (1) I, (1) II, (1) III die oberen und in einer anderen die unteren Vorzeichen gewählt werden.

Bei einem Dreieck, dessen Seiten und Winkel zwischen 0 und π liegen, sind, wie leicht zu sehen, nur die oberen Vorzeichen zulässig. Andrerseits wechseln die Vorzeichen der Delambre'schen Formeln, wenn man eine einzelne Seite oder einen einzelnen Winkel um 2π vermehrt. Hier scheidet sich also die Mannigfaltigkeit der eigentlichen von der der uneigentlichen Dreiecke:

Bei den eigentlichen Dreiecken gelten in den Delambre'schen Formeln die oberen, bei den uneigentlichen die unteren Vorzeichen. Die Delambre-schen Formeln unterscheiden sich hierin von den älteren, sogenannten Neper'schen Formeln für $\operatorname{tg}\frac{a_2\pm a_3}{2}$ u. s. f., die man durch Division aus ihnen ableiten kann; diese gelten ebenso für eigentliche wie für uneigentliche Dreiecke.

In ähnlicher Weise kann man natürlich alle trigonometrischen Formeln in zwei Classen theilen: In solche, die für Dreiecke beider

Arten gelten, und in solche, die sich nur auf eigentliche Dreiecke beziehen. (Die uneigentlichen Dreiecke mögen hier bei Seite gelassen werden.) Die Formeln der ersten Classe haben ihre Wurzel im Cosinus- und Sinus-Satz, die der zweiten in den DELAMBRE'schen Gleichungen. Von diesen Grundformeln aus vollzieht sich der Uebergang zu allen anderen Formeln derselben Classe durch eindeutige Operationen, und ebenso natürlich auch der Uebergang von den Formeln der zweiten Classe zu denen der ersten; dagegen erfordert der Uebergang von der ersten zur zweiten Classe die Bestimmung des Vorzeichens einer Quadratwurzel (die übrigens selbst eine rational bekannte Grösse ist), also eine Wahl zwischen zwei Möglichkeiten.

Diese Bemerkung ist wichtig für die Auffassung der ganzen sphärischen Trigonometrie.

Es ist nämlich damit einmal der tiefere Grund für die grosse Bedeutung der DELAMBRE'schen Gleichungen aufgedeckt; sodann ist gezeigt, dass ein zweiter Fortschritt ähnlicher Art wie der, der vom Cosinus- und Sinus-Satz zu den DELAMBRE'schen Gleichungen führt, *nicht* möglich ist. Es liegt dies daran, dass die eigentlichen Dreiecke nicht wieder in getrennte Schaaren zerfallen, sondern eine continuirliche Mannigfaltigkeit bilden, wie wir im ersten Abschnitt gesehen haben. *Die Entwickelung der sphärischen Trigonometrie ist also nach gewisser Richtung hin abgeschlossen.* —

Wir wenden uns jetzt zur Ableitung der L'HUILIER'schen Formeln, die ebenfalls zur zweiten Classe gehören, und dasselbe aussagen, wie die DELAMBRE'schen Gleichungen. Wir beschränken uns dabei auf die *eigentlichen* Dreiecke.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\prod_0^3 \operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2} = M^2 = \prod_0^3 \operatorname{tg}\frac{s_i}{2}, \tag{3}$$

so folgt aus den Formeln (2)

$$\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s_\varkappa}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma_\varkappa}{2} = M^2 \qquad (i, \varkappa = 0, 1, 2, 3).$$

Man kann also die Wurzel aus M^2 so erklären:

$$\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2} = M \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{4}$$

M ist nach (3) durch eine Quadratwurzel zu bestimmen, wenn entweder nur die Grössen $\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}$ oder nur die Grössen $\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}$ rational bekannt sind. Bei Dreiecken, deren Seiten und Winkel zwischen 0 und π liegen, hat M einen *positiven* Werth.

Dies sind die berühmten Formeln von Simon L'Huilier. Die in Bezug auf die vier Indices 0 . . . 3 vollkommen symmetrische Gestalt, in der sie sich hier dargeboten haben, findet sich übrigens wohl noch nicht in der Literatur. Sie beruht auf dem Umstande, dass wir für die Grösse $\pi - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2}$ ein besonderes Zeichen s_0 eingeführt haben, und nicht, wie gebräuchlich, für die Grösse $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2}$; eine Neuerung, die sich auch sonst vielfach als zweckmässig erweist.

Die Formeln (4) geben, wenn das Dreieck aus seinen Seiten bestimmt werden soll, die Winkel und den sphärischen Excess durch vier verschiedene Rechnungen. Sie bieten also eine Controle und die Möglichkeit einer Ausgleichung.

§ 3.

Folgerungen aus den L'Huilier'schen Formeln[1].

Die letzten Formeln des § 2 zusammen mit den goniometrischen Identitäten

$$(1)\quad \begin{aligned} \sum_0^3{}_i \sum_0^3{}_\varkappa \operatorname{tg}\frac{s_i}{2}\operatorname{tg}\frac{s_\varkappa}{2} &= 1 + \operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2} \\ \sum_0^3{}_i \sum_0^3{}_\varkappa \operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_\varkappa}{2} &= 1 + \operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_3}{2} \end{aligned} \qquad (i \neq \varkappa)$$

enthalten einen sehr einfachen Ausdruck der Abhängigkeit zwischen den Seiten und Winkeln eines *eigentlichen* sphärischen Dreiecks. Sie fordern dazu heraus, Seiten und Winkel durch ein und dasselbe System von vier Grössen auszudrücken, zwischen denen noch eine Gleichung besteht.

---

1) Diesen Paragraphen kann man überschlagen, ohne das Verständniss des Folgenden zu beeinträchtigen. Doch wird er gerade für einen mit der Gruppentheorie nicht vertrauten Leser zur Einführung besonders geeignet sein.

Setzen wir nämlich, mit C eine Grösse bezeichnend, über die wir noch in geeigneter Weise verfügen wollen,

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\frac{s_\varkappa}{2} = C\,.\,e^{v_\varkappa}\,, \quad \operatorname{tg}\frac{\sigma_\varkappa}{2} = C\,.\,e^{w_\varkappa} \quad (\varkappa = 0, 1, 2, 3)\,,$$

so werden die Gleichungen (2), (3), (4) des § 2 erfüllt, wenn wir die Grössen $v_\varkappa$, $w_\varkappa$ durch ein System von vier Grössen $u_0 \ldots u_3$ in folgender Weise ausdrücken:

$$(3) \quad \begin{cases} 2v_0 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3\,, & 2w_0 = u_0 - u_1 - u_2 - u_3\,, \\ 2v_1 = u_0 + u_1 - u_2 - u_3\,, & 2w_1 = u_0 - u_1 + u_2 + u_3\,, \\ 2v_2 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3\,, & 2w_2 = u_0 + u_1 - u_2 + u_3\,, \\ 2v_3 = u_0 - u_1 - u_2 + u_3\,, & 2w_3 = u_0 + u_1 + u_2 - u_3\,. \end{cases}$$

Die Grössen $u_\varkappa$ haben wir noch den einer einzigen Bedingungsgleichung äquivalenten Relationen (1) anzupassen. Diese erhalten eine besonders elegante und symmetrische Gestalt, wenn wir

$$(4) \qquad C = i = \sqrt{-1}$$

nehmen: Die Relationen (1) führen dann zu der Bedingung

$$(5) \qquad \sum_0^3{}_\varkappa \{e^{u_\varkappa} + e^{-u_\varkappa}\} = 2\sum_0^3{}_\varkappa \cos iu_\varkappa = 0.$$

Hieran knüpft sich eine bemerkenswerthe Folgerung.

Die Gleichung (5) ändert nämlich ihre Form nicht

1) wenn man eine beliebige der Grössen $u_\varkappa$ um ein *gerades* Vielfaches von $i\pi$ vermehrt,

2) wenn man alle Grössen $u_\varkappa$ gleichzeitig um je ein *ungerades* Vielfaches von $i\pi$ vermehrt,

3) wenn man irgend eine der Grössen $u_\varkappa$ durch $-u_\varkappa$ ersetzt,

4) wenn man die Grössen $u_\varkappa$ beliebig vertauscht.

In ihrer Gesammtheit erzeugen diese Aenderungen eine unendliche Gruppe Γ von linearen Substitutionen der Grössen $u_\varkappa$. Jede solche Substitution führt, allgemein zu reden, zu einer gewissen Aenderung der Grössen $\operatorname{tg}\frac{s_\varkappa}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\sigma_\varkappa}{2}$; es entsteht daher die Frage, in welcher Beziehung die zu den beiderlei Grössensystemen gehörigen sphärischen Dreiecke zu einander stehen?

Um dies zu entscheiden, bemerken wir, dass die Gruppe Γ eine invariante Untergruppe (S. 107) K enthält, bestehend aus allen den Substitutionen von Γ, die die Grössen $\operatorname{tg}\frac{s_\varkappa}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\sigma_\varkappa}{2}$ überhaupt

nicht ändern. Es sind das erstens die Aenderungen der Grössen $u_\varkappa$ um beliebige Vielfache von $4i\pi$, zweitens die gleichzeitige Aenderung zweier der Grössen $u_\varkappa$ um dasselbe (ungerade) Vielfache von $2i\pi$.

Wir ordnen jetzt alle diese Substitutionen der identischen Substitution zu. Dann reducirt sich die Gruppe Γ auf eine endliche Gruppe, die wir nunmehr näher zu untersuchen haben (vgl. S. 108, Anmerk.).

Zunächst bemerken wir, dass die unter 3) genannten Substitutionen eine Untergruppe von sechszehn, die unter 4) genannten Substitutionen eine Untergruppe von vierundzwanzig, und die unter 1) und 2) genannten Substitutionen eine Untergruppe von vier wesentlich verschiedenen Substitutionen bilden, und dass aus der Zusammensetzung dieser dreierlei Gruppen die besprochene endliche Gruppe entsteht. In der That sind jetzt von den Aenderungen um Vielfache von $i\pi$ wesentlich, d. h. mod. K, von der identischen Substitution und von einander verschieden nur noch die folgenden:

$$\begin{aligned} u_0' &= u_0 + 2i\pi, & u_\varkappa' &= u_\varkappa, \\ u_0' &= u_0 + i\pi, & u_\varkappa' &= u_\varkappa + i\pi, \quad (\varkappa = 1, 2, 3), \\ u_0' &= u_0 - i\pi, & u_\varkappa' &= u_\varkappa + i\pi, \end{aligned}$$

die mit der Identität zusammen (mod. K) eine Gruppe H_4 bilden. Unsere Gruppe umfasst also $4 . 16 . 24 = 1536$ Substitutionen; sie mag daher mit Γ_{1536} bezeichnet werden.

Jetzt sind wir im Stande, die vorhin aufgeworfene Frage auf eine einfache Weise zu beantworten, indem wir gleichzeitig unsere nunmehrigen Betrachtungen in Zusammenhang bringen mit der im I. Abschnitt durchgeführten Untersuchung:

Unterwirft man die Grössen $\operatorname{tg}\frac{s_\varkappa}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\sigma_\varkappa}{2}$ *einmal den Substitutionen der Gruppe* Γ_{1536}, *dann den Substitutionen der in* § 7 *des ersten Abschnittes definirten Gruppe* $\mathfrak{G}_{1536}$, *so sind die Aenderungen der genannten Grössen, bei geeigneter Zuordnung der Substitutionen beider Gruppen, in beiden Fällen dieselben. Die Gruppen* Γ_{1536} *und* $\mathfrak{G}_{1536}$ *sind also holoëdrisch isomorph*[1]). *Die Anwendung der Substitutionen von* Γ *auf die Parameter* $u_\varkappa$ *führt daher zu allen eigentlichen Dreiecken, die zu*

1) Die Gruppen $\mathfrak{G}$ und Γ selbst sind danach in der Weise isomorph auf einander bezogen, dass jeder Substitution der einen Gruppe mehrere (nämlich unendlich viele) Substitutionen der anderen Gruppe entsprechen.

dem nämlichen Dreikant gehören, und zu keinen weiteren. Dreiecke, deren Seiten und Winkel sich nur um Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{K}'$ (S. 113) unterscheiden, sind natürlich in diesem Zusammenhang als äquivalent anzusehen.

Es wird genügen, wenn wir die Substitutionen der Gruppe Γ_{1536} angeben, die der in $\mathfrak{G}_{1536}$ enthaltenen Gruppe $\mathfrak{G}_{128}$ (S. 115) entsprechen: Die anderen Substitutionen ergeben sich einmal durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3, dann durch Vertauschung der Seiten mit den Winkeln, also durch die Substitution

$$u_0' = u_0, \quad u_\varkappa' = -u_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Bezeichnen wir noch zur Abkürzung mit $\mathfrak{T}$ eine nicht in $\mathfrak{K}'$ enthaltene Substitution der Gruppe $\mathfrak{K}$[1]):

$$\mathfrak{T}: \begin{cases} a_i' = a_i + 2k_i\pi & (i = 1, 2, 3;\ \Sigma k_i \equiv 1 \mod 2) \\ \alpha_i' = \alpha_i + 2\varkappa_i\pi & (i = 1, 2, 3;\ \Sigma \varkappa_i \equiv 1 \mod 2), \end{cases}$$

so ergibt sich folgende Uebertragungstafel:

		u_0'	u_1'	u_2'	u_3'	
	1	u_0	u_1	u_2	u_3	(H_4)
	T	$u_0 - i\pi$	$u_1 + i\pi$	$u_2 + i\pi$	$u_3 + i\pi$	
	T	$u_0 + i\pi$	$u_1 + i\pi$	$u_2 + i\pi$	$u_3 + i\pi$	
(6)	$T\mathrm{T}$	$u_0 + 2i\pi$	u_1	u_2	u_3	(mod. K)
	$\mathfrak{T}$	$-u_0$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	
	S_1	$-u_1$	$-u_0$	$-u_3$	$-u_2$	
	Σ_1	u_1	u_0	$-u_3$	$-u_2$	

Ordnet man $\mathfrak{T}$ der identischen Substitution zu, so reducirt sich die Gruppe $\mathfrak{G}_{128}$ auf $\mathfrak{G}_{64}$. Der Untergruppe $\mathfrak{H}_4$ entspricht die aus den ersten vier Substitutionen bestehende Gruppe H_4 von Aenderungen der Parameter u, der Untergruppe $\mathfrak{G}_{16}$ die Gruppe Γ_{16}, deren erzeugende Operationen die gleichzeitige Vertauschung von je zweien der Grössen $u_\varkappa$, und der Vorzeichenwechsel von zweien dieser Grössen sind. —

Mit Hülfe der entwickelten Formeln lassen sich die Grössen $\operatorname{tg}\frac{s_\varkappa}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\sigma_\varkappa}{2}$ und also auch die Sinus und Cosinus der Seiten und

1) Diese Substitution $\mathfrak{T}$ hat natürlich nichts zu thun mit der in der Theorie der ebenen Dreiecke ebenso benannten Substitution.

Winkel eines sphärischen Dreiecks *rational* ausdrücken durch vier Grössen, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht. Setzt man nämlich

$$(7) \qquad t_\varkappa = e^{u_\varkappa} \; (\varkappa = 0, 1, 2, 3), \quad W = \sqrt{-t_0 t_1 t_2 t_3},$$

so tritt an Stelle von (5) die algebraische Gleichung

$$(8) \qquad \sum \left(t_\varkappa + \frac{1}{t_\varkappa}\right) = 0.$$

Es folgt nun

$$(9) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{s_0}{2} = W, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2} = \frac{W}{t_1 t_2 t_3}, \\ \operatorname{tg}\frac{s_1}{2} = \frac{W}{t_2 t_3}, & \operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2} = \frac{W}{t_1}; \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{a_1}{2} = \dfrac{W\left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)}{t_0 + t_1}, \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \dfrac{W\left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)}{1 + t_0 t_1}, \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\sin s_1}{\sin s_0} = \dfrac{1 - t_0 t_1 t_2 t_3}{t_2 t_3 - t_0 t_1}, \\ \dfrac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma_0} = \dfrac{1 - t_0 t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1}}{t_2^{-1} t_3^{-1} - t_0 t_1^{-1}}, \end{cases}$$

u. s. f. — Die Irrationalität W lässt sich leicht beseitigen dadurch, dass man an Stelle der Grössen $t_\varkappa$ andere Parameter einführt, z. B. durch die Substitutionen $t_0 = -\tau_0^2$, $t_\varkappa = \tau_\varkappa^2$.

In anderer Weise kann man die Formeln (7) ... (11) dadurch abändern, dass man vier Verhältnissgrössen einführt, die von einander unabhängig sind, z. B. durch die Substitution:

$$e^{u_\varkappa} = t_\varkappa = \sqrt{-\frac{\sum \frac{1}{\zeta_\varkappa}}{\sum \zeta_\varkappa}} \cdot \zeta_\varkappa.$$

Wir gehen auf die hiermit berührte Abbildung der Mannigfaltigkeit der sphärischen Dreiecke auf die Punkte eines dreifach ausgedehnten Raumes nicht näher ein, da wir alsbald eine andere Abbildung dieser Art kennen lernen werden, die viel interessantere Eigenschaften besitzt.

§ 4.

Folgerungen aus den Delambre'schen Formeln.

Sinus und Cosinus irgend eines Winkels lassen sich rational ausdrücken durch Tangente oder Cotangente des halben Winkels. Es liegt daher nahe, zu fragen, wie sich die Grössen

$$(1)\qquad l_i = \operatorname{ctg}\frac{a_i}{2}, \quad \lambda_i = \operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}$$

gegenseitig durch einander ausdrücken?

Zur Beantwortung knüpfen wir an die Delambre'schen Formeln (1), § 2 an. (S. S. 128.)

Indem wir alle dort vorkommenden goniometrischen Functionen durch die Grössen l_i, λ_i darstellen, gelangen wir zu den Formeln

$$\frac{(1+\lambda_1^2)(\lambda_2+\lambda_3)^2}{(1+\lambda_2^2)(1+\lambda_3^2)} = \frac{(1+l_1^2)(1+l_2l_3)^2}{l_1^2(1+l_2^2)(1+l_3^2)},$$

$$\frac{(1+\lambda_1^2)(\lambda_2-\lambda_3)^2}{(1+\lambda_2^2)(1+\lambda_3^2)} = \frac{(1+l_1^2)(l_2-l_3)^2}{(1+l_2^2)(1+l_3^2)},$$

$$\frac{(1+\lambda_1^2)(1-\lambda_2\lambda_3)^2}{\lambda_1^2(1+\lambda_2^2)(1+\lambda_3^2)} = \frac{(1+l_1^2)(1-l_2l_3)^2}{l_1^2(1+l_2^2)(1+l_3^2)},$$

$$\frac{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2\lambda_3)^2}{\lambda_1^2(1+\lambda_2^2)(1+\lambda_3^2)} = \frac{(1+l_1^2)(l_2+l_3)^2}{(1+l_2^2)(1+l_3^2)}.$$

Diese Gleichungen, zwölf an der Zahl, lassen sich leicht nach den Grössen l_i oder λ_i auflösen: Die Producte $l_il_\varkappa$ und $\lambda_i\lambda_\varkappa$ drücken sich, wie man nach einiger Rechnung findet, gegenseitig *linear* durch einander aus vermöge der involutorischen Transformation:

$$(2)\qquad \begin{cases} l_2l_3 = \dfrac{1-\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}{-1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}, \\[2ex] l_3l_1 = \dfrac{1+\lambda_2\lambda_3-\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}{-1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}, \\[2ex] l_1l_2 = \dfrac{1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-\lambda_1\lambda_2}{-1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} \end{cases}$$ [1]).

1) Deutet man die Producte $l_il_\varkappa$, $\lambda_i\lambda_\varkappa$ als Cartesische Coordinaten in einem sechsfach ausgedehnten Raume R_6, so definiren die Gleichungen (2) eine dreifach ausgedehnte rationale Mannigfaltigkeit M_3^4 4. Ordnung, die, doppelt gerechnet, den vollständigen Schnitt dreier quadratischer Mannigfaltigkeiten M_5^2 ausmacht; deutet man die Grössen l_i, λ_i selbst als Cartesische Coordinaten, so entsteht eine Mannigfaltigkeit M_3^8 8. Ordnung, die, achtfach gezählt, den vollständigen Durchschnitt von drei biquadratischen Mannigfaltigkeiten M_5^4 bildet. Die Coordinaten l_i, λ_i eines veränderlichen Punktes der Mannigfaltigkeit M_3^8 können, wie wir im III. Abschnitt sehen werden (§ 5, Nr. 9), mit Hülfe der elliptischen Functionen eindeutig durch drei Parameter ausgedrückt werden.

Aus den Gleichungen (2) ergibt sich, wenn man sie in geeigneter Weise mit einander verbindet, der Satz:

Die vier Quotienten

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{1+l_2 l_3}{\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}, & -\dfrac{1-l_2 l_3}{1-\lambda_2\lambda_3}, \\ \dfrac{l_3 l_1+l_1 l_2}{1+\lambda_2\lambda_3}, & -\dfrac{l_3 l_1-l_1 l_2}{\lambda_3\lambda_1-\lambda_1\lambda_2}, \end{cases}$$

und die acht übrigen, die aus ihnen durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 *hervorgehen, haben alle denselben Werth.*

Dieser Werth (die im nächsten Paragraphen mit $\frac{Y_0}{Z_0}$ bezeichnete Grösse) kann auf mehrere Arten in eine in Bezug auf l_1, l_2, l_3 oder $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ symmetrische Form gesetzt werden, z. B.

$$(3^*)\quad \begin{cases} \dfrac{-1+l_2 l_3+l_3 l_1+l_1 l_2}{2} = \dfrac{2}{-1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} \\ = \dfrac{1+l_2 l_3+l_3 l_1+l_1 l_2}{1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{\dfrac{l_1 l_2 l_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\cdot\dfrac{\Pi}{P}}\,. \end{cases}$$

Die Formeln (2) oder die mit ihnen äquivalenten Nr. (3) ersetzen die zuerst angeschriebenen Gleichungen *vollständig. Sie enthalten wohl den algebraisch einfachsten Ausdruck der Abhängigkeit zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks.* Die in ihnen vorkommenden Producte $l_i l_\varkappa$, $\lambda_i\lambda_\varkappa$ lassen sich, was zu bemerken für uns wichtig ist, (mit Hülfe des Cosinussatzes) rational darstellen durch die Functionen $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$:

$$(4)\quad \begin{cases} l_2 l_3 = \dfrac{\cos a_2 \,.\, \cos a_3 - \cos a_1}{\cos \alpha_1\,(1-\cos a_2)(1-\cos a_3)}, \\ \lambda_2\lambda_3 = \dfrac{\cos \alpha_2 \,.\, \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1}{\cos a_1\,(1-\cos \alpha_2)(1-\cos \alpha_3)}\,. \text{ —} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (2) oder (3) ergibt sich noch eine weitere bemerkenswerthe Folgerung. Drückt man nämlich die Grössen $\sin s_i$, $\sin \sigma_i$ ebenfalls durch die Grössen l_i, λ_i aus, so findet man, mit Hülfe von (2), ohne Mühe

$$(5)\quad \begin{cases} \sin s_0 : \sin s_1 : \sin s_2 : \sin s_3 \\ = 1 : \lambda_2\lambda_3 : \lambda_3\lambda_1 : \lambda_1\lambda_2, \\ \sin \sigma_0 : \sin \sigma_1 : \sin \sigma_2 : \sin \sigma_3 \\ = 1 : l_2 l_3 : l_3 l_1 : l_1 l_2\,. \end{cases}$$

Verbindet man diese Formeln von Neuem mit (2) oder mit (3), so folgt

$$(6)\qquad \frac{\sin\sigma_0 + \sin\sigma_1}{\sin\sigma_2 + \sin\sigma_3} = \frac{\sin s_2 + \sin s_3}{\sin s_0 + \sin s_1},$$

eine Relation, mit der (nachdem sie in eine andere Gestalt gebracht worden ist) wir uns noch weiter zu beschäftigen haben werden. Wir haben die Formel (6) hier schon angeführt, um die Bemerkung hinzuzufügen, dass man diese Gleichung auch unmittelbar aus den Delambre'schen Formeln ableiten kann. Sie geht nämlich durch eine einfache Umformung über in die Gleichung

$$\frac{\cos\frac{\alpha_1}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}} = \frac{\sin\frac{a_1}{2}\cdot\cos\frac{a_2-a_3}{2}}{\cos\frac{a_1}{2}\cdot\sin\frac{a_2+a_3}{2}},$$

die ohne Weiteres den Delambre'schen Formeln zu entnehmen ist. Verbindet man die so begründete Gleichung (6) mit (5) (worin man an Stelle der Producte $l_i l_x$, $\lambda_i\lambda_x$ ihre unter (2) angegebenen Werthe stehen lassen mag), so gelangt man zu einer zweiten Herleitung der Formeln (2), (3). —

Schliesslich wollen wir hier der Vollständigkeit wegen noch einige Formeln anführen, die zum Theil nur wenig bekannt geworden sind, und von denen auch wir fernerhin keinen Gebrauch zu machen haben werden.

Eine erste, von Lagrange angegebene Formelgruppe liefert merkwürdig einfache Ausdrücke für die Producte $\Pi\,.\,\mathrm{ctg}\, s_i$.

Substituirt man in den Ausdruck

$$\mathrm{tg}\, s_0 = -\frac{\mathrm{tg}\frac{a_1}{2} + \mathrm{tg}\frac{a_2+a_3}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{a_1}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{a_2+a_3}{2}}$$

für $\mathrm{tg}\frac{a_2+a_3}{2}$ den aus den Delambre'schen (oder Neper'schen) Gleichungen hervorgehenden Werth, so findet man nach einer leichten Umformung

$$\mathrm{tg}\, s_0 = \frac{\sin\frac{\alpha_2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_3}{2}\cdot\sin a_1}{\cos\frac{\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_3}{2} - \sin\frac{\alpha_2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_3}{2}\cdot\cos a_1} =$$

$$= \frac{\sin\alpha_2\,.\,\sin\alpha_3\,.\,\sin a_1}{4\cos^2\frac{\alpha_2}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha_3}{2} - \sin\alpha_2\,.\,\sin\alpha_3\,.\,\cos a_1} =$$

$$= \frac{\Pi}{(1+\cos\alpha_2)(1+\cos\alpha_3)+(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\alpha_3)}.$$

Es gelten also die Gleichungen

$$(7)\quad \begin{cases} \Pi \, . \operatorname{ctg} s_0 = 1 + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3, \\ \Pi \, . \operatorname{ctg} s_1 = 1 + \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 - \cos \alpha_3, \\ \Pi \, . \operatorname{ctg} s_2 = 1 - \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - \cos \alpha_3, \\ \Pi \, . \operatorname{ctg} s_3 = 1 - \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{4}{P} = \operatorname{ctg} \sigma_0 + \operatorname{ctg} \sigma_1 + \operatorname{ctg} \sigma_2 + \operatorname{ctg} \sigma_3, \\ \dfrac{4}{\Pi} = \operatorname{ctg} s_0 + \operatorname{ctg} s_1 + \operatorname{ctg} s_2 + \operatorname{ctg} s_3, \end{cases}$$

und zwar für eigentliche sowohl wie für uneigentliche Dreiecke.

Zerlegt man ferner z. B. $\sin s_0$ nach der Vorschrift

$$\sin s_0 = \sin \frac{\alpha_1}{2} . \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \cos \frac{\alpha_1}{2} . \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2},$$

und benutzt man wieder die DELAMBRE'schen Formeln, so entsteht die erste der bekannten Relationen

$$(9)\quad \begin{cases} \sin s_0 = \dfrac{\pm \Pi}{4 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_3}{2}}, \\ \sin s_1 = \dfrac{\pm \Pi}{4 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2}}; \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Unbestimmtheit der Vorzeichen ist hier dieselbe, wie in den DELAMBRE'schen Formeln.

Verbindet man endlich die Formeln (7) und (9), so folgt

$$\cos s_0 = \pm \frac{1 + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3}{4 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_3}{2}} =$$

$$= \pm \frac{\cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_3}{2} - \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2} \cdot \cos \alpha_1}{\cos \frac{\alpha_1}{2}}.$$

Anderseits ist nach (9)

$$\sin s_0 = \pm \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}},$$

also

$$(10)\quad \begin{cases} \operatorname{ctg} s_0 = \dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha_3}{2} - \cos a_1}{\sin a_1} = \\ = \dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha_3}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2} - \cos a_2}{\sin a_2} = \dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2} - \cos a_3}{\sin a_3}, \\ \operatorname{ctg} s_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2} - \cos a_1}{\sin a_1} = \\ = \dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2} + \cos a_2}{\sin a_2} = \dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} + \cos a_3}{\sin a_3}\ ^{1)}. \end{cases}$$

Auch diese Formeln gelten wieder für eigentliche wie für uneigentliche Dreiecke.

Aus den Relationen (9) gehen von Neuem die Proportionen (5) hervor.

§ 5.

Einführung der Parameter X, Y, Z und der orthogonalen Substitutionen.

Die Betrachtung der Formeln des vorigen Paragraphen legt den Gedanken nahe, statt der Producte $l_i l_\varkappa$, $\lambda_i\lambda_\varkappa$ zwei Systeme von je *vier* Grössen Y_i, Z_i einzuführen, die mit jenen in folgendem Zusammenhange stehen:

$$(1)\quad \begin{cases} Y_0 = \dfrac{2}{1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} = \dfrac{-1+l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2}{1+l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2}, \\ Y_1 = \dfrac{2\lambda_2\lambda_3}{1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} = \dfrac{1-l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2}{1+l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2}, \quad \text{u. s. f.} \\ Z_0 = \dfrac{2}{1+l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2} = \dfrac{-1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}{1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}, \\ Z_1 = \dfrac{2l_2l_3}{1+l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2} = \dfrac{1-l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2}{1+l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2}, \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Grössen Y_i, Z_i drücken sich dann so durch einander aus:

$$(2)\quad \begin{cases} 2Y_0 = -Z_0+Z_1+Z_2+Z_3, & 2Z_0 = -Y_0+Y_1+Y_2+Y_3, \\ 2Y_1 = Z_0-Z_1+Z_2+Z_3, & 2Z_1 = Y_0-Y_1+Y_2+Y_3, \\ 2Y_2 = Z_0+Z_1-Z_2+Z_3, & 2Z_2 = Y_0+Y_1-Y_2+Y_3, \\ 2Y_3 = Z_0+Z_1+Z_2-Z_3, & 2Z_3 = Y_0+Y_1+Y_2-Y_3. \end{cases}$$

1) Vgl. überall BALTZER, Trigonometrie, Nr. 14 u. ff. (5. Aufl. S. 325), SERRET, Traité de Trigonométrie Nr. 124.

Grössen aber, die in dieser Abhängigkeit stehen, lassen sich wiederum in einfacher Weise darstellen durch vier Hülfsgrössen X_i[1]:

$$(3)\quad \begin{cases} 2Y_0 = X_0 + X_1 + X_2 + X_3, & 2Z_0 = X_0 - X_1 - X_2 - X_3, \\ 2Y_1 = X_0 + X_1 - X_2 - X_3, & 2Z_1 = X_0 - X_1 + X_2 + X_3, \\ 2Y_2 = X_0 - X_1 + X_2 - X_3, & 2Z_2 = X_0 + X_1 - X_2 + X_3, \\ 2Y_3 = X_0 - X_1 - X_2 + X_3, & 2Z_3 = X_0 + X_1 + X_2 - X_3. \end{cases}$$

$X_0 = \frac{1}{2}(Y_i + Z_i)$ hat in unserem Falle den numerischen Werth Eins. Umgekehrt gelten die Formeln

$$(4)\quad \begin{cases} Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 = 2X_0 = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3, \\ Y_0 + Y_1 - Y_2 - Y_3 = 2X_1 = -Z_0 - Z_1 + Z_2 + Z_3, \\ Y_0 - Y_1 + Y_2 - Y_3 = 2X_2 = -Z_0 + Z_1 - Z_2 + Z_3, \\ Y_0 - Y_1 - Y_2 + Y_3 = 2X_3 = -Z_0 + Z_1 + Z_2 - Z_3. \text{ —} \end{cases}$$

Man sieht sogleich, dass sich die trigonometrischen Functionen der Seiten und Winkel des Dreiecks in sehr einfacher Weise darstellen lassen durch die *Verhältnisse* der so definirten Grössen X, Y, Z. Diese Ausdrücke wollen wir im nächsten Paragraphen entwickeln; zuvor aber wollen wir noch einige Formeln aufstellen, die uns weiterhin von Nutzen sein werden.

Man übersieht leicht, dass jede der Grössen X_i mit einer beliebigen der Grössen Y_j und einer durch beide bestimmten der Grössen $Z_\varkappa$ durch eine lineare Relation mit numerischen Coefficienten verbunden ist. Die hierin liegende Eigenschaft der drei zusammengehörigen Grössensysteme, dass das Verschwinden einer Grösse Y und einer Grösse Z das Verschwinden einer Grösse X nach sich zieht, findet einen einfachen Ausdruck in der Formel

$$(5)\qquad Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 - Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 = X_0 X_1 X_2 X_3,$$

die eine vollkommen symmetrische Gestalt annimmt, sobald man etwa an Stelle der Bezeichnung Y_0 die Bezeichnung $-Y_0$ setzt. —

Für das Folgende sind besonders wichtig gewisse homogene Functionen zweiten Grades der Grössen X, Y, Z, für die wir ebenfalls besondere Bezeichnungen einführen wollen:

---

1) Vgl. § 3, S. 132, Nr. (3), wo ebenfalls schon ein System von zwölf Grössen aufgetreten ist, die in dem durch die Formeln (2) . . . (4) angegebenen Zusammenhange stehen.

(6)

$$a_{00} = \sum_0^3{}' X_i^2 = \sum_0^3{}' Y_i^2 = \sum_0^3{}' Z_i^2$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 2(Y_2Y_3 + Y_0Y_1) = 2(Z_2Z_3 + Z_0Z_1) \\
a_{22} &= X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 2(Y_3Y_1 + Y_0Y_2) = 2(Z_3Z_1 + Z_0Z_2) \\
a_{33} &= X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 = 2(Y_1Y_2 + Y_0Y_3) = 2(Z_1Z_2 + Z_0Z_3) \\
a_{23} &= 2(X_2X_3 + X_0X_1) = Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2 = 2(Z_2Z_3 - Z_0Z_1) \\
a_{31} &= 2(X_3X_1 + X_0X_2) = Y_0^2 - Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 = 2(Z_3Z_1 - Z_0Z_2) \\
a_{12} &= 2(X_1X_2 + X_0X_3) = Y_0^2 - Y_1^2 - Y_2^2 + Y_3^2 = 2(Z_1Z_2 - Z_0Z_3) \\
a_{32} &= 2(X_2X_3 - X_0X_1) = 2(Y_2Y_3 - Y_0Y_1) = Z_0^2 + Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 \\
a_{13} &= 2(X_3X_1 - X_0X_2) = 2(Y_3Y_1 - Y_0Y_2) = Z_0^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 \\
a_{21} &= 2(X_1X_2 - X_0X_3) = 2(Y_1Y_2 - Y_0Y_3) = Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 + Z_3^2.
\end{aligned}$$

Es sind dies die bekannten, von EULER entdeckten Ausdrücke für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution in drei Veränderlichen, d. i. für die Coefficienten des Formelsystems

$$a_{00}\mathfrak{Z}_i' = a_{i1}\mathfrak{Z}_1 + a_{i2}\mathfrak{Z}_2 + a_{i3}\mathfrak{Z}_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

das den Uebergang von einem rechtwinkligen Coordinatensystem $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$ zu einem anderen $\mathfrak{Z}_1'$, $\mathfrak{Z}_2'$, $\mathfrak{Z}_3'$ mit demselben Anfangspunkt vermittelt. In der That überzeugt man sich sofort davon, dass zwischen den durch (6) definirten Grössen $a_{i\varkappa}$ die folgenden für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution charakteristischen Identitäten bestehen:

$$(7) \quad a_{00}^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(8) \quad \begin{aligned} 0 &= a_{i1}a_{\varkappa 1} + a_{i2}a_{\varkappa 2} + a_{i3}a_{\varkappa 3} \\ 0 &= a_{1i}a_{1\varkappa} + a_{2i}a_{2\varkappa} + a_{3i}a_{3\varkappa} \end{aligned} \quad (i \neq \varkappa;\ i, \varkappa = 1, 2, 3),$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= a_{00}a_{11} - a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}, \\ 0 &= a_{00}a_{23} - a_{12}a_{31} + a_{11}a_{32}, \\ 0 &= a_{00}a_{32} - a_{21}a_{13} + a_{11}a_{23}, \quad \text{u. s. w.,} \end{aligned} \right.$$

die die genannte Eigenschaft zum Ausdruck bringen[1]). Durch diese Grössen $a_{i\varkappa}$ drücken sich umgekehrt wieder die *Verhältnisse* der Grössen X, Y, Z rational aus, und zwar unter *allen* Umständen in eindeutig bestimmter Weise. Man findet ohne Mühe:

---

1) In Bd. 39 der Math. Annalen (1891, S. 514 u. ff.) hat der Verf. gezeigt, dass das angeschriebene Relationensystem in gewissem Sinne vollständig ist. Man findet dort auch die bilinearen Relationen zwischen den Parametern X_i (oder Y_i, Z_i) und den Coefficienten $a_{i\varkappa}$.

$$(10)\left\{\begin{aligned} &X_0 : X_1 : X_2 : X_3 \\ &= (a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33}) : (a_{23} - a_{32}) : (a_{31} - a_{13}) : (a_{12} - a_{21}) \\ &= (a_{23} - a_{32}) : (a_{00} + a_{11} - a_{22} - a_{33}) : (a_{12} + a_{21}) : (a_{31} + a_{13}) \\ &= (a_{31} - a_{13}) : (a_{12} + a_{21}) : (a_{00} - a_{11} + a_{22} - a_{33}) : (a_{23} + a_{32}) \\ &= (a_{12} - a_{21}) : (a_{31} + a_{13}) : (a_{23} + a_{32}) : (a_{00} - a_{11} - a_{22} + a_{33}). \end{aligned}\right.$$

Um die analogen Ausdrücke für die Verhältnisse der Grössen Y_i oder Z_i zu erhalten, braucht man offenbar nur das Grössensystem a_{00}, a_{ix} mit dem anders geordneten System derselben Grössen

$$\begin{matrix} & a_{23}\ a_{33}\ a_{13} \\ a_{00} & a_{21}\ a_{31}\ a_{11} \\ & a_{22}\ a_{32}\ a_{12} \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} & a_{32}\ a_{33}\ a_{31} \\ a_{00} & a_{12}\ a_{13}\ a_{11} \\ & a_{22}\ a_{23}\ a_{21} \end{matrix}$$

zu vertauschen.

§ 6.

Darstellung der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks durch die Parameter X, Y, Z.

Wir betrachten jetzt die Grössen X_i, von der besonderen Annahme $X_0 = 1$ absehend, als ein System von einander unabhängiger Verhältnissgrössen. Offenbar stellen auch in diesem Falle noch die durch die Formeln

$$(1) \qquad l_2 l_3 = \frac{Z_1}{Z_0}, \quad \lambda_2\lambda_3 = \frac{Y_1}{Y_0}$$

definirten Grössen l_i, λ_i die Cotangenten der halben Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks vor. Es wird also

$$(2)\left\{\begin{aligned} l_1 &= \operatorname{ctg}\frac{a_1}{2} = \frac{\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}}{Z_0Z_1} = \frac{Z_2Z_3}{\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}}, \\ \lambda_1 &= \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{Y_0Y_1Y_2Y_3}}{Y_0Y_1} = \frac{Y_2Y_3}{\sqrt{Y_0Y_1Y_2Y_3}}, \end{aligned}\right.$$

$$(3) \qquad \sin a_1 = \frac{4\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}}{a_{11}}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{4\sqrt{Y_0Y_1Y_2Y_3}}{a_{11}}.$$

Besonders merkwürdige Ausdrücke erhalten die *Cosinus* der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks. *Sie werden Quotienten gewisser ganzer rationaler Functionen der Grössen X_i, nämlich der Euler'schen Ausdrücke für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution:*

$$(4)\left\{\begin{aligned} &\cos a_1 = \frac{a_{23}}{a_{11}}, \quad \cos a_2 = \frac{a_{31}}{a_{22}}, \quad \cos a_3 = \frac{a_{12}}{a_{33}}, \\ &\cos\alpha_1 = \frac{a_{32}}{a_{11}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad \cos\alpha_3 = \frac{a_{21}}{a_{33}}. \end{aligned}\right.$$

Diese Quotienten besitzen nicht so einfache Eigenschaften, wie ihre Zähler und Nenner einzeln genommen. Es leuchtet daher ein, dass die Einführung der Grössen $a_{i\varkappa}$ in die sphärische Trigonometrie einen ähnlichen Vortheil mit sich bringt, wie er in zahlreichen anderen Fällen durch Zerspaltung einer homogenen Function 0ten Grades in homogene Functionen höheren Grades herbeigeführt wird. Zugleich ergibt sich uns die Einsicht in einen an und für sich interessanten Zusammenhang: *Unser Satz besagt, dass zu einer orthogonalen Substitution in drei Veränderlichen (im Allgemeinen) ein bestimmtes sphärisches Dreieck gehört* — sofern man nämlich (im Sinne der Schlussbemerkungen von § 1 des ersten Abschnittes) ein Dreieck als vollständig gegeben ansieht, wenn die Cosinus seiner Seiten und Winkel bekannt sind[1]).

Ferner findet sich, wenn man zur Abkürzung

$$(5) \qquad R = \sqrt{\frac{a_{11}}{2} \cdot \frac{a_{22}}{2} \cdot \frac{a_{33}}{2}}$$

setzt,

$$(6) \qquad P = \frac{8\,Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 \,.\, Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}{R^2 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}, \quad \Pi = \frac{8\,Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 \,.\, Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}{R^2 \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}.$$

Alle diese Formeln gelten in gleicher Weise für eigentliche, wie für uneigentliche Dreiecke; die folgenden aber, die die Irrationalität R enthalten, beziehen sich nur auf *eigentliche Dreiecke:*

$$(7) \qquad \sin s_i = \frac{2\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{R} \cdot Y_i, \quad \sin \sigma_i = \frac{2\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}{R} \cdot Z_i,$$

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos s_i &= \frac{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}{R} \left\{ \sum_0^3{}_\varkappa \frac{1}{Z_\varkappa} - \frac{2}{Z_i} \right\} \\ \cos \sigma_i &= \frac{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}{R} \left\{ \sum_0^3{}_\varkappa \frac{1}{Y_\varkappa} - \frac{2}{Y_i} \right\} \end{aligned} \right. \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Aus den Formeln (7) und (8), deren Verträglichkeit auf der Identität

$$(-Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_3 Z_1 + Z_0 Z_1 Z_2)^2 + 4\,Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \,.\, Y_0^2 = R^2$$

und den analogen Relationen beruht, gehen zwei verschiedene Ausdrücke für $\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}$ hervor:

---

1) Auf die Umkehrung des obigen Satzes bezieht sich der folgende Paragraph. Wegen der Ausnahmefälle vgl. § 10.

(9) $\operatorname{tg}\frac{s_1}{2} =$ [illegible]

Ferner erhalten die [illegible]

(10) I [illegible]

hieraus folgt sodann:

(11) I [illegible]

Aus den [illegible]

(S. 134) definierten [illegible]

(12) [illegible]

der Wert von [illegible]

leitet werden.

(13) [illegible]

[illegible]

Zunächst [illegible]

der Formeln (4). Aus diesen gehen sodann, mit Hülfe der von einander unabhängigen Quadratwurzeln aus $Y_0Y_1Y_2Y_3$ und $Z_0Z_1Z_2Z_3$ die Sinus hervor, so dass zu jedem System der Cosinus noch vier verschiedene Systeme der Sinus gehören. Diese entsprechen augenscheinlich den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{H}_4$ (I, § 4, S. 102). Dem gleichen Rationalitätsbereich gehören noch an die Grössen l_i, λ_i, P, Π.

In den übrigen Formeln kommt die Irrationalität R hinzu. Alle diese gelten, was wohl zu beachten ist, in der angeschriebenen Form nur für *eigentliche Dreiecke*, also für solche Dreiecke, bei denen in die Delambre'schen Formeln die oberen Vorzeichen einzutragen sind. Will man auch die uneigentlichen Dreiecke berücksichtigen, so hat man in der unteren Formelgruppe (10) $-R$ an Stelle von R zu setzen; diese Aenderung zieht dann eine entsprechende Aenderung der übrigen Formeln nach sich.

Das Auftreten von R entspricht dem Umstande, dass die betreffenden goniometrischen Functionen bei Ausführung der in § 3 (S. 134) definirten Substitution $\mathfrak{T}$ ihren Werth ändern. Die Ausführung von $\mathfrak{T}$ kommt offenbar einer Vorzeichenänderung von R gleich.

Bei einem Dreieck, dessen Seiten und Winkel zwischen 0 und π liegen, ist allen drei Quadratwurzeln R, $\sqrt{Y_0Y_1Y_2Y_3}$, $\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}$ der *positive* Werth beizulegen. —

Da die Ableitung der die Irrationalität R enthaltenden Formeln (7) . . . (13) nicht ganz auf der Hand liegt, und da die Bestimmung der zusammengehörigen Wurzelwerthe eine gewisse Vorsicht erfordert, so wird die folgende Darlegung vielleicht willkommen sein.

Wir gehen aus von irgend einer der Functionen, die in den Zählern der Delambre'schen Ausdrücke stehen. Es ist zufolge (2)

$$\sin\frac{a_2 \pm a_3}{2} = \sin\frac{a_2}{2}\cdot\cos\frac{a_3}{2} \pm \cos\frac{a_2}{2}\cdot\sin\frac{a_3}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2Z_0Z_2}{a_{22}}}\cdot\sqrt{\frac{2Z_1Z_2}{a_{33}}} \pm \sqrt{\frac{2Z_3Z_1}{a_{22}}}\cdot\sqrt{\frac{2Z_0Z_3}{a_{33}}}.$$

Hier muss das Product der ersten und dritten Wurzel $= \frac{2\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}}{a_{22}}$, und das der zweiten und vierten $= \frac{2\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}}{a_{33}}$ sein, wobei im Zähler in beiden Fällen derselbe Wurzelwerth zu wählen ist, wie in den

Formeln (3). Das Product aller vier Wurzeln ist also $= \frac{4 Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}{a_{22} a_{33}}$. Hieraus folgt, dass unser Ausdruck den Werth $2\sqrt{\frac{Z_0 Z_1}{a_{22} a_{33}}} \cdot (Z_2 \pm Z_3)$ hat und nicht etwa den Werth $2\sqrt{\frac{Z_0 Z_1}{a_{22} a_{33}}} \cdot (Z_2 \mp Z_3)$. Es ergibt sich daher

$$\frac{\sin \frac{a_2 \pm a_3}{2}}{\sin \frac{a_1}{2}} = \frac{a_{11}}{R} \cdot \frac{Z_2 \pm Z_3}{2},$$

worin R irgend einen der beiden Werthe von $\sqrt{\frac{a_{11}}{2} \cdot \frac{a_{22}}{2} \cdot \frac{a_{33}}{2}}$ bedeutet. Ebenso kommt man zu der zweiten Formel links in Nr. 10; dass der Werth von R in beiden Formeln derselbe ist, folgt aus dem Umstand, dass in den Delambre'schen Formeln die oberen Vorzeichen angenommen wurden. Durch Wiederholung dieser Schlussweise gelangt man zu den beiden Formeln rechts in Nr. 10, und zu der Einsicht, dass R in allen Fällen dieselbe Grösse bedeutet. Jetzt ergeben sich durch rationale Operationen die Formeln (11), (12). (Vgl. S. 129.) Da in der letzten die Auszeichnung des Index 1 verschwunden ist, so folgt, dass auch in den zu (10) I analogen, mit (10) II, (10) III zu bezeichnenden Formeln R der nämliche Wurzelwerth ist. Die Formeln für $\sin s_i$, $\cos s_i$, $\operatorname{tg} \frac{s_i}{2}$ ergeben sich nunmehr ebenfalls durch rationale Operationen; denn es ist z. B.

$$\frac{2 \sin s_0}{\sin a_1} = \frac{\cos \frac{a_2 + a_3}{2}}{\cos \frac{a_1}{2}} + \frac{\sin \frac{a_2 + a_3}{2}}{\sin \frac{a_1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} s_0 = \frac{l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2 - 1}{l_1 + l_2 + l_3 - l_1 l_2 l_3}.$$

Um schliesslich noch den Werth der Grösse M zu finden, setzen wir für den Augenblick

$$D_i = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \cdot \left\{ \sum \frac{1}{Z_\varkappa} - \frac{2}{Z_i} \right\}$$

$$\varDelta_i = Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 \cdot \left\{ \sum \frac{1}{Y_\varkappa} - \frac{2}{Y_i} \right\}.$$

Er wird dann, nach § 2 (Nr. 4, S. 130)

$$M = \frac{4 Y_i Z_i \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{(R^2 + D_i \varDelta_i) + (D_i + \varDelta_i) \cdot R} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Hier sind nun die beiden Summanden des Nenners durch $Y_i Z_i$ theilbar. Man findet zunächst ohne Mühe

$$D_i + \varDelta_i = 2 X_0 Y_i Z_i.$$

Um die Zerlegung des ersten Factors auszuführen, verbinde man hiermit die auf S. 144 angegebene Identität, wonach

$$D_i^2 = R^2 - 4 Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \,.\, Y_i^2, \quad \varDelta_i^2 = R^2 - 4 Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 \,.\, Z_i^2$$

ist. Es folgt

$$R^2 + D_0 \varDelta_0 = 2 Y_0 Z_0 \{X_0^2 Y_0 Z_0 + Y_0 Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Y_1 Y_2 Y_3\},$$
$$R^2 + D_1 \varDelta_1 = 2 Y_1 Z_1 \{X_0^2 Y_1 Z_1 + Z_0 Y_1 Z_2 Z_3 + Y_0 Z_1 Y_2 Y_3\},$$

u. s. f., also

$$M = \frac{2\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}\,\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{X_0^2 Y_0 Z_0 + Y_0 Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Y_1 Y_2 Y_3 + X_0 \,.\, R},$$
$$M = \frac{2\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}\,\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{X_0^2 Y_1 Z_1 + Z_0 Y_1 Z_2 Z_3 + Y_0 Z_1 Y_2 Y_3 + X_0 \,.\, R}.$$

Diese Ausdrücke führt man leicht in die erste der unter (13) angegebenen Formen über. Die zweite Gestalt von M ergibt sich durch eine ganz entsprechende Ueberlegung. Beide Ausdrücke verbunden führen wieder zur Formel (12), womit eine werthvolle Controle für die Richtigkeit unserer Rechnung gegeben ist. —

Natürlich kann man die aufgestellten Formeln noch auf manche andere Art controliren. Es scheint nützlich, wenigstens noch den Werth von $\operatorname{tg}^2 \frac{s_0}{2}$, der aus den Formeln (11) hervorgeht, mit dem Werthe derselben Grösse zu vergleichen, der sich aus den Formeln (9) ergibt.

Aus (11) folgt:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{s_0}{2} = \frac{a_{22} a_{33} - 2 a_{11} (X_0 + X_1)(X_2 + X_3) - 4 (X_0 + X_1 - X_2 - X_3) R}{a_{22} a_{33} - 2 a_{11} (X_0 + X_1)(X_2 + X_3) + 4 (X_0 + X_1 - X_2 - X_3) R}$$
$$= \frac{a_{22} a_{33} - a_{11} a_{12} - a_{11} a_{13} - 8 Y_1 R}{a_{22} a_{33} - a_{11} a_{12} - a_{11} a_{13} + 8 Y_1 R}.$$

Soll dieses Ergebniss mit den Formeln (9) im Einklang stehen, so muss sich aus Zähler und Nenner der Factor Y_1 abscheiden lassen. In der That ist

$$a_{22} a_{33} - 2 a_{11} (X_0 + X_1)(X_2 + X_3)$$
$$= 4 Y_0 Y_1 \{-Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\} + 8 Y_1^2 Y_2 Y_3;$$

es wird also

$$\operatorname{tg}^2 \frac{s_0}{2} = \frac{Y_0 \{-Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\} + 2 Y_1 Y_2 Y_3 - 2 R}{Y_0 \{-Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\} + 2 Y_1 Y_2 Y_3 + 2 R}.$$

Benutzt man jetzt, um statt der Grössen Y_i die Grössen Z_i einzuführen, die Umformung

$$\begin{aligned} & 2\,Y_0\{-Y_0^2+Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2\}+4\,Y_1Y_2Y_3 \\ = & \,(X_0+X_1)\{(X_0-X_1)^2-(X_2+X_3)^2\}-(X_2+X_3)\{(X_0+X_1)^2-(X_2-X_3)^2\} \\ & = 4\,(Z_2+Z_3)Z_0Z_1+4\,(Z_0-Z_1)Z_2Z_3 \\ & = 4\,\{-Z_1Z_2Z_3+Z_0Z_2Z_3+Z_0Z_3Z_1+Z_0Z_1Z_2\}, \end{aligned}$$

so findet sich

$$\operatorname{tg}^2\frac{s_0}{2}=\frac{R-\{-Z_1Z_2Z_3+Z_0Z_2Z_3+Z_0Z_3Z_1+Z_0Z_1Z_2\}}{R+\{-Z_1Z_2Z_3+Z_0Z_2Z_3+Z_0Z_3Z_1+Z_0Z_1Z_2\}}\,.$$

Dieses Ergebniss steht in der That im Einklang mit den Formeln (9). In ähnlicher Weise kann man auch die Producte zweier der Ausdrücke (9) bilden und sie mit den Formeln (11) vergleichen. In diesen Fällen sind im Zähler und Nenner Factoren zweiten Grades abzuscheiden; die auszuführenden Rechnungen sind daher ziemlich umständlich. —

Hervorgehoben zu werden verdienen noch gewisse Verbindungen der aufgeführten goniometrischen Functionen, aus denen die Irrationalitäten wieder herausfallen. Solche sind die Verhältnisse der Grössen $\sin s_i$ und die der Grössen $\sin \sigma_i$, die Verhältnisse der Grössen $\cos s_i$, $\cos \sigma_i$, und die Verhältnisse der Delambre'schen Ausdrücke (10); die Producte $\Pi\,.\operatorname{tg} s_i$, $P\,.\operatorname{tg}\sigma_i$, u. s. w. (Vgl. I, § 7, S. 114; II, § 4, Nr. 7, S. 139.) —

Auf Grund unserer Formeln lässt sich jede goniometrische Function der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks, die rational durch die Grössen $\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}$ ausgedrückt werden kann, auf eine einzige Weise in die Form setzen

$$\begin{aligned} & A+A_1.\sqrt{Y_0Y_1Y_2Y_3}+A_2.\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}+A_3\,.\,R \\ & \quad +B_1.\sqrt{Y_0Y_1Y_2Y_3}\,.\,R+B_2\,.\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}\,.\,R \\ & \quad +B_3.\sqrt{Y_0Y_1Y_2Y_3}\,.\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}+C.\sqrt{Y_0Y_1Y_2Y_3}\,.\sqrt{Z_0Z_1Z_2Z_3}\,.\,R, \end{aligned}$$

worin die Coefficienten A, B, C rationale homogene Functionen der Parameter X_i bedeuten. Jede identische Relation zwischen solchen Functionen verwandelt sich so in eine Reihe von Identitäten $A=0$, $B=0$, $C=0$.

Umgekehrt kann man durch Elimination der Grössen X_i aus unseren Formeln zu einer unbegrenzten Zahl neuer identischer

Relationen der sphärischen Trigonometrie gelangen. Als Beispiel für eine solche Elimination führen wir an die Formeln

$$\left.\begin{aligned} P &= \sin \sigma_i \left\{ \sum_0^3{}^{\varkappa} \cos s_\varkappa - 2\cos s_i \right\} \\ \Pi &= \sin s_i \left\{ \sum_0^3{}^{\varkappa} \cos \sigma_\varkappa - 2\cos \sigma_i \right\} \end{aligned}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

§ 7.

Umkehrung des in § 6 aufgestellten Satzes.

Nicht allein die Functionen $\cos a_\varkappa$, $\cos \alpha_\varkappa$ lassen sich rational ausdrücken durch die Substitutionscoefficienten $a_{i\varkappa}$, sondern es ist auch das Umgekehrte der Fall; denn die Grössen $a_{i\varkappa}$ hängen rational ab von den Parametern X_i, diese von den Producten $l_i l_\varkappa$ oder $\lambda_i \lambda_\varkappa$, und diese wieder von den Cosinus der Seiten und Winkel (§ 4 Nr. 4).

Bequemer kann man die Verhältnisse der Grössen $a_{i\varkappa}$ (auf die es allein ankommt) unmittelbar aus den Formeln (3) und (4) des § 6 berechnen. Die Formeln (3) liefern zunächst die Proportion

$$a_{11} : a_{22} : a_{33} = \sin a_2 . \sin a_3 : \sin a_3 . \sin a_1 : \sin a_1 . \sin a_2,$$

worin man, mit Hülfe des Cosinussatzes, statt der Grössen $\sin a_i$ auf rationale Weise die Grössen $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$ einführen kann. Hierauf ergeben sich aus den Formeln (4) die Verhältnisse der neun Grössen $a_{11} \ldots a_{33}$. Um dem Resultat eine in Bezug auf Seiten und Winkel symmetrische Gestalt zu ertheilen, führen wir die Bogen h_1, h_2, h_3 ein, die die Ecken des gegebenen Dreiecks mit den entsprechenden Ecken seines Polardreiecks verbinden (die Complemente der *Höhen* des Dreiecks). Ihre Cosinus sind gegeben durch die Formeln

$$(1) \qquad \cos h_i = \frac{P}{\sin a_i} = \frac{\Pi}{\sin \alpha_i}.$$

Jetzt können wir, als Umkehrung des in § 6 formulirten Theorems, den Satz aussprechen:

Die Grössen

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \cos h_1 & \cos h_3 . \cos a_3 & \cos h_2 . \cos \alpha_2 \\ \cos h_3 . \cos \alpha_3 & \cos h_2 & \cos h_1 . \cos a_1 \\ \cos h_2 . \cos a_2 & \cos h_1 . \cos \alpha_1 & \cos h_3 \end{array} \right.$$

sind proportional den Coefficienten einer orthogonalen Substitution.

Bei unserer homogenen Schreibweise haben die Substitutionscoefficienten $a_{\iota\varkappa}$ überhaupt nur die Bedeutung von Verhältnissgrössen; wir hätten daher statt »proportional« auch sagen können »gleich«. Um indessen durch die Bezeichnung sichtbar zu machen, dass die in den Formeln (2) auftretenden Substitutionscoefficienten nicht geradezu identisch sind mit den bisher gebrauchten Grössen $a_{\iota\varkappa}$, wollen wir die Ausdrücke (2) der Reihe nach gleich $\tau a_{11}, \tau a_{12}, \ldots \tau a_{33}$ setzen, indem wir mit τ einen allen gemeinsamen Proportionalitätsfactor bezeichnen.

Der erste, in den Formeln (2) nicht vorkommende Coefficient wird jetzt natürlich τa_{00} zu benennen sein. Für ihn liefern die Formeln (9), § 5 (S. 142) neun verschiedene Ausdrücke, deren Gleichheit man durch leichte Rechnungen bestätigt:

$$(3) \quad \tau a_{00} = \sin a_i \,.\, \sin \alpha_i - \cos a_i \,.\, \cos \alpha_i \,.\, \cos h_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(4) \quad \begin{cases} \tau a_{00} = \dfrac{\sin a_1 \sin \alpha_1 \,.\, \cos a_2 \cos a_3 - \cos h_1 \,.\, \cos \alpha_1}{\cos a_1} & \text{u. s. f.,} \\[2ex] \tau a_{00} = \dfrac{\sin a_1 \sin \alpha_1 \,.\, \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - \cos h_1 \,.\, \cos a_1}{\cos \alpha_1} & \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Man kann den Werth von τa_{00} auch leicht in eine in Bezug auf Seiten und Winkel symmetrische Gestalt überführen. Es ist nämlich nach der ersten Formel

$$\tau a_{00} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin a_1} \left\{ \sin^2 a_1 - \sin a_2 \sin a_3 \,.\, \cos a_1 \cos \alpha_1 \right\};$$

hierfür aber kann man wegen des Cosinussatzes auch schreiben

$$(5) \quad \begin{cases} \tau a_{00} = \dfrac{\Pi}{\mathrm{P}} \left(1 - \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3\right), \\[2ex] \tau a_{00} = \dfrac{\mathrm{P}}{\Pi} \left(1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3\right). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Division aufs Neue die Formel (7), § 1 (S. 126), andrerseits durch Multiplication

$$(6) \quad \tau a_{00} = \sqrt{(1 - \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3)(1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3)}.$$

Auf Grund dieser Sätze verwandeln sich alle Relationen zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution in Formeln der sphärischen Trigonometrie. So leiten wir aus den Formeln (8), § 5 (S. 142), von Neuem die Formeln (9), § 1, her, und ebenso führen uns die Formeln (7) zu den Relationen (5) des § 1 zurück.

§ 8.

Die desmischen Tetraeder.

Da bei der Darstellung der sphärischen Dreiecke durch die Parameter X_i nur deren Verhältnisse von Bedeutung sind, so liegt es nahe, diese Grössen als homogene Coordinaten eines Punktes im dreifach ausgedehnten Raume zu deuten. Wir gelangen so zu einer Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum, deren Studium uns nunmehr beschäftigen soll. —

Um eine bestimmte Vorstellung zu gewinnen, fassen wir $\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}, \frac{X_3}{X_0}$ als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten auf. Wir treffen damit eine Festsetzung, die um so näher liegt, als ja X_0 von vorn herein den numerischen Werth Eins hat, wenn wir von einem gegebenen Dreiecke ausgehen.

Die Gleichungen $Y_i = 0$ und $Z_i = 0$ stellen jetzt die Seitenflächen zweier regulärer Tetraeder vor, die einem Würfel eingeschrieben sind, dessen Ecken die Coordinaten ± 1 haben. (Vgl. Fig. 9. Man denke sich etwa die positive $\frac{X_1}{X_0}$-Axe nach rechts, die $\frac{X_2}{X_0}$-Axe nach vorn, die $\frac{X_3}{X_0}$-Axe nach oben gerichtet.)

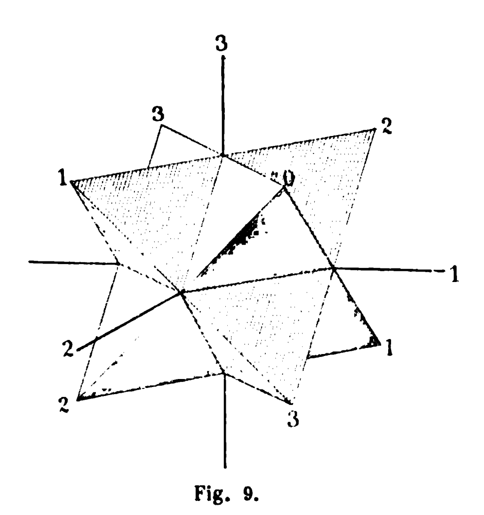


Fig. 9.

Diese Tetraeder, die wir kurz als das Y- und das Z-Tetraeder bezeichnen wollen, bilden zusammen mit dem Coordinatentetraeder, dem »X-Tetraeder«, eine merkwürdige Figur, die unter dem Namen

der *desmischen Tetraeder* bekannt ist. Wir stellen ihre wichtigsten Eigenschaften, soweit wir sie brauchen, kurz zusammen, indem wir wegen breiterer Ausführung auf die bereits ziemlich ausgedehnte Literatur des Gegenstandes verweisen[1]).

Wie die Gleichungen (5) des § 5 zeigen, gehören alle drei Tetraeder demselben Büschel von Flächen 4. O. an, sogenannten *desmischen* Flächen. Durch jede Gerade, in der sich zwei Seitenflächen zweier dieser Tetraeder treffen, geht auch eine Fläche des dritten Tetraeders, so dass die Schnittlinien der genannten Flächen im Ganzen nur 16 gerade Linien bilden. Von diesen verlaufen in unserem Falle 12 im Endlichen; sie bilden die Kanten des Octaeders, in dem sich das Y- und das Z-Tetraeder durchdringen; die übrigen vier gehören der unendlich fernen Ebene an. Wie man sieht, gehen diese sechzehn Geraden 12mal zu vieren durch einen Punkt: es sind das dieselben 12 Punkte, in denen sich gleichzeitig drei Kanten von je einem der desmischen Tetraeder treffen. Jedes der drei Tetraeder enthält alle 16 Geraden, die Basislinien des genannten Büschels.

Ebenso, wie die Flächen der drei Tetraeder zu dreien sich in denselben 16 Geraden schneiden, so liegen die Ecken zu dreien auf 16 Geraden — den Kanten und Diagonalen unseres Würfels. Die Figur dieser 16 Geraden hat die dualistischen Eigenschaften der zuerst genannten; sie vertheilen sich 12mal zu vieren auf eine Ebene, u. s. w.

Die 12 Kanten der drei Tetraeder lassen sich noch auf eine zweite Art zu drei desmischen Tetraedern verbinden, d. h. zu einer Figur zusammenfügen, die im Sinne der projectiven Geometrie ganz dieselben Eigenschaften hat, wie die zuerst betrachtete Figur dreier desmischer Tetraeder. Diese *zweite Reihe desmischer Tetraeder* ist, bei unserer Bezeichnungsweise, den drei Indices 1, 2, 3 zugeordnet;

---

1) Stephanos, Bulletin des Sciences Mathématiques, II. sér. t. 3 (1879) p. 424. Veronese, Mem. d. r. Acc. dei Lincei 1880 v. IV. Schröter, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 28, S. 178. Crelle's Journal f. Math. Bd. 93, S. 169. Reye, Acta Mathematica, Bd. I, S. 97. Hess, Math. Ann. Bd. 28, S. 167. Caspary, Math. Ann. Bd. 29, S. 581.

Der Leser wird übrigens am besten thun, sich die Einzelheiten der im Texte zum Theil nur angedeuteten, übrigens ganz einfachen Verhältnisse selbst klar zu machen.

die Ebenen des ersten z. B. werden erhalten, wenn man die in den Formeln (10) I, § 6, auf den rechten Seiten stehenden Ausdrücke gleich Null setzt: ihre Gleichungen sind

$$X_0 \pm X_1 = 0, \quad X_2 \pm X_3 = 0.$$

Jedes dieser Tetraeder hat, in unserem Falle, zwei unendlich ferne Ecken. Man kann sich von ihnen und von ihrer gegenseitigen Lage eine deutliche Vorstellung machen, wenn man sich der Gestalt eines Sägebocks erinnert. Bei dem Tetraeder z. B., dessen Gleichungen wir soeben angeschrieben haben, ist die $\frac{X_1}{X_0}$-Axe der Querbalken des Sägebocks; die beiden Kreuze an den Enden werden dargestellt durch die Kante $\overline{01}$ des Y-Tetraeders und die Kante $\overline{23}$ des Z-Tetraeders, und durch die Kante $\overline{23}$ des Y-Tetraeders und die Kante $\overline{01}$ des Z-Tetraeders. (Vgl. Fig. 9.) Solcher Sägeböcke kann man drei in unseren Würfel hineinstellen; und diese bilden, nach Hinzufügung der unendlich fernen Kanten, die Tetraeder der zweiten Reihe. Die Ecken dieser Tetraeder sind die oben erwähnten 12 Punkte. Die Beziehung zwischen den beiden Reihen desmischer Tetraeder ist, im Sinne der projectiven Geometrie, vollkommen wechselseitig.

Die Figur der desmischen Tetraeder ist vollständig bestimmt durch eines unter ihnen und *eine* Ecke (oder Fläche) eines zweiten. Nehmen wir z. B. an, es sei das Y-Tetraeder gegeben und die Ecke 0 des X-Tetraeders. Dann entsprechen die Ecken 1, 2, 3 des X-Tetraeders der Ecke 0 in den drei involutorischen collinearen Transformationen (von H. WIENER so genannten *Spiegelungen*), die durch die Paare gegenüberliegender Kanten des Y-Tetraeders bestimmt sind. Hierauf findet man die Ecken des Z-Tetraeders, indem man etwa das Y-Tetraeder z. B. der perspectiven involutorischen collinearen Transformation unterwirft, deren Mittelpunkt die Ecke 0 und deren Ebene die Ebene 0 des X-Tetraeders ist (in unserem Falle ist dies die Spiegelung am Anfangspunkt der Coordinaten).

Da man, um eine collineare Transformation des Raumes zu bestimmen, gerade fünf Punkten fünf andere zuordnen kann, so kann ohne Weiteres geschlossen werden, dass die Figur der drei desmischen Tetraeder durch eine *Gruppe von* 576 *collinearen Transformationen* in sich selbst übergeführt wird. Diese Gruppe ist für unsere

Untersuchung von Wichtigkeit. Wir bezeichnen sie, nach der Zahl ihrer Substitutionen, mit G_{576}. Von ihren zahlreichen Untergruppen heben wir, mit Rücksicht auf das Folgende, nur wenige hervor, die wir, soweit überhaupt eine besondere Benennung nöthig erscheint, ebenfalls nur nach der Zahl ihrer Substitutionen in der Bezeichnung unterscheiden wollen.

Eine Gruppe G_{192} ist, als Untergruppe von G_{576}, dadurch definirt, dass das X-Tetraeder als Ganzes in Ruhe bleibt.

Eine Gruppe G_{96} ist, als Untergruppe von G_{576} und G_{192}, dadurch bestimmt, dass sowohl das X-Tetraeder, als auch das Y- und das Z-Tetraeder jedes einzeln in sich übergeführt werden soll. Diese Gruppe ist eine *invariante* Untergruppe (S. 107, Anm.) der beiden vorigen. Bei ihr werden die drei Tetraeder der zweiten Reihe noch in allgemeinster Weise unter einander vertauscht. Hält man aber auch diese Tetraeder, jedes einzeln, fest, so entsteht eine

Gruppe G_{16}, die in allen vorhergehenden als invariante Untergruppe enthalten ist. Diese Gruppe ist also dadurch definirt, dass alle Tetraeder beider Reihen einzeln in Ruhe bleiben. Sie wird, wie man leicht erkennt, von *involutorischen Transformationen* gebildet, sogenannten geschaart-involutorischen Collineationen. Abgesehen von der identischen Transformation, die nur im uneigentlichen Sinne eine involutorische Transformation genannt werden kann, sind dies die neun involutorischen collinearen Transformationen, deren Axen von je einem Paar von Gegenkanten der desmischen Tetraeder (erster oder zweiter Reihe) gebildet werden (»Spiegelungen« an diesen Kantenpaaren), und sechs weitere, aus jenen zusammenzusetzende, mit conjugirt-imaginären Axen. — Von den Untergruppen dieser Gruppe G_{16} heben wir nur hervor:

a) die Gruppe der Spiegelungen an den Kantenpaaren des X-Tetraeders, also die von *vier* Transformationen gebildete Untergruppe von G_{16}, bei der sämmtliche Ecken des X-Tetraeders einzeln in Ruhe bleiben, b) und c) die in ähnlicher Weise aus dem Y- und dem Z-Tetraeder abzuleitenden Gruppen. —

Die *analytische Darstellung* aller der aufgezählten Gruppen ist sehr einfach. Für die Gruppen G_{576}, G_{96} und G_{16} ist sie dieselbe, mögen wir nun das X- oder das Y- oder das Z-Tetraeder zu Grunde legen; für die Gruppen G_{576} und G_{16} behält sie überdies auch beim

Uebergang zu den Tetraedern zweiter Art ihre Form bei. Wählen wir das X-Tetraeder, so erhalten wir die Transformationen von G_{16}, wenn wir für X_0', X_1', X_2', X_3' der Reihe nach die Werthsysteme

$$\begin{array}{l} \pm X_0, \pm X_1, \pm X_2, \pm X_3; \\ \pm X_1, \pm X_0, \pm X_3, \pm X_2; \\ \pm X_2, \pm X_3, \pm X_0, \pm X_1; \\ \pm X_3, \pm X_2, \pm X_1, \pm X_0 \end{array}$$

setzen, mit der Bestimmung, dass die Zahl der negativen Vorzeichen in jedem Falle gerade sein soll. Die Gruppe G_{96} geht daraus hervor, wenn wir nicht nur die angeschriebenen vier, sondern alle vierundzwanzig Vertauschungen des Indices 0, 1, 2, 3 zulassen; die Gruppe G_{192} entsteht, wenn wir noch den Vorzeichenwechsel einer einzelnen der Grössen X_i hinzufügen; zu der Gruppe G_{576} endlich gelangen wir, wenn wir alle diese Transformationen verbinden mit einer Transformation, die aus den Formeln (3), § 5 (S. 141) durch Substitution von X_i' an Stelle von Y_i (oder Z_i) entsteht.

Unterwirft man einen beliebigen Punkt des Raumes den Transformationen einer der besprochenen Gruppen, so nimmt er in den einzelnen Fällen 576, 192, 96, 16 verschiedene Lagen an, wenn er nicht von vorn herein eine besondere Lage hat. Von den so entstehenden Configurationen ist bis jetzt wohl erst die letzte und einfachste genauer untersucht worden, die nach ihrem Entdecker so genannte *Kummer'sche Configuration.* — Wir haben keine Veranlassung, im gegenwärtigen Zusammenhange auf die merkwürdigen Eigenschaften dieser Figur näher einzugehen, die ohnehin ja auch als ziemlich bekannt gelten können; doch musste, um des Folgenden willen, ihr Auftreten hier Erwähnung finden. —

Greift man aus den Gegenkantenpaaren der desmischen Tetraeder irgend zwei heraus, die sich nicht schneiden, was auf 18 Arten geschehen kann, so liegen diese immer auf einer Fläche 2. Ordnung. Jede so bestimmte Fläche kann, ihren beiden Schaaren von geraden Linien entsprechend, zweimal auf diese Art erzeugt werden; es entstehen daher nur neun verschiedene Flächen. Analytisch werden diese bemerkenswerther Weise dadurch dargestellt, dass man die neun Substitutionscoefficienten $a_{11} \dots a_{33}$, als Functionen der X_i betrachtet, gleich Null setzt. Fügt man noch die zwar mit einem reellen Polarsystem, aber nicht mit reellen Punkten begabte Fläche $a_{00} = 0$ hinzu,

die unsere sämmtlichen sechs Tetraeder zu Poltetraedern hat, so hat man damit die aus der Liniengeometrie bekannten 10 *Fundamentalflächen*. Wir gehen auf die Eigenschaften auch dieser Figur (die übrigens aus den aufgestellten Formeln sehr leicht abgelesen werden können) nicht näher ein, und bemerken nur noch, dass innerhalb des ganzen Systems die Fläche $a_{00} = 0$ nur durch ihre Realitätseigenschaft ausgezeichnet ist, dass also von einem gewissen Standpunkte aus alle zehn Flächen als gleichberechtigt erscheinen[1]).

§ 9.

Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum.

Betrachten wir nunmehr die zu Anfang des § 8 erwähnte Abbildung der sphärischen Dreiecke auf die Punkte $X_0 : X_1 : X_2 : X_3$ des dreifach ausgedehnten Raumes genauer, so bemerken wir, dass zwar jedem reellen sphärischen Dreieck ein reeller Raumpunkt, keineswegs aber umgekehrt einem reellen Punkt immer ein sphärisches Dreieck mit reellen Seiten und Winkeln entspricht. Wir wollen versuchen, von den Realitätsverhältnissen unserer Abbildung eine Anschauung zu gewinnen. Offenbar sind vier Fälle zu unterscheiden, die wir aufzählen und einzeln behandeln müssen.

$$\text{I.}\quad Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 > 0\,,\quad Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 > 0\,.$$

(*Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln*).

Ist ein System der Grössen X_i gegeben, das den Bedingungen I genügt, so kann man daraus immer ein anderes von derselben Eigenschaft ableiten, bei dem sämmtliche Grössen Y_i und sämmtliche Grössen Z_i einzeln positiv sind. Wenn nämlich unter den Grössen Y_i negative vorkommen, so ertheile man diesen das entgegengesetzte Vorzeichen. Hierdurch wird das Bestehen der beiden Ungleichungen

1) Den Leser, der sich über die hier nur flüchtig berührten Gegenstände genauer zu unterrichten wünscht, verweisen wir auf die in den Math. Annalen erschienen Originalarbeiten der Herren F. Klein und Rohn, wozu noch die erwähnte Literatur über desmische Tetraeder kommt. Vgl. ausserdem Reichardt, Acta Leopoldina, Bd. 50 (1887), S. 377 u. ff., sowie eine Arbeit des Verfassers, Sitzber. der K. Sächs. Ges. d. W. 1892, S. 122 u. ff.

I nicht gestört, wie man aus den Formeln (2) des § 5 (S. 140) leicht entnehmen kann. (Vgl. auch § 11, S. 167, Nr. 1, 2.)

Jetzt aber sind die Grössen Z_i ebenfalls sämmtlich positiv geworden. Denn es könnte, nach den letzten Ungleichungen, höchstens eine von ihnen negativ sein (nämlich, wenn etwa $Y_0 \geqq Y_1$, $Y_0 \geqq Y_2$, $Y_0 \geqq Y_3$ angenommen wird, die Grösse Z_0), was wegen der zweiten Ungleichung I unmöglich ist.

Die Punkte des Raumes nun, deren Coordinaten den Bedingungen $Y_i > 0$, $Z_i > 0$ genügen, erfüllen das Innere des regulären Octaeders, dessen Begrenzungsflächen die Ebenen $Y_i = 0$, $Z_i = 0$ sind. Sie bilden eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Aus dieser entstehen sodann drei andere, die im Sinne der projectiven Geometrie ebenfalls als Octaeder zu bezeichnen sind, wenn wir die angegebenen Vorzeichenwechsel von Neuem vornehmen. So erkennen wir:

Die Punkte des Raumes, die bei unserer Abbildung den Dreiecken mit reellen Seiten und Winkeln entsprechen, erfüllen vier getrennte Gebiete, die nur in zwölf Punkten, nämlich in den Ecken der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe, zusammenhängen. Jedes dieser Gebiete besteht aus den Punkten im Inneren eines Octaeders, dessen acht Begrenzungsebenen Flächenstücke des Y- und des Z-Tetraeders sind.

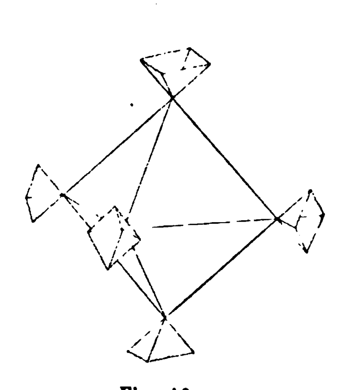


Fig. 10.

Bei unserer besonderen Annahme über die Lage der desmischen Tetraeder ist eines der genannten Octaeder regulär. Die drei anderen sind Doppelpyramiden, deren viereckige Basis der unendlich fernen Ebene angehört, und deren Scheitel je zwei gegenüberliegende Ecken des regulären Octaeders sind.

In den genannten zwölf Uebergangspunkten setzen sich die Flächen der dort zusammenstossenden Octaeder wie die beiden Mäntel eines Kegels in einander fort.

Fig. 10 verdeutlicht die gegenseitige Lage der vier Octaeder. Die an das reguläre Octaeder angesetzten Pyramidenstumpfe sind ins Unendliche erweitert zu denken; je zwei gegenüberliegende bilden zusammen eines der drei anderen Octaeder.

Bezeichnen wir die vier Octaeder mit [0], [1], [2], [3], so erkennen wir leicht, dass den Punkten im Inneren des Octaeders [$\varkappa$]

Dreiecksgestalten zugehören, denen nach der in § 2 des ersten Abschnittes eingeführten Bezeichnung der Index $\varkappa$ zukommt. Welche der vier zu einem gegebenen Index gehörigen Dreiecksgestalten man vor sich hat, darüber entscheidet das Vorzeichen der Quadratwurzeln $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$ und $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ nach folgendem Gesetz:

Das Dreieck hat die Gestalt

$$
\begin{array}{lll}
(A_\varkappa \mathsf{A}_\varkappa), \text{ wenn } \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0, & \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} > 0, \\
(A_\varkappa \mathsf{A}_\varkappa'), \text{ wenn } \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0, & \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} < 0, \\
(A_\varkappa' \mathsf{A}_\varkappa), \text{ wenn } \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} < 0, & \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} > 0, \\
(A_\varkappa' \mathsf{A}_\varkappa'), \text{ wenn } \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} < 0, & \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} < 0.
\end{array}
$$

In der That, im Falle [0] ist $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$, also, nach Reduction der Seiten auf das Intervall zwischen 0 und 2π, $0 < a_i < \pi$ oder $\pi < a_i < 2\pi$, je nachdem $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0$ oder < 0 ist.

Im Falle [1] dagegen hat man $Z_0, Z_1 \gtreqless 0$, $Z_2, Z_3 \lesseqgtr 0$, also $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$; es wird daher

$$0 < a_1 < \pi < a_2,\ a_3 < 2\pi \text{ oder } 0 < a_2,\ a_3 < \pi < a_1 < 2\pi,$$

je nachdem $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0$ oder < 0 ist. Ebenso ergibt sich die entsprechende Behauptung für die Winkel.

II. $Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 < 0$, $Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 > 0$.

(*Dreiecke mit reellen Seiten und rein imaginären Winkeln*[1]).

Eine leichte Discussion zeigt, dass durch die Ungleichungen II *sechzehn* getrennte Raumgebiete definirt sind, deren jedes die Gestalt eines *Tetraeders* hat. Jedes von ihnen legt sich mit einer seiner Seitenflächen an eines der unter I beschriebenen Octaeder an. Insgesammt überdecken sie auf diese Weise gerade die Hälfte der 32 Octaederflächen. Die 16 Tetraeder ordnen sich zu vieren in vier Gruppen, in deren jeder je zwei Tetraeder längs einer Kante (einem Kantenstück des Z-Tetraeders) zusammenhängen. Die einzelnen Gruppen entsprechen den Indices 0, 1, 2, 3. Innerhalb der ersten Gruppe

1) Wir sagen der Kürze halber, eine Winkelgrösse sei rein imaginär, wenn sie sich von einer im gewöhnlichen Sinne des Wortes rein imaginären Grösse nur um Vielfache von 2π unterscheidet.

z. B. besteht ein Tetraeder aus dem Stück des Z-Tetraeders, das von der Ebene $Y_0 = 0$ abgeschnitten wird:

$$Z_0 > 0\,,\ Z_i > 0\,,\ Y_0 < 0\,,\ Y_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die drei anderen legen sich an die drei freien Kanten; sie haben, bei unserer besonderen Annahme über die Lage der desmischen Tetraeder, je zwei Ecken im Unendlichen. (Vgl. die Fig. 11, in der jedoch das Y-Tetraeder mit dem Z-Tetraeder vertauscht ist.) — Nun haben wir in § 2 des ersten Abschnittes 32 *Typen nicht construirbarer sphärischer Dreiecke mit reellen Seiten* kennen gelernt, die sich in bestimmter Weise zu *Paaren* $B_{i\varkappa}$, $B'_{i\varkappa}$ zusammenordnen lassen. *Jetzt zeigt sich, dass diese sechzehn Paare unseren sechzehn Raumgebieten entsprechen, und dass die beiden Typen desselben Paares durch das Vorzeichen der Quadratwurzel* $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_3 Z_3}$ *getrennt werden.*

Man erhält nämlich allgemein einen Typus $B_{i\varkappa}$, wenn man das positive Vorzeichen wählt, und den entsprechenden Typus $B'_{i\varkappa}$, wenn man zum negativen Vorzeichen übergeht.

Beschränken wir uns der Kürze halber auf die Annahme $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0$, so ergibt sich die Zuordnung zwischen den 16 Tetraedern und den 16 Dreieckstypen $B_{i\varkappa}$ wie folgt.

Es sei zuerst

$$\begin{cases} Z_0 > 0\,,\ Z_1 > 0\,,\ Z_2 > 0\,,\ Z_3 > 0\,, \\ Y_0 < 0\,,\ Y_1 > 0\,,\ Y_2 > 0\,,\ Y_3 > 0\,, \end{cases}$$

so ist $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$; es wird also, wegen des angenommenen positiven Vorzeichens der Quadratwurzel, $0 < a_i < \pi$ $(i = 1, 2, 3)$; hält man nun die Formeln (7) des § 6 mit den Definitions-Ungleichungen der Typen $B_{i\varkappa}$ (S. 96) zusammen, so sieht man, dass den Punkten im Inneren des gewählten Tetraeders Dreiecke vom *Typus* B_{00} entsprechen. Ebenso ergibt sich bei der Annahme

$$\begin{cases} Z_0 > 0\,,\ Z_1 > 0\,,\ Z_2 > 0\,,\ Z_3 > 0\,, \\ Y_0 > 0\,,\ Y_1 < 0\,,\ Y_2 > 0\,,\ Y_3 > 0 \end{cases}$$

der *Typus* B_{01}, u. s. f.

Sei ferner

$$\begin{cases} Z_0 > 0\,,\ Z_1 > 0\,,\ Z_2 < 0\,,\ Z_3 < 0\,, \\ Y_0 < 0\,,\ Y_1 > 0\,,\ Y_2 > 0\,,\ Y_3 > 0\,, \end{cases}$$

so wird $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$, und daher $0 < a_1 < \pi < a_2$,

$a_3 < 2\pi$. Es entstehen Dreiecke vom *Typus* B_{11}. Ebenso führt die Annahme

$$\begin{cases} Z_0 > 0\,,\ Z_1 > 0\,,\ Z_2 < 0\,,\ Z_3 < 0\,, \\ Y_0 > 0\,,\ Y_1 < 0\,,\ Y_2 > 0\,,\ Y_3 > 0 \end{cases}$$

auf den *Typus* B_{10}, und die Annahme

$$\begin{cases} Z_0 > 0\,,\ Z_1 > 0\,,\ Z_2 < 0\,,\ Z_3 < 0\,, \\ Y_0 > 0\,,\ Y_1 > 0\,,\ Y_2 \lesseqgtr 0\,,\ Y_3 \gtreqless 0\,, \end{cases}$$

je nach der Geltung der oberen oder unteren Zeichen, auf den *Typus* B_{13} oder den *Typus* B_{12}.

Aus den aufgezählten Fällen leitet man leicht alle übrigen ab. Z. B. dem Quadrupel von Tetraedern, das dem Index 0 zugeordnet ist (S. oben S. 160), entsprechen die Dreieckstypen B_{00}, B_{11}, B_{22}, B_{33}.

III. $Y_0Y_1Y_2Y_3 > 0\,,\quad Z_0Z_1Z_2Z_3 < 0\,.$

(*Dreiecke mit reellen Winkeln und rein imaginären Seiten*).

Dieser Fall bietet, für sich allein betrachtet, dem vorigen gegenüber nichts Neues dar. Auf ihn bezieht sich die Figur 11, die durch stark ausgezogene Linien die beiden Tetraeder

$$\begin{cases} Y_0 > 0,\ Y_1 > 0,\ Y_2 \gtreqless 0,\ Y_3 \gtreqless 0, \\ Z_0 < 0,\ Z_1 > 0,\ Z_2 > 0,\ Z_3 > 0 \end{cases}$$

zur Anschauung bringt.

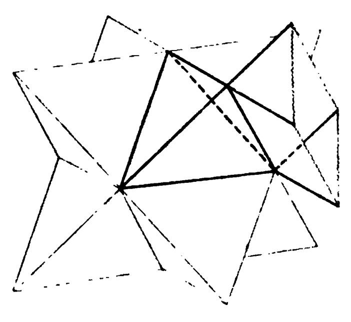


Fig. 11.

Die sechzehn durch die Ungleichungen III definirten Tetraeder hängen mit den unter II betrachteten nur in Linien und Punkten zusammen. Beide zusammen überdecken die Flächen der vier Octaeder I vollständig.

IV. $Y_0Y_1Y_2Y_3 < 0\,,\quad Z_0Z_1Z_2Z_3 < 0\,.$

(*Dreiecke mit rein imaginären Seiten und Winkeln*).

Die Ungleichungen IV definiren ebenfalls sechzehn Raumgebiete, ***Doppelpyramiden mit dreieckiger Basis.*** Die Basislinien bestehen in jedem Falle aus Kanten von drei verschiedenen der unter I beschriebenen Octaeder; durch je drei in einem Punkte zusammenstossende Kantenstücke des Y- und Z-Tetraeders werden sie zu den

Doppelpyramiden ergänzt. Die Fig. 12 veranschaulicht zwei dieser Doppelpyramiden, die durch die Ungleichungen

$$\begin{cases} Y_0 > 0\,, \; Y_1 < 0\,, \; Y_2 > 0\,, \; Y_3 > 0\,, \\ Z_0 < 0\,, \; Z_1 > 0\,, \; Z_2 > 0\,, \; Z_3 > 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} Y_0 \gtreqless 0\,, \; Y_1 \lesseqgtr 0\,, \; Y_2 \gtreqless 0\,, \; Y_3 \gtreqless 0\,, \\ Z_0 \lesseqgtr 0\,, \; Z_1 \gtreqless 0\,, \; Z_2 \lesseqgtr 0\,, \; Z_3 \lesseqgtr 0 \end{cases}$$

definirt sind. Bei der ersten liegt eine Ecke der Basis, bei der zweiten das ganze Basisdreieck im Unendlichen.

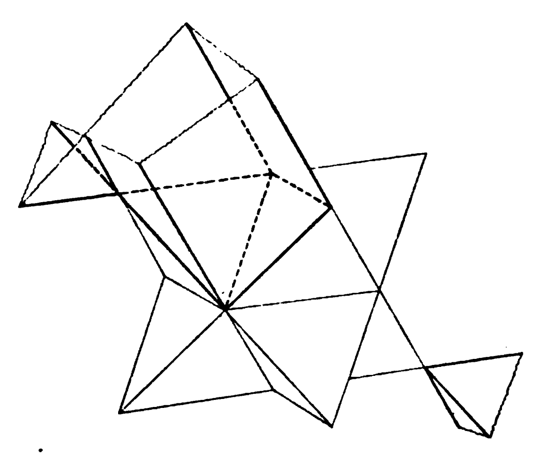


Fig. 12.

Die Dreiecke mit reellen Cosinus, aber rein imaginären Sinus der Seiten und Winkel, zu denen wir hier gelangt sind, sind bis jetzt kaum jemals betrachtet worden. Es war bisher wohl noch kein Problem der construirenden Geometrie auf der Kugelfläche bekannt, das zu ihrer Einführung genöthigt hätte. — Später (in § 13) werden wir eine Construction der *ebenen* Geometrie kennen lernen, die gerade zu diesen Dreiecken in einer einfachen Beziehung steht, und sie gewissermassen zu realisiren erlaubt.

§ 10.

Fortsetzung: Die Abbildung der Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln.

Wir wollen jetzt die Ueberlegungen des vorigen Paragraphen, soweit sie sich auf sphärische Dreiecke mit *reellen* Seiten und Winkeln beziehen, noch etwas weiter ausdehnen, um so eine deutliche Vor-

stellung vom Zusammenhang der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu gewinnen, die von diesen Dreiecken gebildet wird. — Zunächst mögen wir eine Thatsache hervorheben, die bereits durch die in § 9 angestellte Betrachtung begründet ist:

Den in § 3 des ersten Abschnittes beschriebenen Grenzdreiecken entsprechen die Grenzflächen der vier Octaeder; und zwar entsprechen den Dreiecken, deren Ecken in einem grössten Kreise liegen, Punkte auf den Flächen des Y-Tetraeders, und den Dreiecken, deren Seiten dasselbe Paar von Gegenpunkten der Kugel enthalten, Punkte auf den Flächen des Z-Tetraeders.

Betrachten wir jetzt einen Punkt im Inneren eines der vier Octaeder und die entsprechenden vier Werthepaare der Quadratwurzeln $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$ und $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$. Dann können wir uns, um die Zuordnung zwischen diesen Werthsystemen und den verschiedenen Arten sphärischer Dreiecke anschaulich zu machen, einer Vorstellungsweise bedienen, ganz ähnlich der, die von Riemann in die Functionenlehre eingeführt worden ist: Wir denken uns das einzelne Raumgebiet mit vier »*Blättern*« oder »*Zweigen*« überdeckt, indem wir jeden Punkt viermal zählen, und die einzelnen Blätter den vier Vorzeichenverbindungen obiger Wurzeln zuordnen. Aus den vier Octaedern entstehen so sechzehn verschiedene Raumgebiete; und diese entsprechen, nach der Untersuchung des § 9 (S. 159), den sechzehn in § 2 des ersten Abschnittes unterschiedenen Dreiecksgestalten. Wir können daher die einzelnen Blätter ebenfalls durch die Bezeichnungen

$$(A_\varkappa \mathrm{A}_\varkappa),\ (A_\varkappa \mathrm{A}_\varkappa'),\ (A_\varkappa' \mathrm{A}_\varkappa),\ (A_\varkappa' \mathrm{A}_\varkappa')$$

trennen. Nun erkennen wir: *Die Grenzflächen der vier Octaeder haben für unsere vierfache Raumüberdeckung die Bedeutung von Uebergangs- oder Verzweigungsflächen. In den dem Y-Tetraeder angehörigen Flächenstücken hängen nämlich zusammen die Blätter* $(A_\varkappa \mathrm{A}_\varkappa)$ *und* $(A_\varkappa \mathrm{A}_\varkappa')$, $(A_\varkappa' \mathrm{A}_\varkappa)$ *und* $(A_\varkappa' \mathrm{A}_\varkappa')$, *und in den Flächenstücken des Z-Tetraeders hängen zusammen die Blätter* $(A_\varkappa \mathrm{A}_\varkappa)$ *und* $(A_\varkappa' \mathrm{A}_\varkappa)$, $(A_\varkappa \mathrm{A}_\varkappa')$ *und* $(A_\varkappa' \mathrm{A}_\varkappa')$. Der Index $\varkappa$ entspricht hier der Bezeichnung $[\varkappa]$ des einzelnen Octaeders (S. 159 oben).

Dieser Satz ist im Grunde nur eine neue Auffassung einer Thatsache, die wir bereits in § 3 des ersten Abschnittes festgestellt hatten. Ferner sehen wir: *Längs der Octaederkanten hängen alle vier Blätter*

zusammen. — Einem Raumpunkt, der einer dieser Octaederkanten angehört, entspricht ein Dreieck, dessen Seiten und Winkel ganzzahlige Vielfache von π sind. Solche Dreiecke enthalten keinen continuirlich-veränderlichen Parameter mehr, während der Punkt auf der Octaederkante thatsächlich noch von einem solchen Parameter abhängig ist. *Die Punkte der Octaederkanten sind also singuläre Punkte unserer Abbildung, in dem Sinne, dass jedem zugehörigen Dreieck* ∞^1 *Raumpunkte, und also auch* ∞^1 *orthogonale Substitutionen entsprechen.* Man kann diese Bemerkung natürlich leicht bestätigen mit Hülfe der Formeln der §§ 4—6.

Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen die zwölf Punkte, in denen die vier Octaeder zusammenhängen.

Die Ecken der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe sind singuläre Punkte der Abbildung in dem Sinne, dass jedem von ihnen (oder auch der zugehörigen orthogonalen Substitution) ∞^2 *verschiedene Dreiecke entsprechen. Diese Dreiecke sind identisch mit den in* § 3 *des ersten Abschnittes besprochenen Uebergangsdreiecken.*

Die folgende Tafel, in der wir der Kürze halber nur vier Fälle aufgezählt haben, zeigt, wie die 12 Punkte den in I, § 3 (S. 99) angegeben Dreiecksarten zugeordnet sind:

X_0	X_1	X_2	X_3	a_1	α_1
1	1	0	0	0	π
1	—1	0	0	π	0
0	0	1	1	π	π
0	0	1	—1	0	0

(mod. 2π).

Der letzte Satz findet eine wesentliche Ergänzung in der folgenden Bemerkung, die man durch eine kurze Rechnung bestätigt:

Jeder Fortschreitungsrichtung durch einen der genannten zwölf Punkte, die innerhalb eines der angrenzenden Octaederräume verläuft, entspricht eines der ∞^2 *Uebergangsdreiecke, die zu dem Punkte gehören.*

Einer der zwölf Uebergangspunkte entspricht also erst zusammen mit einer bestimmten Annäherungsrichtung einem »Punkt« oder einer »Stelle« unserer Dreiecksmannigfaltigkeit; der Uebergangspunkt vertritt für die Blätter der Raumüberdeckung, die in den beiden dort aneinandergehefteten Octaedern [i] und [k] verlaufen, gewissermaassen

die Rolle einer *Trennungsfläche.* Tritt man in bestimmter Richtung in den genannten Punkt ein, und auf der anderen Seite in derselben Richtung aus, so setzt sich jedes der Blätter des Octaeders $[i]$ in ein ganz bestimmtes Blatt des Octaeders $[k]$ fort, entsprechend dem, was wir in § 3 des ersten Abschnittes gesehen haben (S. 100); und zwar ist die Art und Weise der Fortsetzung für je zwei gegenüberliegende Octaederecken dieselbe. Ausgenommen jedoch sind die Fortschreitungsrichtungen, die in die Flächen und Kanten des Y- und des Z-Tetraeders fallen; diese Mannigfaltigkeiten bilden den »Durchschnitt« der Mannigfaltigkeit der Grenzdreiecke mit der Mannigfaltigkeit der Uebergangsdreiecke; sie vertreten die Stelle von *Grenzcurven* und *Grenzpunkten.* In ihnen hängen zweimal zwei, beziehungsweise alle vier Blätter der Raumüberdeckung zusammen. —

Bei dieser ganzen Betrachtung gelten Dreiecke als äquivalent, deren Seiten und Winkel sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden. Die Trennung der eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke spielt daher hier noch keine Rolle. Beschränken wir uns jetzt auf die Betrachtung *eigentlicher* Dreiecke, so können wir versuchen, die Irrationalität $R = \sqrt{\frac{a_{11}}{2} \cdot \frac{a_{22}}{2} \cdot \frac{a_{33}}{2}}$ in einer ähnlichen Weise geometrisch darzustellen, wie wir eben die Irrationalitäten $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$ und $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ dargestellt haben. Dies hat keinerlei Schwierigkeit. Man verfährt am einfachsten so, dass man jedes der vier Blätter unserer mehrfach überdeckten Raumgebiete selbst wieder doppelt nimmt, so dass der Raum im Inneren der vier Octaeder nunmehr im Ganzen *achtmal* überdeckt wird. Das eine Blatt ordne man den positiven, das andere den negativen Werthen von R zu. Man sieht dann sofort: *Verzweigungsstellen der Irrationalität R, also Stellen, an denen je zwei zusammengehörige Blätter in einander übergehen, sind die zwölf Ecken der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe* — also, nach Obigem, zwölf von einander völlig getrennte *zweifach* ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. (Vgl. I, § 6, S. 109 u. ff.)

Man kann endlich noch einen Schritt weitergehen, und bei stetiger Aenderung der Lage unseres Raumpunktes stetige Aenderung des zugehörigen Dreiecks verlangen. Wie das Dreieck sich ändert, wenn der Raumpunkt sich auf einer vorgeschriebenen Curve (innerhalb der vier Octaedergebiete) bewegt, und schliesslich in seine

anfängliche Lage zurückkehrt, kann man dann durch ein Verfahren erkennen, das der Methode nachgebildet ist, die beim Studium der Integrale auf einer RIEMANN'schen Fläche angewendet wird. Es besteht in der sogenannten *Zerschneidung* unserer mehrfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit und in ihrer Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Die Dreiecke, die zusammengehörigen Randpunkten der zerschnittenen Mannigfaltigkeit entsprechen, gehen dann durch Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{K}$ in einander über. Wir begnügen uns mit dieser Andeutung, da der Gegenstand keine principiellen Schwierigkeiten bietet, die Ausführung im Einzelnen aber ziemlich umständlich ausfällt. —

Die mitgetheilten Betrachtungen werden eine hinreichend deutliche Vorstellung davon geben, wie die Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln vermöge der Parameter X, Y, Z auf die Punkte eines dreifach ausgedehnten Raumes bezogen werden. Wir mögen nur noch eine Bemerkung ausdrücklich hervorheben, die sich auf die singulären Punkte der Abbildung bezieht: *Die Punkte der sechzehn Octaederkanten sind die einzigen singulären Stellen bei unserer Abbildung der Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln.* Man bestätigt dies sofort durch Betrachtung der Formeln des § 6. Der einem gegebenen Dreieck zugeordnete Raumpunkt kann, ebenso wie die zugehörige orthogonale Substitution, nur dann unbestimmt werden, wenn sowohl die Verhältnisse der Grössen sin s_i, als auch die Verhältnisse der Grössen sin σ_i unbestimmte Werthe haben. Hieraus folgt $a_\varkappa$, $\alpha_\varkappa \equiv 0$ mod. π; man gelangt daher zu den Punkten der Octaederkanten. Umgekehrt kann einem gegebenen Raumpunkt oder einer gegebenen orthogonalen Substitution nur dann ein unbestimmtes Dreieck entsprechen, wenn eine der Grössen a_{11}, a_{22}, a_{33} den Werth Null hat. Dies tritt aber nur ein für die Schnittpnnkte jener Kanten, nämlich für die Eckpunkte der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe. — Umständlicher gestaltet sich die Untersuchung der singulären Elemente unserer Abbildung, wenn man auch die ausserhalb der vier Octaeder liegenden reellen Raumpunkte, und weiterhin Raumpunkte mit complexen Coordinaten in Betracht zieht. Dieser Gegenstand wird besonders dadurch verwickelt, dass die Seiten und Winkel imaginärer sphärischer Dreiecke unter Umständen keine bestimmte Länge haben.

§ 11.

Die Gruppen G_{16}, G_{96}, G_{192}, G_{576}.

Welch inniger Zusammenhang zwischen der sphärischen Trigonometrie und den desmischen Tetraedern und Kummer'schen Configurationen besteht, wird noch deutlicher werden, wenn wir uns nunmehr die Frage vorlegen, wie sich die Parameter X_i bei den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ und der aus ihr durch Erweiterung entsprungenen Gruppen verhalten, die wir im ersten Abschnitt (§ 7) durch elementar-geometrische Betrachtungen gewonnen haben.

Die Verhältnisse der Parameter X_i ändern sich nicht bei den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{K}$, und ebensowenig bei denen der Gruppe $\mathfrak{H}_4$. (Vgl. I, §§ 4...7.) Bei den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$ aber werden sie durch eine mit $\mathfrak{G}_{16}$ holoedrisch-isomorphe Gruppe von *linearen* Transformationen unter einander vertauscht. Wir geben der grösseren Bequemlichkeit halber nicht allein die Aenderungen der Verhältnissgrössen X_i an, die den erzeugenden Substitutionen $S_\varkappa$, $\Sigma_\varkappa$ von $\mathfrak{G}_{16}$ entsprechen, sondern auch noch die daraus herzuleitenden Transformationen der Verhältnissgrössen Y_i und Z_i.

(1)

	X_0'	X_1'	X_2'	X_3'	Y_0'	Y_1'	Y_2'	Y_3'	Z_0'	Z_1'	Z_2'	Z_3'
S_0	X_0	X_1	X_2	X_3	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	X_1	X_0	X_3	X_2	Y_0	Y_1	$-Y_2$	$-Y_3$	$-Z_1$	$-Z_0$	Z_3	Z_2
S_2	X_2	X_3	X_0	X_1	Y_0	$-Y_1$	Y_2	$-Y_3$	$-Z_2$	Z_3	$-Z_0$	Z_1
S_3	X_3	X_2	X_1	X_0	Y_0	$-Y_1$	$-Y_2$	Y_3	$-Z_3$	Z_2	Z_1	$-Z_0$

(2)

	X_0'	X_1'	X_2'	X_3'	Y_0'	Y_1'	Y_2'	Y_3'	Z_0'	Z_1'	Z_2'	Z_3'
Σ_0	X_0	X_1	X_2	X_3	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3
Σ_1	$-X_1$	$-X_0$	X_3	X_2	$-Y_1$	$-Y_0$	Y_3	Y_2	Z_0	Z_1	$-Z_2$	$-Z_3$
Σ_2	$-X_2$	X_3	$-X_0$	X_1	$-Y_2$	Y_3	$-Y_0$	Y_1	Z_0	$-Z_1$	Z_2	$-Z_3$
Σ_3	$-X_3$	X_2	X_1	$-X_0$	$-Y_3$	Y_2	Y_1	$-Y_0$	Z_0	$-Z_1$	$-Z_2$	Z_3

Man erkennt unmittelbar die Identität der von den collinearen Transformationen (1) und (2) erzeugten Gruppe mit der in § 8 (S. 155, 156) besprochenen Gruppe G_{16}. Wir können daher einen Theil der bis jetzt gewonnenen Ergebnisse folgendermassen zusammenfassen:

Sieht man ein sphärisches Dreieck als bestimmt an, wenn die Cosinus seiner Seiten und Winkel gegeben sind, so kann man die Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke durch eine im Allgemeinen eindeutig-umkehrbare Zuordnung derart auf die Punkte eines ebenen dreifach-ausgedehnten Raumes abbilden, dass den sechzehn zu demselben Dreikant oder Dreiflach gehörigen Nachbardreiecken die Punkte einer Kummer'schen Configuration entsprechen, und dass ferner den ∞^3 *verschiedenen Dreikanten durch diese Abbildung die* ∞^3 *Kummer'schen Configurationen mit derselben Gruppe zugeordnet werden.*

Die Punkte der KUMMER'schen Configurationen vertheilen sich auf die in § 9 definirten Raumgebiete in der Weise, dass im Falle I jedes der vier Octaeder vier Punkte derselben Configuration enthält, in den Fällen II, III, IV aber in jedes der dann vorhandenen 16 Raumgebiete ein einzelner Punkt einer zugehörigen KUMMER'schen Configuration zu liegen kommt.

Ferner lehren die Formeln (1) und (2): *Der Zerlegung der Gruppe* $\mathfrak{G}_{16}$ *in die von den Substitutionen* S, *bez.* Σ *erzeugten Untergruppen entspricht die Zerlegung der Gruppe* G_{16} *in die Spiegelungen an den Kantenpaaren des Y- und des Z-Tetraeders*[1]). — Auch die Gruppe der Spiegelungen an den Kantenpaaren des X-Tetraeders hat eine einfache Bedeutung für die sphärische Trigonometrie: Sie entspricht der in § 4 des ersten Abschnittes (Nr. 9, S. 104) gelegentlich betrachteten Gruppe der vier Substitutionen $S_i\,\Sigma_i$. —

1) In der erwähnten Untersuchung des Verfassers über die Gruppe G_{16} (Sitzber. der K. Sächs. Ges. d. W., 1892, S. 122) ist ein anderes System von erzeugenden Operationen in den Mittelpunkt gestellt, das der Zerlegung von G_{16} in sogenannte *Schiebungen* der Fundamentalfläche $a_{00} = 0$ entspricht. Die dort gebrauchten Bezeichnungen hängen mit den hier verwendeten so zusammen: Es ist

$$(35) = S_3\Sigma_2,\quad (51) = S_1\Sigma_3,\quad (13) = S_2\Sigma_1,$$
$$(46) = S_2\Sigma_3,\quad (62) = S_3\Sigma_1,\quad (24) = S_1\Sigma_2,$$

also umgekehrt:

$$S_1 = (45),\qquad S_2 = (61),\qquad S_3 = (23),$$
$$\Sigma_1 = (36),\qquad \Sigma_2 = (52),\qquad \Sigma_3 = (14).$$

Von der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$ kann man in verschiedenen Richtungen zu umfassenderen Gruppen aufsteigen — einmal zu den mehrfach besprochenen Gruppen $\mathfrak{G}_{64}$, $\mathfrak{G}_{128}$ — dann durch die in § 7 des ersten Abschnittes vorgenommenen Erweiterungen zu den Gruppen $\mathfrak{G}_{96}$ und $\mathfrak{G}_{192}$. Die zuerst genannten Gruppen lassen sich leicht geometrisch auffassen mit Hülfe der in § 10 behandelten vierfachen und achtfachen Raumüberdeckung. Wir brauchen hierauf nicht näher einzugehen. Dagegen wollen wir die Vertauschungen der Parameter X_i kurz betrachten, die den Substitutionen von $\mathfrak{G}_{96}$ und $\mathfrak{G}_{192}$ entsprechen. Man wird nämlich auch in diesen Fällen wieder auf *collineare* Transformationen des Raumes geführt: Die den Gruppen $\mathfrak{G}_{96}$ und $\mathfrak{G}_{192}$ zugeordneten Transformationsgruppen des Raumes sind keine anderen, als die Gruppen G_{96} und G_{192}, die wir in § 8 (S. 155) kennen gelernt haben. Betrachten wir also congruente Dreikante oder Dreiflache als nicht wesentlich verschieden, so können wir sagen: *Man kann die Mannigfaltigkeit der ∞^3 wesentlich verschiedenen Dreikante oder Dreiflache (mit gegebenem Mittelpunkt im Endlichen) derart auf den ebenen Raum von drei Dimensionen abbilden, dass einem Raumpunkt ein im Allgemeinen völlig bestimmtes Dreikant oder Dreiflach entspricht, umgekehrt aber einem gegebenen Dreikant oder Dreiflach 96 solche Raumpunkte zugewiesen werden, deren Inbegriff von der mit den desmischen Tetraedern verknüpften Gruppe G_{96} in sich selbst übergeführt wird.*

Die Dreikante sind paarweise als Polarfiguren zusammengeordnet. Die zu einem solchen Paar gehörigen Figuren von je 96 Raumpunkten entsprechen einander wechselweise in den involutorischen collinearen Transformationen (Spiegelungen), die durch je einen Eckpunkt des X-Tetraeders und die gegenüberliegende Fläche bestimmt sind. Insbesondere folgt: *Die Punkte auf den Flächen des X-Tetraeders entsprechen den Dreikanten, die zu sich selbst polar sind, oder den sphärischen Dreiecken, bei denen die Sinus der Seiten numerisch gleich sind den Sinus der gegenüberliegenden Winkel.* Den Ecken des X-Tetraeders entsprechen die Dreiecke mit drei (mod. π) rechten Seiten und Winkeln. —

Die Gruppen G_{96} und G_{192} enthalten die Gruppe G_{16} als invariante Untergruppe, wie wir in § 8 gesehen haben. Nehmen wir jetzt an, dass wir irgend eine Gruppe collinearer Transformationen kennen,

die die Gruppe G_{16} ebenfalls als invariante Untergruppe enthält, ihrerseits aber weder in der Gruppe G_{96} noch auch in der Gruppe G_{192} enthalten ist, so werden wir zu einem eigenthümlichen Zusammenhang zwischen mehreren verschiedenen Dreikanten geführt, den man füglich als *Verwandtschaft* bezeichnen kann. Dreikante würden also in diesem Sinne »verwandt« dann zu nennen sein, wenn die entsprechenden Raumpunkte einander durch eine Transformation der gerade betrachteten Gruppe zugeordnet werden, die nicht schon zu den bereits von uns behandelten Transformationen gehört. Wir wollen diesen Gedanken durch ein besonders merkwürdiges Beispiel erläutern, indem wir die § 8 eingeführte Gruppe G_{576} ins Auge fassen.

Diese definirt offenbar eine *Tripelverwandtschaft* zwischen Paaren zu einander polarer Dreikante, indem sie drei Gruppen von je 192 vermöge der Gruppe G_{192} zusammengehörigen Punkten zu einer höheren Einheit von 576 Punkten verschmilzt. Aber die so bestimmte Zuordnung lässt sich von den Dreikanten auf die Dreiecke selbst übertragen. Wir mögen nämlich bemerken, dass die Gruppe G_{576} eine Untergruppe enthält, die aus der identischen Transformation und den folgenden beiden (einander entgegengesetzten) Transformationen besteht:

$$(3)\quad \begin{cases} 2X_0' = -X_0-X_1-X_2-X_3, & 2X_0'' = -X_0+X_1+X_2+X_3, \\ 2X_1' = X_0+X_1-X_2-X_3, & 2X_1'' = -X_0+X_1-X_2-X_3, \\ 2X_2' = X_0-X_1+X_2-X_3, & 2X_2'' = -X_0-X_1+X_2+X_3, \\ 2X_3' = X_0-X_1-X_2+X_3, & 2X_3'' = -X_0-X_1-X_2+X_3. \end{cases}$$

Das System der Substitutionscoefficienten a_{ix} geht bei diesen Transformationen über in zwei neue Systeme a'_{ix} und a''_{ix}, die aus denselben Grössen in anderer Anordnung bestehen:

$$(4)\qquad \begin{matrix} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{00}, & a_{33} & a_{31} & a_{32}\,; \\ & a_{13} & a_{11} & a_{12} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{00}, & a_{12} & a_{13} & a_{11}\,. \\ & a_{22} & a_{23} & a_{21} \end{matrix}$$

(Vgl. den Schluss von § 5.) Das Theorem des § 6 (Formel 4, S. 143) führt jetzt zu dem Satz:

Ein durch die Cosinus seiner Seiten und Winkel gegebenes sphärisches Dreieck bestimmt noch zwei weitere Dreiecke, deren Seiten und Winkel mit denen des ersten durch die Formeln zusammenhängen:

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
\cos a_i' &= \frac{\cos \alpha_i}{\cos a_i} = \frac{1}{\cos \alpha_i''}, \\
\cos a_i'' &= \frac{\cos \alpha_i'}{\cos a_i'} = \frac{1}{\cos \alpha_i}, \\
\cos a_i &= \frac{\cos \alpha_i''}{\cos a_i''} = \frac{1}{\cos \alpha_i'}, \\
\cos \alpha_i' &= \frac{1}{\cos a_i} = \frac{\cos a_i''}{\cos \alpha_i''}, \\
\cos \alpha_i'' &= \frac{1}{\cos a_i'} = \frac{\cos a_i}{\cos \alpha_i}, \\
\cos \alpha_i &= \frac{1}{\cos a_i''} = \frac{\cos a_i'}{\cos \alpha_i'}.
\end{aligned}
\right. \qquad (i = 1, 2, 3).
$$

Von drei auf diese Art verbundenen Dreiecken mit reellen Cosinus hat immer eines reelle und ein zweites rein imaginäre Seiten und Winkel, während das dritte entweder reelle Seiten und rein imaginäre Winkel oder reelle Winkel und rein imaginäre Seiten hat.

Setzt man etwa die zuletzt angegebenen Werthe der Grössen $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$ in die Formeln des Cosinussatzes ein, so geht die erste Gruppe von drei Formeln (Nr. 1, § 1, S. 124) in die zweite (Nr. 6) über, aus dieser aber geht eine neue Formelgruppe hervor:

$$
(6) \quad \begin{aligned}
&(\cos a_2 . \cos a_3 . \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 . \cos \alpha_3 . \cos a_1)^2 \\
&= (\cos^2 a_2 - \cos^2 \alpha_2)(\cos^2 a_3 - \cos^2 \alpha_3) , \quad \text{u. s. w.,}
\end{aligned}
$$

die man natürlich auch auf anderem Wege begründen kann. —

Man kann leicht alle collinearen Transformationen finden, die die Gruppe G_{16} in sich selbst überführen. Sie bilden die bekannte Gruppe von 11520 Transformationen, die die 10 Fundamentalflächen $a_{i\varkappa} = 0$ (§ 8, S. 157) unter einander vertauscht. Jede hierin enthaltene Untergruppe, die ihrerseits die Gruppe G_{16} enthält, führt zu einem dem letzten Satze ähnlichen Theorem. Zu einem einfachen Ergebniss kommt man noch, wenn man die Untergruppe von 1152 Transformationen in Betracht zieht, die die Fläche $a_{00} = 0$ in Ruhe lässt, d. i. die Gruppe von collinearen Transformationen, die die sechs Tetraeder beider Reihen in allgemeinster Weise vertauscht. Die in dieser Gruppe enthaltenen involutorischen Transformationen führen zu involutorischen Zuordnungen sphärischer Dreiecke.

§ 12.

Die Halbmesser der Eckenkreise und der Berührungskreise des Dreiecks.

Man kann die Verhältnisse der von uns eingeführten Grössen Y_i und Z_i in einer sehr einfachen Weise an der Kugel selbst geometrisch deuten, wenn man die sphärischen Halbmesser der vier Berührungskreise des Dreiecks und die dazu dualistischen Grössen berechnet.

Wir bezeichnen mit ϱ_0 die *Cotangente* des sphärischen Halbmessers des Kreises[1]), der die Seiten des Dreiecks gleichartig berührt, nämlich so, dass die positiven Richtungen der Seiten, in den Berührungspunkten auf den Kreis übertragen, alle drei den gleichen Drehungssinn ergeben; und entsprechend nennen wir ϱ_1 die Cotangente vom sphärischen Halbmesser des Kreises, der die Seiten a_2 und a_3 gleichartig und die Seite a_1 ungleichartig berührt, u. s. f. Ferner nennen wir r_0, r_1, r_2, r_3 die zu den Grössen ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 dualistischen Grössen, also die Cotangenten der sphärischen Halbmesser der Berührungskreise des Polardreiecks. Dann ist r_0 die goniometrische *Tangente* des sphärischen Halbmessers des Kreises, der durch die drei Ecken des gegebenen Dreiecks geht, r_1 die entsprechende Grösse für den Kreis, der durch die Ecken 2 und 3 und durch den Gegenpunkt der Ecke 1 hindurchläuft, u. s. w.

Um etwa r_0 zu berechnen, nennen wir ω_i den Innenwinkel an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks, das durch die Seite a_i und einen der beiden Mittelpunkte des Eckenkreises bestimmt wird. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega_2 + \omega_3 &\equiv \pi \mp \alpha_1 \\ \omega_3 + \omega_1 &\equiv \pi \mp \alpha_2 \qquad (\text{mod. } 2\pi)\,, \\ \omega_1 + \omega_2 &\equiv \pi \mp \alpha_3 \end{aligned}$$

also
$$\omega_1 \equiv \frac{\pi}{2} \mp \sigma_1 \qquad (\text{mod. } \pi)\,,$$

folglich $\frac{1}{r_0} = \operatorname{ctg}\frac{a_1}{2} \cdot \cos\omega_1 = \pm\, l_1 \sin\sigma_1$. Die Radien der drei anderen Eckenkreise ergeben sich hieraus durch die in § 4 des

1) Genauer: eines der beiden Kreise, die die im Texte genannte Eigenschaft haben, und durch die Spiegelung am Mittelpunkt der Kugel in einander übergehen.

ersten Abschnittes definirten Substitutionen $S_i \Sigma_i$. Es bestehen also die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \pm \frac{1}{r_0} = l_1 \sin \sigma_1 = l_2 \sin \sigma_2 = l_3 \sin \sigma_3 , \\ \pm \frac{1}{r_1} = l_1 \sin \sigma_0 = \frac{1}{l_2} \sin \sigma_3 = \frac{1}{l_3} \sin \sigma_2 , \\ \pm \frac{1}{r_2} = \frac{1}{l_1} \sin \sigma_3 = l_2 \sin \sigma_0 = \frac{1}{l_3} \sin \sigma_1 , \\ \pm \frac{1}{r_3} = \frac{1}{l_1} \sin \sigma_2 = \frac{1}{l_2} \sin \sigma_1 = l_3 \sin \sigma_0 , \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \pm r_i = \frac{2 \sin \sigma_i}{\Pi} = \frac{R \,.\, Z_i}{2\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}} , \\ \pm \varrho_i = \frac{2 \sin s_i}{P} = \frac{R \,.\, Y_i}{2\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}} . \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Lässt man nur die *oberen* (oder nur die unteren) Vorzeichen gelten, so kann man offenbar in allen Formeln des § 6 die Grössen Z_i durch die Grössen r_i und die Grössen Y_i durch die Grössen ϱ_i ersetzen. Zwischen den Grössen r_i, ϱ_i besteht dann dieselbe Abhängigkeit, d. h. es ist

$$(3) \quad \begin{cases} 2r_0 = -\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 , & 2\varrho_0 = -r_0 + r_1 + r_2 + r_3 , \\ 2r_1 = \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 , & 2\varrho_1 = r_0 - r_1 + r_2 + r_3 , \\ 2r_2 = \varrho_0 + \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 , & 2\varrho_2 = r_0 + r_1 - r_2 + r_3 , \\ 2r_3 = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 , & 2\varrho_3 = r_0 + r_1 + r_2 - r_3 . \end{cases}$$

In diesen linearen und homogenen Gleichungen haben wir vier von den fünf unabhängigen Relationen, die zwischen den acht Grössen r_i, ϱ_i stattfinden müssen. Die letzte, die weder linear noch homogen ist, ergibt sich aus der Bemerkung, dass der in den Formeln (2) zu den Grössen Z_i, Y_i hinzutretende Factor gleich Eins werden muss, wenn man Z_i durch r_i und Y_i durch ϱ_i ersetzt. Sie lautet also

$$(4) \quad \begin{cases} (r_0 r_1 + r_2 r_3)(r_0 r_2 + r_3 r_1)(r_0 r_3 + r_1 r_2) \\ \qquad = 4 r_0 r_1 r_2 r_3 \cdot \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \\ = (\varrho_0 \varrho_1 + \varrho_2 \varrho_3)(\varrho_0 \varrho_2 + \varrho_3 \varrho_1)(\varrho_0 \varrho_3 + \varrho_1 \varrho_2) . \end{cases}$$

Die hiermit gelöste Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Halbmessern der umschriebenen und eingeschriebenen Kreise eines Dreiecks anzugeben, ist für den Fall eines *ebenen* Dreiecks schon lange erledigt (Steiner, Ges. Werke, Bd. I, S. 213). Wir werden später, in § 14, die von Bobillier und Steiner angegebenen Formeln durch einen Grenzübergang wiederfinden.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die durch die Gleichungen (1) vermittelte Beziehung zwischen den Grössen r_i und $\sin\sigma_i$ wechselseitig ist: Neben die Gleichungen (2), in die man für P und Π die Werthe aus Nr. 5, § 1 (S. 125) eintragen mag, stellen sich als Auflösungen, bei Annahme der oberen (oder unteren) Vorzeichen, die ganz analogen Gleichungen

$$(5)\quad \sin\sigma_i = \frac{r_i}{\sqrt{r_0 r_1 r_2 r_3}}, \quad \sin\sigma_i = \frac{\varrho_i}{\sqrt{\varrho_0\varrho_1\varrho_2\varrho_3}} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Bemerkenswerth sind auch die hieraus fliessenden Ausdrücke für P^2 und Π^2:

$$(6)\qquad P^2 = \frac{1}{\varrho_0\varrho_1\varrho_2\varrho_3}, \quad \Pi^2 = \frac{1}{r_0 r_1 r_2 r_3}. \text{ —}$$

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch eine bekannte Umformung der Ausdrücke (2).

Es ist

$$\frac{2\sin\sigma_0}{\Pi} = \frac{2\sin\alpha_1 . \sin\sigma_0}{\sin\alpha_1 . P}, \text{ andrerseits (s. S. 139)}$$

$$\sin\sigma_0 = \frac{\sin\alpha_1 . \sin\frac{a_2}{2} . \sin\frac{a_3}{2}}{\cos\frac{a_1}{2}}, \text{ also (bei eigentlichen Drei-}$$

ecken und bei Annahme der oberen Vorzeichen in (1)):

$$(7)\qquad \begin{cases} P.r_0 = 4\sin\frac{a_1}{2}\cdot\sin\frac{a_2}{2}\cdot\sin\frac{a_3}{2}, \\ P.r_1 = 4\sin\frac{a_1}{2}\cdot\cos\frac{a_2}{2}\cdot\cos\frac{a_3}{2}, \quad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

§ 13.

Kreisvierecke in der Ebene.

Mehrere der von uns aufgestellten Formeln sind noch einer zweiten geometrischen Deutung fähig, die an planimetrische Constructionen anknüpft, und die wohl ebenfalls ein gewisses Interesse beanspruchen darf.

Wir nehmen zuerst an, dass die Seiten und Winkel des darzustellenden Dreiecks sämmtlich zwischen den Grenzen 0 und π liegen, dass es also zum Typus $(A_0 A_0)$ gehört (I. Abschnitt, § 2).

Legen wir die Winkel $2s_i$, deren Summe 2π ist, in beliebiger Reihenfolge an einander, beschreiben wir um den gemeinsamen

Scheitel einen Kreis, und bringen wir diesen mit den vier Winkelschenkeln zum Durchschnitt, so entsteht ein Kreisviereck, dessen Seiten sich verhalten wie die Grössen Y_i (§ 6, Formel 7, S. 144). Ebenso entsteht ein Kreisviereck, dessen Seiten den Grössen Z_i proportional sind, wenn wir die entsprechende Construction mit den Winkeln $2\sigma_i$ ausführen. Wir wollen nun die Halbmesser der benutzten Kreise insbesondere so wählen, dass zwischen den Seiten der beiden Kreisvierecke dieselben linearen Gleichungen bestehen, wie zwischen den Grössen Y_i, Z_i. Dann wird es, wo es nur auf die Verhältnisse der genannten Grössen ankommt, erlaubt sein, die Seiten der beiden Vierecke mit jenen Grössen selbst zu identificiren.

Die beiden so construirten Kreisvierecke nun geben uns ein treues Bild der Eigenschaften des sphärischen Dreiecks; sie erlauben nämlich, den wichtigsten unserer analytischen Ausdrücke eine einfache geometrische Deutung unterzulegen.

Zunächst finden wir in unseren Vierecken nicht nur die Winkel $2s_i$, $2\sigma_i$, sondern auch die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks selbst unmittelbar vor. (S. Fig. 13.) Die Formeln (4) des

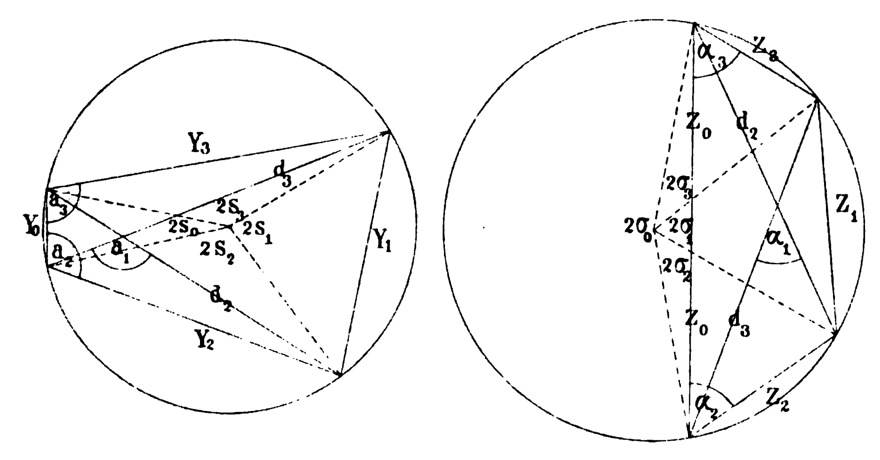


Fig. 13.

§ 6 reduciren sich daher jetzt auf einen bekannten Lehrsatz der Elementargeometrie:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos a_1 = \dfrac{Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2}{2(Y_0Y_1 + Y_2Y_3)}, \\[2ex] \cos \alpha_1 = \dfrac{Z_0^2 + Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2}{2(Z_0Z_1 + Z_2Z_3)}. \end{cases}$$

Die Irrationalitäten $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ und $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$ werden gleich den Flächeninhalten J_y und J_z der beiden Vierecke:

(2) $$J_y = \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}, \quad J_z = \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}\ ^{1)}.$$

Bezeichnet man ferner die Diagonalen des ersten Vierecks, deren es, bei verschiedener Anordnung der Seiten, offenbar drei verschiedene gibt, mit d_1, d_2, d_3, wie in der Figur angedeutet, so hat man nach dem Ptolemäischen Lehrsatz z. B.

(3) $$d_2 d_3 = Y_2 Y_3 + Y_0 Y_1 = \frac{a_{11}}{2}.$$

Dieselben Ausdrücke aber ergeben sich für die Producte der Diagonalen des zweiten Vierecks.

Die beiden zusammengehörigen Kreisvierecke haben also gleiche Diagonalen:

(4) $$d_1 = \frac{2R}{a_{11}}, \quad d_2 = \frac{2R}{a_{22}}, \quad d_3 = \frac{2R}{a_{33}}.$$

Hierauf gründet sich eine elegante constructive Lösung der Aufgabe: Die Winkel eines Dreiecks zu finden, dessen Seiten gegeben sind (oder umgekehrt): Man construire zuerst, in beliebigem Grössenverhältniss, das erste Viereck, hierauf mit Hülfe der bekannten Diagonalen und Seiten das zweite; aus diesem können die Winkel σ_i oder auch die gesuchten Winkel α_1, α_2, α_3 selbst abgelesen werden. — Auch der Sinussatz reducirt sich auf einen elementaren Satz der Planimetrie:

(5) $$\begin{cases} 2J_y = d_2 d_3 \sin a_1 = d_3 d_1 \sin a_2 = d_1 d_2 \sin a_3, \\ 2J_z = d_2 d_3 \sin \alpha_1 = d_3 d_1 \sin \alpha_2 = d_1 d_2 \sin \alpha_3, \end{cases}$$

(6) $$P : \Pi = J_y : J_z,$$

(7) $$\begin{aligned} \sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 &= \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 \\ &= d_1 : d_2 : d_3. \end{aligned}$$

Ferner gelten, wenn wir mit $\mathfrak{r}_y$ und $\mathfrak{r}_z$ die Halbmesser der beiden Kreise bezeichnen, denen die Vierecke eingeschrieben sind, die bekannten Formeln

(8) $$4\mathfrak{r}_y \cdot J_y = 4\mathfrak{r}_z \cdot J_z = d_1 d_2 d_3 = R. \text{ —}$$

---

1) Wegen der benutzten elementargeometrischen Sätze vergleiche man etwa BALTZER, Elemente der Mathematik, Bd. II, Viertes Buch, § 14 (5. Auflage) oder SCHLÖMILCH, Geometrie des Maasses (Planimetrie Nr. 28) oder SERRET, Trigonométrie p. 122.

Diese Formeln beziehen sich zunächst auf die Annahme, dass das betrachtete sphärische Dreieck zum Typus $(A_0 A_0)$ gehört (s. oben), dass also die Grössen Y_i und Z_i sämmtlich positiv sind oder doch das gleiche Vorzeichen haben (§ 9, S. 159). Eine von Möbius herrührende Anschauungsweise setzt uns aber in den Stand, die Betrachtung auf die übrigen Fälle auszudehnen[1]).

Man denke sich auf dem Umfang eines Kreises vom Halbmesser $\mathfrak{r}$ einen Punkt B immerfort in derselben Richtung bewegt, einen anderen Punkt A festgehalten. B möge im Anfang der Bewegung mit A zusammenfallen. Dann wird die Sehne AB vom Werthe Null an wachsen, dann wieder abnehmen, schliesslich nach dem ersten Umlauf des Punktes B von Neuem die Länge Null erreichen. Wir wollen nun bestimmen, dass die Länge der Sehne bei der weiteren Fortsetzung der Bewegung zu *negativen* Werthen übergehen soll, dann, nach dem zweiten Umlauf des Punktes B, wieder zu positiven u. s. f. Wir gelangen so zu der folgenden Regel: Der Sehne eines gegebenen Bogens ist das positive oder das negative Vorzeichen beizulegen, je nachdem der Bogen selbst positiv oder negativ ausfällt, wenn man ihn durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen des doppelten Kreisumfangs $4\mathfrak{r}\pi$ auf das Intervall von $-2\mathfrak{r}\pi$ bis $+2\mathfrak{r}\pi$ reducirt.

Wir wenden jetzt diese Bestimmung auf unser Kreisviereck an, indem wir das ursprünglich benutzte Dreieck etwa der Substitution S_1 unterwerfen:

$$a_1' = a_1, \qquad a_2' = a_2 + \pi, \qquad a_3' = a_3 + \pi,$$
$$\alpha_1' = 2\pi + \alpha_1, \quad \alpha_2' = -\alpha_2, \qquad \alpha_3' = -\alpha_3.$$

Die Grössen $2s_i$, $2\sigma_i$ nehmen hierbei die neuen Werthe an:
$2s_0 - 2\pi$, $2s_1 + 2\pi$, $2s_2$, $2s_3$; $2\sigma_1$, $2\sigma_0 - 4\pi$, $2\sigma_3 + 2\pi$, $2\sigma_2 + 2\pi$.

Construiren wir nun die zugehörigen Kreisvierecke, so unterscheiden sich diese in ihrer Gestalt gar nicht von den zuvor gefundenen; aber die Ecken sind jetzt in anderer Weise durch Kreisbogen verbunden, nämlich so, wie es in Fig. 14 (S. 178) angedeutet ist; zugleich ist die Bezeichnung der Seiten im Viereck (Z) eine andere geworden. Wenden wir die Möbius'sche Regel an, so finden wir, dass jetzt entweder den Seiten Y_0', Y_1', Z_3', Z_2' oder den Seiten Y_2, Y_3, Z_1', Z_0'

1) Möbius, Ges. Werke, Bd. I, S. 405 u. ff., insbesondere S. 408.

das negative Vorzeichen beigelegt werden muss. Damit haben aber die Verhältnisse der Grössen Y_ι, Z_ι gerade die Werthänderung erfahren, die sie bei der Substitution S_1 erleiden.

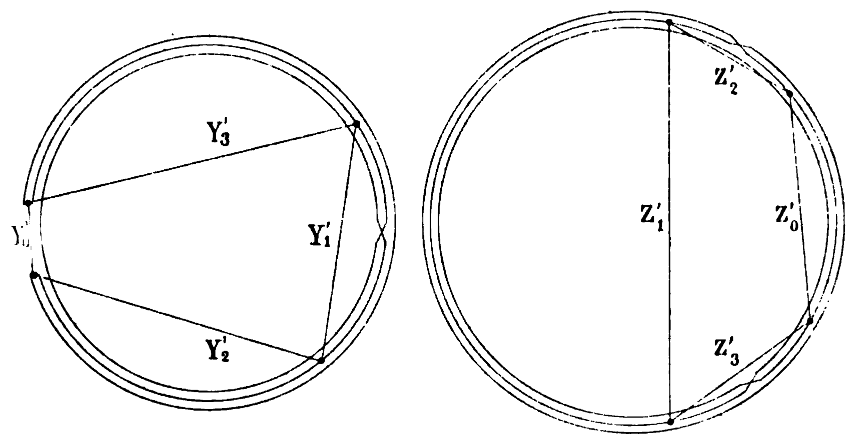


Fig. 14.

Man übersieht leicht, wie diese Betrachtung fortgesetzt werden kann: Bei gehöriger Berücksichtigung des den beiden Umfassungskreisen beizulegenden Drehungssinnes und des Vorzeichens der Diagonalen gelangt man zu einer neuen Auffassung der Gruppen $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{G}_{64}$, $\mathfrak{G}_{128}$. Wir dürfen wohl darauf verzichten, den Gedanken bis zu allen Einzelheiten hin durchzuführen.

Die angegebene Darstellung der sphärischen Dreiecke durch Kreisvierecke in der Ebene erstreckt sich nicht nur auf die Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln, sondern auch auf die Fälle, in denen entweder die Seiten oder die Winkel rein imaginär werden; jedoch ist dann immer nur das eine unserer beiden Vierecke realisirbar. Ausgeschlossen bleiben dagegen von den in § 9 unterschiedenen Fällen die unter IV genannten, die Dreiecke mit rein imaginären Seiten und Winkeln. Man kann aber die sphärische Trigonometrie noch auf eine zweite Art zu den Kreisvierecken in der Ebene in Beziehung setzen; und hierbei entspricht gerade den zuletzt erwähnten Dreiecken eine vollständig reelle Figur.

Wir construiren jetzt ein eigentliches und ein überschlagenes Kreisviereck mit Seiten, die sich verhalten, wie die Grössen X_ι, und bezeichnen die zugehörigen Winkel mit $\vartheta_\varkappa$ und $\vartheta_\varkappa'$. (S. Fig. 15.)

Dann findet sich

$$
(9)\quad \begin{aligned}
\cos\vartheta_1 &= \frac{a_{11}}{a_{23}}, & \cos\vartheta_2 &= \frac{a_{22}}{a_{31}}, & \cos\vartheta_3 &= \frac{a_{33}}{a_{12}},\\
\cos\vartheta_1' &= \frac{a_{11}}{a_{32}}, & \cos\vartheta_2' &= \frac{a_{22}}{a_{13}}, & \cos\vartheta_3' &= \frac{a_{33}}{a_{21}}.
\end{aligned}
$$

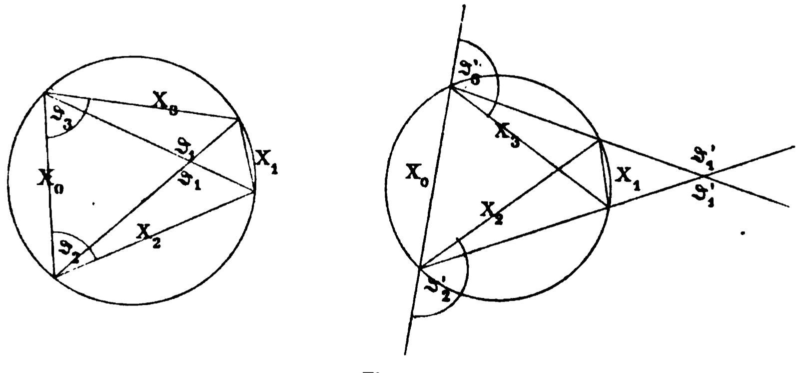


Fig. 15.

Die reciproken Werthe der Grössen $\cos\vartheta_x$, $\cos\vartheta_x'$ *sind also die Cosinus der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks.*

Dieses Dreieck hat nothwendig rein imaginäre Seiten und Winkel, wenn beide Vierecke reell sind; ist dagegen nur eines der beiden Vierecke möglich, so kommt man wieder auf die Fälle II und III des § 9 zurück. Auch bei dieser Deutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie stellen sich mehrere der von uns eingeführten Ausdrücke als geometrisch einfach definirte Grössen dar. Für die Flächen J und J' der beiden Vierecke z. B. ergeben sich die Werthe

$$J = \sqrt{-\,Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}, \qquad J' = \sqrt{-\,Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}.$$

Schliesslich kann man diese Betrachtungen noch in der Art erweitern, dass man alle sechs Kreisvierecke gleichzeitig untersucht, die durch die drei Grössensysteme X_i, Y_i, Z_i definirt werden (aber freilich niemals gleichzeitig reell sind). Man findet so eine zweite Herleitung des in § 11 (S. 170, 171) aufgestellten Satzes.

Die drei Paare von Kreisvierecken und die drei zusammengehörigen sphärischen Dreiecke stehen in einer doppelten merkwürdigen Beziehung: *Die reciproken Werthe der Cosinus, die zu den drei Viereckspaaren gehören, sind die Cosinus der Seiten und Winkel je eines der drei Dreiecke; andrerseits kann man die sechs Vierecke auch*

so in drei Paare ordnen, dass die Winkel eines Paares selbst gleich den Seiten und Winkeln je eines der drei sphärischen Dreiecke werden.

§ 14.

Grenzübergang zum ebenen Dreieck.

Von unserer Parameterdarstellung der sphärischen Dreiecke aus kommt man durch einen nicht uninteressanten Grenzübergang zu einer ähnlichen Darstellung der ebenen Dreiecke.

Um zum ebenen Dreieck zu gelangen, bedienen wir uns einer Grösse δ, deren höhere Potenzen wir gegen die niederen vernachlässigen, und mit der wir schliesslich zur Grenze Null übergehen. Wir führen den Grenzübergang nur für solche Dreiecke durch, deren Seiten sehr wenig von Null verschieden sind, und setzen dem entsprechend:

$$(1) \qquad a_i = \delta \,.\, \bar{a}_i, \qquad \alpha_i = \bar{\alpha}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Die Summe der Winkel $\bar{\alpha}_i$ mag im Grenzfalle $\delta = 0$ gleich 2π angenommen werden, so dass

$$\bar{\sigma}_0 = 0, \quad \bar{\sigma}_1 = \pi - \bar{\alpha}_1, \quad \bar{\sigma}_2 = \pi - \bar{\alpha}_2, \quad \bar{\sigma}_3 = \pi - \bar{\alpha}_3.$$

Die Bezeichnungen σ_i werden also in der ebenen Trigonometrie überflüssig; nicht aber die Bezeichnungen s_i. Diese wollen wir jedoch jetzt etwas abändern, indem wir an ihrer Stelle fortan die Grössen

$$(2) \qquad \begin{cases} 2\bar{s}_0 = \quad \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_1 = -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_2 = \quad \bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_3 = \quad \bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 \end{cases}$$

gebrauchen.

Die Substitution für die Parameter Z_i, die der Substitution (1) entspricht, lautet

$$(3) \qquad Z_0 = \delta^2 .\, \bar{Z}_0, \; Z_1 = \bar{Z}_1, \; Z_2 = \bar{Z}_2, \; Z_3 = \bar{Z}_3 .$$

Die Parameter X_i vereinigen sich im Grenzfalle mit den Grössen Y_i, an deren Stelle jetzt vier linear-abhängige Ausdrücke treten:

$$(4) \qquad \begin{cases} 2\bar{Y}_0 = \quad \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3, \\ 2\bar{Y}_1 = -\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3, \\ 2\bar{Y}_2 = \quad \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3, \\ 2\bar{Y}_3 = \quad \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 - \bar{Z}_3 . \end{cases}$$

Führt man nun den angezeigten Grenzübergang aus, so entstehen die folgenden Formeln, die die Parameterdarstellung der ebenen Dreiecke durch die Verhältnisgrössen $\bar{Z}_i$ enthalten:

$$(5)\qquad \frac{\bar{a}_2}{2}\cdot\frac{\bar{a}_3}{2} = \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_1};\quad \operatorname{tg}\frac{\bar{a}_2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{a}_3}{2} = \frac{\bar{Y}_0}{\bar{Y}_1} = \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_1}.$$

Hieraus folgt einerseits die Proportion

$$(6)\qquad \bar{Z}_0 : \bar{Z}_1 : \bar{Z}_2 : \bar{Z}_3 = \frac{\bar{a}_1}{2}\cdot\frac{\bar{a}_2}{2}\cdot\frac{\bar{a}_3}{2} : \frac{\bar{a}_1}{2} : \frac{\bar{a}_2}{2} : \frac{\bar{a}_3}{2},$$

andrerseits die goniometrische Formel

$$\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2} = 1\,.$$

Ferner ergibt sich

$$(7)\qquad \frac{\bar{a}_i}{2} = \frac{\bar{Z}_0\,\bar{Z}_i}{\sqrt{\bar{Z}_0\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3}},\quad \operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}_i}{2} = \frac{\bar{Y}_0\,\bar{Y}_i}{\sqrt{\bar{Y}_0\bar{Y}_1\bar{Y}_2\bar{Y}_3}} = \frac{\bar{s}_0\,\bar{s}_i}{\sqrt{\bar{s}_0\,\bar{s}_1\,\bar{s}_2\,\bar{s}_3}},$$

$$(8)\qquad \sin\bar{\alpha}_1 = \frac{4\sqrt{\bar{Y}_0\bar{Y}_1\bar{Y}_2\bar{Y}_3}}{2\,\bar{Z}_2\,\bar{Z}_3},\quad \cos\bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{Z}_1^2-\bar{Z}_2^2-\bar{Z}_3^2}{2\,\bar{Z}_2\,\bar{Z}_3}\,.$$

An Stelle der Irrationalität R tritt jetzt das auch im Vorzeichen bestimmte rationale Product $\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3$; die die Grössen $\sin s_i$ vertretenden Grössen $\bar{s}_i$ enthalten daher nur noch die eine Irrationalität $\sqrt{\bar{Z}_0\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3}$:

$$(9)\qquad \bar{s}_i = \frac{2\,\bar{Z}_0}{\sqrt{\bar{Z}_0\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3}}\,.\,\bar{Y}_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

An Stelle der Delambre'schen Ausdrücke, oder vielmehr eines Theiles von ihnen treten die folgenden:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin\frac{\bar{\alpha}_2-\bar{\alpha}_3}{2}}{\sin\frac{\bar{\alpha}_1}{2}} &= \frac{\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2}} = \\ &= -\frac{\bar{a}_2-\bar{a}_3}{\bar{a}_1} = -\frac{\bar{Z}_2-\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1}, \\ \frac{\cos\frac{\bar{\alpha}_2-\bar{\alpha}_3}{2}}{\cos\frac{\bar{\alpha}_1}{2}} &= \frac{1+\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2}} = \\ &= \frac{\bar{a}_2+\bar{a}_3}{\bar{a}_1} = \frac{\bar{Z}_2+\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1}; \end{aligned}\right.$$

endlich ergibt sich aus den L'Huilier'schen Formeln, wenn

$$(11)\qquad \overline{M} = \sqrt{\frac{\frac{\bar{s}_1}{2}\cdot\frac{\bar{s}_2}{2}\cdot\frac{\bar{s}_3}{2}}{\frac{\bar{s}_0}{2}}} = \frac{\overline{Z}_0}{\overline{Y}_0}\cdot\frac{\sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3}}{\sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3}}$$

gesetzt wird,

$$(12)\qquad \frac{\bar{s}_1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \frac{\bar{s}_2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \frac{\bar{s}_3}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2} = \overline{M}\,.$$

Die Grundformeln der ebenen Trigonometrie, der Cosinus- und der Sinussatz, entstehen bekanntlich aus den ebenso benannten Formeln der sphärischen Trigonometrie durch den nämlichen Grenzübergang:

$$(13)\qquad \bar{a}_1^2 = \bar{a}_2^2 + \bar{a}_3^2 + 2\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,.\cos\bar{\alpha}_1\,,$$

$$(14)\qquad \frac{\bar{a}_1}{\sin\bar{\alpha}_1} = \frac{\bar{a}_2}{\sin\bar{\alpha}_2} = \frac{\bar{a}_3}{\sin\bar{\alpha}_3} = \frac{\sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3}}{\sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3}}\,.$$

Der Ausdruck für die Fläche F des ebenen Dreiecks ist der Grenzwerth der Fläche des sphärischen Dreiecks, wenn man als Radius der Kugel die Grösse $\frac{1}{\delta}$ nimmt: Lim. $\frac{2\sigma_0}{\delta^2}$ =

$$(15)\qquad F = \sqrt{\bar{s}_0\,\bar{s}_1\,\bar{s}_2\,\bar{s}_3} = \frac{1}{2}\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,.\sin\bar{\alpha}_1 = \frac{4\,\overline{Z}_0}{\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3}\cdot\sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3}\,.$$

Von den Quotienten $\frac{r_i}{\delta}$ (s. § 12) haben drei die Grenze ∞; der letzte nähert sich dem Halbmesser $\bar{r}_0$ des dem Dreieck umschriebenen Kreises:

$$(16)\qquad \bar{r}_0 = \frac{\bar{a}_i}{2\sin\bar{\alpha}_i} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3}}{\sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3}} \qquad \text{(vgl. Nr. 14)};$$

die Quotienten $\frac{1}{\delta\varrho_i}$ dagegen nehmen im Grenzfall sämmtlich endliche Werthe an, und nähern sich den Halbmessern $\bar{\varrho}_i$ der Berührungskreise des ebenen Dreiecks:

$$(17)\qquad \begin{cases} \bar{\varrho}_0 = \bar{s}_1\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \bar{s}_2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \bar{s}_3\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2}\,, \\ \bar{\varrho}_1 = \bar{s}_0\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \bar{s}_3\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \bar{s}_2\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2}\,, \\ \bar{\varrho}_2 = \bar{s}_3\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \bar{s}_0\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \bar{s}_1\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2}\,, \\ \bar{\varrho}_3 = \bar{s}_2\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \bar{s}_1\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \bar{s}_0\cdot\operatorname{ctg}\frac{\bar{\alpha}_3}{2}\,. \end{cases}$$

$$(18)\qquad \bar{\varrho}_i = \frac{\sqrt{\bar{s}_0\,\bar{s}_1\,\bar{s}_2\,\bar{s}_3}}{\bar{s}_i} = 2\,\frac{\overline{Z}_0}{\overline{Y}_i}\cdot\frac{\sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3}}{\sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3}} \qquad (i = 0,\,1,\,2,\,3).$$

An Stelle der Relationen (3), (4) des § 12 treten also jetzt diese:

$$(19)\quad \begin{cases} 4\bar{r} = -\bar{\varrho}_0 + \bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \bar{\varrho}_3, \\ 0 \;= -\frac{1}{\bar{\varrho}_0} + \frac{1}{\bar{\varrho}_1} + \frac{1}{\bar{\varrho}_2} + \frac{1}{\bar{\varrho}_3}. \end{cases}$$

Endlich ergeben sich auch noch für die *Höhen* $\bar{h}_i$ des ebenen Dreiecks, die Grenzwerthe der Quotienten $\frac{\cos h_i}{\delta}$ (s. § 7, S. 150) bemerkenswerthe Ausdrücke, nämlich:

$$(20)\quad \bar{h}_i = 4\,\frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_i}\cdot\frac{\sqrt{\bar{Y}_0\bar{Y}_1\bar{Y}_2\bar{Y}_3}}{\sqrt{\bar{Z}_0\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Natürlich kann man alle diese Formeln auch unmittelbar entwickeln, wenn man die Grössen $\bar{Z}_i$ von vornherein durch die Proportion (6) definirt. —

Unsere Formeln definiren eine Abbildung der Mannigfaltigkeit aller wesentlich verschiedenen ebenen Dreiecke auf den Raum von drei Dimensionen, ähnlich der in § 9 behandelten Abbildung der sphärischen Dreiecke. Am Besten deuten wir jetzt die Grössen $\frac{\bar{Z}_i}{\bar{Z}_0}$ als rechtwinklige Cartesische Coordinaten. Die Ebenen $\bar{Y}_i = 0$ sind dann die vier Ebenen, die im Anfangspunkte der Coordinaten auf den Diagonalen eines Würfels mit den Ecken ± 1 senkrecht stehen und je sechs Kantenmitten des Würfels verbinden. Die acht Ebenen $\bar{Z}_i = 0$, $\bar{Y}_i = 0$ theilen den Raum in 32 Gebiete, deren jedes die Gestalt eines Tetraeders hat, einer dreikantigen Pyramide mit unendlich ferner Basis, deren Scheitel im Anfangspunkt der Coordinaten liegt.

Reelle Werthe der Parameter $\bar{Z}_i$ führen zu Dreiecken, deren Seiten und Winkel reell oder rein imaginär sind. Die einzelnen Fälle sind ebenso zu unterscheiden, wie die entsprechenden Fälle in § 9:

$$\text{I.}\quad \bar{Z}_0\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3 > 0, \quad \bar{Y}_0\bar{Y}_1\bar{Y}_2\bar{Y}_3 > 0.$$

(Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln).

Die zugehörigen Raumpunkte erfüllen das Innere von vier Dreikanten, die begrenzt werden von je drei Ebenenstücken $\bar{Y}_i = 0$. In einem Falle [0] hat man $\bar{Z}_i > 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$; die begrenzenden

Ebenen sind dann $\overline{Y}_1 = 0$, $\overline{Y}_2 = 0$, $\overline{Y}_3 = 0$. Die drei anderen Fälle [1], [2], [3] entstehen hieraus durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel je zweier der Grössen $\overline{Z}_i$.

$$\text{II.}\quad \overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3 > 0\,,\quad \overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3 < 0\,.$$

(Dreiecke mit reellen Seiten und rein imaginären Winkeln).

Die Ungleichungen II definiren zwölf verschiedene Raumgebiete, Dreikante, deren jedes im Endlichen begrenzt wird von zwei Coordinatenebenen und einer der Ebenen $\overline{Y}_i = 0$. Diese Dreikante überdecken die Flächen der unter I genannten Dreikante vollständig.

Aus jedem der unter I und II vorkommenden Dreiecke geht ein neues hervor durch Multiplication der Seiten mit $\sqrt{-1}$. Diese Operation entspricht offenbar der Spiegelung am Anfangspunkt der Coordinaten. Wir haben daher nicht nöthig, die Fälle

$$\text{III.}\quad \overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3 < 0\,,\quad \overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3 > 0 \quad \text{und}$$

$$\text{IV.}\quad \overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3 < 0\,,\quad \overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3 < 0$$

noch besonders zu besprechen.

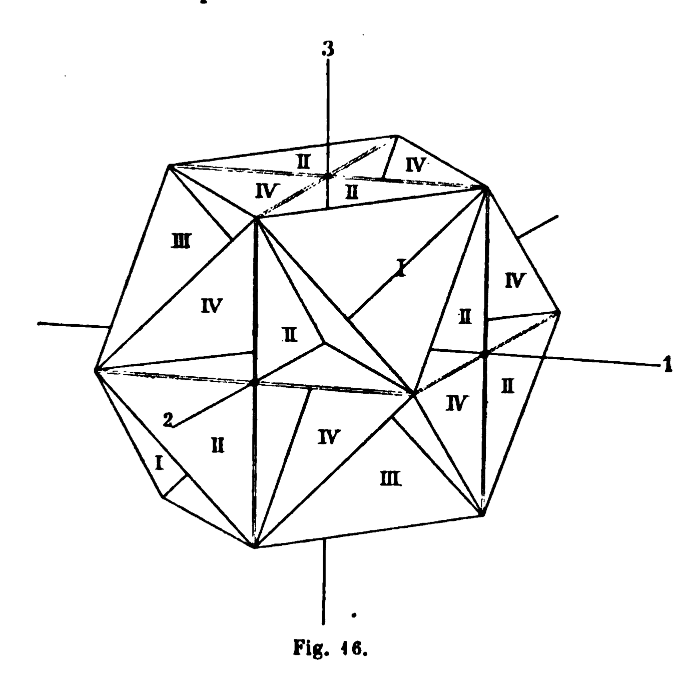


Fig. 16.

Die Figur 16 wird eine deutliche Vorstellung geben von der Lage der 32 Raumgebiete. Es ist die Ansicht eines Cubo-Octaeders

gezeichnet, aus dessen quadratischen Flächen die Coordinatenebenen die Diagonalen ausscheiden. Die Kanten werden aus dem Mittelpunkt durch die Ebenen $Y_i = 0$ projicirt. In jedes der durch die genannten Ebenen abgegrenzten Fächer ist die zugehörige Bezeichnung I, II, III oder IV eingetragen.

Betrachten wir etwas genauer die Abbildung der reellen Dreiecke auf die Punkte in den unter I genannten Raumgebieten [0], [1], [2], [3]. Wir denken uns jedes dieser Gebiete mit vier Blättern überdeckt, die den Vorzeichen der Quadratwurzeln aus $\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3$ und $\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3$ entsprechen, und wie folgt bezeichnet werden mögen:

$$(B_x\, \mathrm{B}_x) : \sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3} > 0\,, \quad \sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3} > 0\,;$$
$$(B_x\, \mathrm{B}_x') : \sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3} > 0\,, \quad \sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3} < 0\,;$$
$$(B_x'\, \mathrm{B}_x) : \sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3} < 0\,, \quad \sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3} > 0\,;$$
$$(B_x'\, \mathrm{B}_x') : \sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3} < 0\,, \quad \sqrt{\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3} < 0\,.$$

Man erkennt unmittelbar, dass diese Unterscheidung der in § 8 des ersten Abschnitts getroffenen Unterscheidung entspricht: Jedes unserer Raumgebiete, deren Zahl nunmehr auf 16 angewachsen ist, enthält Dreiecke einer bestimmten der dort auseinandergehaltenen Gestalten. (Vgl. auch II, § 10, S. 159.)

Der Zusammenhang der einzelnen Blätter wird vermittelt durch die Grenz-Flächen, -Kanten und -Punkte der Tetraeder [0], [1], [2], [3], und zwar ist die Art des Zusammenhangs dieselbe, die wir bereits in § 8 des ersten Abschnittes kennen gelernt haben. Die Punkte der Grenzflächen $\overline{Y}_i = 0$, deren es 4 . 3 . 2 verschiedene gibt, entsprechen den Grenzdreiecken erster Art; die Punkte der in der unendlich fernen Ebene gelegenen Begrenzungsflächen, deren 4 . 2 vorhanden sind, entsprechen den Grenzdreiecken zweiter Art, den unendlich kleinen Dreiecken. Die Grenzdreiecke dritter Art, die unendlich grossen Dreiecke, haben als Aequivalent einen singulären Punkt der Abbildung, den Anfangspunkt der Coordinaten: Jeder von diesem Punkt ausgehenden Fortschreitungsrichtung, die sich in eines der Gebiete I hineinerstreckt, entspricht ein unendlich grosses Dreieck von bestimmter Gestalt; oder vielmehr, es entsprechen ihr zwei solche Dreiecke, die den Uebergang zwischen je zwei Blättern unserer Raumüberdeckung nach dem Schema

$$(B_\varkappa \mathrm{B}_\varkappa) \longleftrightarrow (B_\varkappa' \mathrm{B}_\varkappa), \quad (B_\varkappa \mathrm{B}_\varkappa') \longleftrightarrow (B_\varkappa' \mathrm{B}_\varkappa')$$

vermitteln. Wie man sieht, kann man von den Grenzdreiecken erster Art weitergehen zu den Dreiecken mit reellen Seiten und rein imaginären Winkeln, und von den Grenzdreiecken zweiter und dritter Art zu den Dreiecken mit reellen Winkeln und rein imaginären Seiten. (Vgl. S. 120.)

Den 6 . 4 Schaaren von ∞^2 Uebergangsdreiecken erster Art entsprechen die sechs Punkte der unendlich fernen Ebene, in denen die vier Gebiete [0], [1], [2], [3] aneinanderstossen; den 6 . 4 Schaaren von Uebergangsdreiecken zweiter Art dagegen entsprechen sechs Raumpunkte, die auf den Schnittlinien der Ebenen $\overline{Y}_i = 0$ liegen und dem Anfangspunkt der Coordinaten unendlich benachbart sind. Dieser Punkt ist also für unsere Abbildung eine singuläre Stelle höherer Art.

Ausser den bereits genannten sind singuläre Stellen unserer Abbildung auch die übrigen Punkte der Kanten der vier Tetraeder [0], [1], [2], [3]. Das sind erstens die Schnittlinien der Ebenen $\overline{Y}_i = 0$ mit der unendlich fernen Ebene $\overline{Z}_0 = 0$. Diesen ∞^1 Punkten entsprechen nur ∞^0 Dreiecke, nämlich solche, deren Ecken in denselben Punkt und deren Seiten auf dieselbe Gerade fallen. In doppeltem Sinne singulär sind die Punkte auf den Schnittlinien $\overline{Y}_i = 0$, $\overline{Y}_\varkappa = 0$. Jedem solchen Punkt entsprechen ∞^1 Dreiecke, die gleichzeitig Uebergangsdreiecke erster und zweiter Art sind, und zwar allen Punkten auf derselben Kante die nämlichen Dreiecke. —

Fragen wir schliesslich noch, wie sich die Parameter $\overline{Z}_i$ verhalten bei den Substitutionen der auf Seite 122 definirten erweiterten Gruppe. Sie ändern sich nicht bei der Substitution $\mathfrak{T}$ (S. 118), und ebensowenig bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel sämmtlicher Seiten. Es entsteht daher eine Gruppe von nur 24 collinearen Transformationen, bestehend aus den Vertauschungen der Grössen $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$, und den Vorzeichenwechseln zweier von ihnen. Dies ist eine wohlbekannte Gruppe, die sogenannte *erweiterte Tetraedergruppe*[1]). Versteht man unter einer »Umlegung« eine Transformation des Raumes, bei der jede Figur in eine symmetrisch-gleiche übergeht, so kann

1) F. KLEIN, Vorlesungen über das Icosaeder (Leipzig, 1884) I, § 11 (S. 23).

die genannte Gruppe definirt werden als der Inbegriff aller Bewegungen und Umlegungen, die ein regelmässiges Tetraeder mit sich selbst zur Deckung bringen.

Sieht man ein ebenes Dreieck als bestimmt an, wenn seine Seiten gegeben sind, und betrachtet man überdies solche Dreiecke als nicht wesentlich verschieden, die durch einen Vorzeichenwechsel aller Seiten in einander übergehen, so entspricht in unserer Abbildung jedem Raumpunkt ein bestimmtes Dreieck und umgekehrt (natürlich nur im Allgemeinen; s. oben). Den 6 . 4 Dreiecken, die dieselben Ecken haben, entsprechen 24 Raumpunkte, die durch die erweiterte Tetraedergruppe unter einander vertauscht werden. —

Alle diese Ueberlegungen gestalten sich viel einfacher, wenn man *ähnliche* Dreiecke als nicht wesentlich verschieden ansieht. Es kommen dann nicht die Raumpunkte selbst, sondern nur die geraden Linien durch den Anfangspunkt in Betracht.

Es ist nicht schwer, die geschilderten Verhältnisse zu verstehen als Grenzfälle derer, die wir in § 10 beschrieben haben. Die angestellte Betrachtung ist indessen doch wohl nicht überflüssig, da die Abbildung der Mannigfaltigkeit der reellen ebenen Dreiecke auf den Punktraum manches Besondere darbietet, auch zum Theil andere und zwar höhere Singularitäten besitzt, als die entsprechende Abbildung der Mannigfaltigkeit der reellen sphärischen Dreiecke.

III. Abschnitt.

Darstellung orthogonaler Substitutionen und sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen.

Bekanntlich hat schon LAGRANGE die Bemerkung gemacht, dass die alte Additionsformel (in der LEGENDRE-JACOBI'schen Bezeichnung):

$$\cos \operatorname{am} (u + v) = \cos \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} v$$
$$- \sin \operatorname{am} u \,.\, \sin \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} (u + v)$$

die grösste Aehnlichkeit hat mit dem Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie. Es ging daraus die Möglichkeit hervor, sphärische Dreiecke durch elliptische Functionen *zweier* Argumente darzustellen[1]).

Auf diesen Zusammenhang der elliptischen Functionen mit der sphärischen Trigonometrie wird durch die im zweiten Abschnitt mitgetheilte Untersuchung ein neues Licht geworfen; zugleich ergibt sich eine bedeutende Erweiterung der bekannten Formeln: Es ist ein ähnliches Theorem vorhanden, das sphärische Dreiecke in mannigfaltiger Weise durch elliptische Functionen von *vier* unabhängigen Argumenten auszudrücken erlaubt, und das den erwähnten Satz als besonderen Fall enthält.

Die genannte Verallgemeinerung steht in einem eigenthümlichen Zusammenhang mit den JACOBI'schen und WEIERSTRASS'schen Additionstheoremen der ϑ- oder σ-Functionen, deren Theorie wir daher in einigen Punkten zu ergänzen haben werden.

Wir bedienen uns bei dieser Untersuchung des Systems von Bezeichnungen, das Herr WEIERSTRASS in die Wissenschaft eingeführt

1) S. DURÈGE, Theorie der elliptischen Functionen (3. Aufl. 1878), VII. Abschnitt, und die Literaturangaben bei ENNEPER (Ellipt. Funct., 2. Aufl., v. F. MÜLLER, 1889) S. 559, wozu noch GREENHILL, Applications of Elliptic functions kommt (London, 1892, Chap. IV). — Der im Texte gebrauchte, etwas unbestimmte Ausdruck wird durch die folgende Untersuchung erklärt werden.

hat. Dieses empfiehlt sich dem älteren Bezeichnungssystem gegenüber für uns schon dadurch, dass es den Dualismus zwischen einem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck klar zum Ausdruck bringt; es ist aber auch sonst, im Grossen und Ganzen, für unseren Gegenstand vortrefflich geeignet. Im Einzelnen werden wir uns allerdings einige Abweichungen von den Festsetzungen des Herrn WEIERSTRASS erlauben müssen[1]).

Nach dem im II. Abschnitt Gesagten kommt es in der Hauptsache auf Dasselbe hinaus, ob wir orthogonale Substitutionen oder sphärische Dreiecke durch elliptische Functionen darstellen. Indessen hängt das sphärische Dreieck doch in einfacherer Weise von der orthogonalen Substitution ab, als umgekehrt die Substitution vom Dreieck. Wir werden daher in der Folge meistens nur von orthogonalen Substitutionen reden. —

Wir stellen zunächst einige Hülfssätze zusammen, die sich auf die häufig wiederkehrende Aufgabe beziehen, die σ-Functionen des um eine halbe Periode vermehrten Argumentes durch die ursprünglichen Functionen σ, σ_1, σ_2, σ_3 auszudrücken. Die zu diesem Zweck entwickelten bekannten Formeln[2]) sind insofern nicht ganz zweckmässig, als sie die Symmetrie zwischen den drei Functionen σ_1, σ_2, σ_3

---

1) Dem Verfasser ist es wohl bewusst, wie gewichtige Bedenken einem solchen Verfahren entgegenstehen, namentlich in einer Theorie, in der ohnehin an den verschiedenartigsten Bezeichnungen kein Mangel ist; indessen erschien die Abänderung im Interesse der Sache dringend geboten. — Bei der Wahl der im Texte verwendeten Bezeichnungen ist der leitende Gedanke der gewesen, möglichst viele gleichartige Formeln (solche Formeln, die eine *Gruppe* bilden) in einem einzigen Ausdruck zusammenzufassen, *soweit es ohne Zerstörung der Uebersichtlichkeit möglich schien.* Es handelt sich dabei übrigens nur um die consequente Durchführung der WEIERSTRASS'schen Bezeichnungsweise. Dass Herr WEIERSTRASS selbst den folgerechten Ausbau seines Bezeichnungssystems unterlassen hat, ist nach Ansicht des Verfassers sehr zu bedauern. Der Vortheil, den die Beibehaltung der historisch überlieferten Bezeichnungen bietet, wiegt die dadurch hervorgerufenen Uebelstände schwerlich auf.

2) H. A. SCHWARZ, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen (Berlin, Reimer. Erschienen sind z. Z. die Bogen 1—12, Art. 1—60) Art. 21—23. HALPHEN, Traité des fonctions elliptiques (Paris 1886), t. I p. 190—195. Auch in diesem Werke ist die Symmetrie der Formeln nicht vollständig hergestellt.

aufheben und daher eine Unterscheidung verschiedener Fälle nothwendig machen, die man vermeiden kann.

Wir setzen, um zu symmetrischen Formeln zu gelangen,

$$(1)\qquad \omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = -\omega'' = -\omega - \omega', \quad \omega_3 = \omega',\text{[1]}$$

worin ω, ω', ω'' die bekannte Bedeutung haben, so dass

$$(2)\qquad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen $\sqrt{\wp u - e_\lambda} = \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ ergeben sich dann (vgl. SCHWARZ, S. 24) *eindeutig* bestimmte Werthe für die Quadratwurzeln aus den Differenzen der Grössen e_1, e_2, e_3, nämlich

$$(3)$$

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma \omega_1} = -\frac{e^{-\eta_2\omega_1}\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2}, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3 \omega_1}{\sigma \omega_1} = -\frac{e^{-\eta_3\omega_1}\sigma\omega_2}{\sigma\omega_3\,\sigma\omega_1},$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3 \omega_2}{\sigma \omega_2} = -\frac{e^{-\eta_3\omega_2}\sigma\omega_1}{\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}, \quad \sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\sigma_1 \omega_2}{\sigma \omega_2} = -\frac{e^{-\eta_1\omega_2}\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2},$$

$$\sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\sigma_1 \omega_3}{\sigma \omega_3} = -\frac{e^{-\eta_1\omega_3}\sigma\omega_2}{\sigma\omega_3\,\sigma\omega_1}, \quad \sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_3} = -\frac{e^{-\eta_2\omega_3}\sigma\omega_1}{\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}.$$

Hieraus folgt

$$(4)\qquad \begin{cases} \sqrt{e_3 - e_2} = i\sqrt{e_2 - e_3}, \qquad \sqrt{e_1 - e_3} = i\sqrt{e_3 - e_1}, \\ \sqrt{e_2 - e_1} = i\sqrt{e_1 - e_2}. \end{cases}$$

Versteht man daher unter λ, μ, ν die Zahlen 1, 2, 3 *in einer der drei Folgen* (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), und unter $\sqrt[4]{-i}$ die Grösse $-e^{-\frac{1}{8}\pi i}$, so ergibt sich

$$(5)\qquad \sigma\omega_\lambda = \frac{\sqrt[4]{-i}\,.\,e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda\omega_\lambda}}{\sqrt[4]{e_\nu - e_\lambda}\,.\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}} \quad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Den vierten Wurzeln dürfen hier nur solche Werthe beigelegt werden, deren Quadrate durch die Gleichungen (3) bereits eindeutig bestimmt sind; auch sind durch eine dieser Grössen die beiden anderen eindeutig bestimmt.

Jetzt erhalten wir die fraglichen Transformationsformeln in der folgenden Gestalt:

---

1) Besser noch wäre vielleicht die Annahme $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega'$, $\omega_3 = -\omega''$, da dann in der Zahlenebene die drei Punkte ω_1, ω_2, ω_3 im positiven Drehungssinn auf einander folgen. Doch bietet eine solche Abänderung keinen besonderen Vortheil. — Der Leser beachte, dass die Grössen $\sqrt{e_i - e_k}$ mit den in der SCHWARZ'schen Formelsammlung ebenso bezeichneten Grössen *nicht* identisch sind.

(6)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma(u\pm\omega_\lambda)}{e^{\pm\eta_\lambda u}\,\sigma_\lambda u} &= \quad\pm\,\sigma\omega_\lambda = \pm\frac{\sqrt{-i}}{\sqrt[4]{e_\nu-e_\lambda}\,\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}\,e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda\omega_\lambda},\\
\frac{\sigma_\lambda(u\pm\omega_\lambda)}{e^{\pm\eta_\lambda u}\,\sigma u} &= \mp\sqrt{e_\lambda-e_\mu}\,\sqrt{e_\lambda-e_\nu}\,\sigma\omega_\lambda = \mp\frac{1}{\sqrt{-i}}\,\sqrt[4]{e_\nu-e_\lambda}\,\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\;e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda\omega_\lambda},\\
\frac{\sigma_\mu(u\pm\omega_\lambda)}{e^{\pm\eta_\lambda u}\,\sigma_\nu u} &= \quad\sqrt{e_\lambda-e_\mu}\,\sigma\omega_\lambda = \sqrt{-i}\,\frac{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\nu-e_\lambda}}\,e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda\omega_\lambda},\\
\frac{\sigma_\nu(u\pm\omega_\lambda)}{e^{\pm\eta_\lambda u}\,\sigma_\mu u} &= \quad\sqrt{e_\lambda-e_\nu}\,\sigma\omega_\lambda = \frac{1}{\sqrt{-i}}\,\frac{\sqrt[4]{e_\nu-e_\lambda}}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}\,e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda\omega_\lambda}.
\end{aligned}
$$

Die Ausdrücke rechter Hand sind, wie gesagt, nur unter der Voraussetzung gültig, dass den Zahlen λ, μ, ν eines der Werthsysteme (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1) beigelegt wird; dagegen sind die zuerst angegebenen Ausdrücke einer solchen Beschränkung nicht unterworfen. Auch in allen weiterhin zu entwickelnden Formeln kann man den Grössen λ, μ, ν die Zahlenwerthe 1, 2, 3 in jeder *beliebigen* Anordnung beilegen.

Manche der aufzustellenden Ausdrücke gewinnen ein etwas einfacheres Ansehen, wenn man für die Producte der σ-Functionen mit gewissen Irrationalitäten besondere Functionszeichen einführt. Wir setzen, von der WEIERSTRASS'schen Bezeichnung abweichend,

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Theta u = \sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}\;\sqrt[4]{e_\nu-e_\lambda}\;\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\,.\,\sigma u = \sqrt[8]{G}\,.\,\sigma u,\\
&\Theta_\lambda u = \sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}\,.\,\sigma_\lambda u,\quad \Theta_\mu u = \sqrt[4]{e_\nu-e_\lambda}\,.\,\sigma_\mu u,\quad \Theta_\nu u = \sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\,.\,\sigma_\nu u.
\end{aligned}
\right.
$$

λ, μ, ν bedeuten hier die Zahlen 1, 2, 3 in einer beliebigen, aber bestimmten Anordnung. Die noch nicht erklärten Wurzeln sind definirt durch die Formeln

$$
(8)\quad \sqrt[4]{e_3-e_2}=\sqrt{i}\,\sqrt[4]{e_2-e_3},\quad \sqrt[4]{e_1-e_3}=\sqrt{i}\,\sqrt[4]{e_3-e_1},\quad \sqrt[4]{e_2-e_1}=\sqrt{i}\,\sqrt[4]{e_1-e_2},
$$

in denen der Grösse $\sqrt{i}$ ein und derselbe Werth beizulegen ist.

Für die so erklärten Θ-Functionen gelten die Gleichungen

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Theta^2u\,\Theta^2v + \Theta_\lambda^2u\,\Theta_\lambda^2v + \Theta_\mu^2u\,\Theta_\mu^2v + \Theta_\nu^2u\,\Theta_\nu^2v = 0,\\
&\Theta^2u\,\Theta_\lambda^2v - \Theta_\lambda^2u\,\Theta^2v + \Theta_\mu^2u\,\Theta_\nu^2v - \Theta_\nu^2u\,\Theta_\mu^2v = 0,\\
&\Theta'(0) = \Theta_\lambda(0)\,\Theta_\mu(0)\,\Theta_\nu(0),
\end{aligned}
\right.
$$

von denen die beiden ersten (besondere Fälle der später zu entwickelnden JACOBI'schen Formeln) algebraische Folgen der zwischen den Quadraten der Θ-Functionen *eines* Argumentes bestehenden Identitäten sind (die selbst wieder aus jenen durch Specialisirung hervorgehen). — Die Formeln (6) nehmen jetzt die folgende Gestalt an:

$$(10)\quad \begin{cases} \Theta(u \pm \omega_\lambda) = \pm \left(\sqrt{-i}\right)^{\epsilon} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda}\, e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\lambda u, \\ \Theta_\lambda(u \pm \omega_\lambda) = \mp \left(\sqrt{-i}\right)^{-\epsilon} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda}\, e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta u, \\ \Theta_\mu(u \pm \omega_\lambda) = \left(\sqrt{-i}\right)^{\epsilon} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda}\, e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\nu u, \\ \Theta_\nu(u \pm \omega_\lambda) = \left(\sqrt{-i}\right)^{-\epsilon} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda}\, e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\mu u. \end{cases}$$

Der Werth des Exponenten $\epsilon = \pm 1$ hängt vom Vorzeichen des Productes $\Theta'^4(0) = \sqrt{G}$ ab:

$$\epsilon = \frac{(e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu)}{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}.$$

Im Allgemeinen ist es bequemer, mit den Θ-Functionen zu rechnen, als mit den σ-Functionen, wie schon die Vergleichung der Formeln (10) mit den Formeln (6) zeigt. Dazu kommt der für die Anwendungen wichtige Vorzug der Θ-Functionen, dass sie in den Argumenten $\omega : \omega' : u$ gleichmässig *homogen* sind (vom Grade $-\frac{1}{2}$), während die σ-Functionen verschiedene Grade aufweisen (1, 0, 0, 0). Indessen enthalten die Θ-Functionen Irrationalitäten, die der Mehrzahl der von uns zu entwickelnden Formeln fremd sind, und daher aus diesen Formeln thatsächlich wieder herausfallen. — Wir werden in der Folge beide Functionszeichen neben einander benutzen.

Erwähnt sei noch, dass man die Θ-Functionen durch ihre Producte mit einer Exponentialgrösse der Form $e^{k_0 u^2 + k_1}$ ersetzen kann, ohne den Charakter der folgenden Untersuchung zu ändern.

Die vier Producte $\Theta'(0)^{-\frac{1}{3}} \cdot \Theta_\varkappa u = G^{-\frac{1}{24}} \cdot \Theta_\varkappa u$ sind eindeutige homogene Functionen *nullten Grades* der Grössen $\omega : \omega' : u$.

§ 1.

Die Gruppirung der Weierstrass'schen und Jacobi'schen Additionstheoreme.

Das Additionstheorem der WEIERSTRASS'schen σ-Function lautet bekanntlich

$$(1)\quad \begin{aligned} &\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_1)\,\sigma(u_2 + u_3)\,\sigma(u_2 - u_3) + \\ + &\sigma(u + u_2)\,\sigma(u - u_2)\,\sigma(u_3 + u_1)\,\sigma(u_3 - u_1) + \\ + &\sigma(u + u_3)\,\sigma(u - u_3)\,\sigma(u_1 + u_2)\,\sigma(u_1 - u_2) = 0. \end{aligned}$$

Führt man hier die neuen Bezeichnungen ein[1])

1) Vgl. SCHWARZ, Art. 38. Auch hier war eine kleine Abweichung in der Bezeichnung um des Folgenden willen nothwendig, oder doch wünschenswerth.

$$u+u_1=b,\quad u-u_1=-c,\quad u_2+u_3=-d,\quad u_2-u_3=a,$$
$$u+u_2=b',\quad u-u_2=-c',\quad u_3+u_1=-d',\quad u_3-u_1=a',$$
$$u+u_3=b'',\quad u-u_3=-c'',\quad u_1+u_2=-d'',\quad u_1-u_2=a'',$$

so bestehen die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} 2a' = -a-b-c-d, & 2a'' = -a+b+c+d, \\ 2b' = a+b-c-d, & 2b'' = -a+b-c-d, \\ 2c' = a-b+c-d, & 2c'' = -a-b+c-d, \\ 2d' = a-b-c+d, & 2d'' = -a-b-c+d, \end{cases}$$

und die analogen Gleichungen, die aus (2) durch cyclische Vertauschung der Grössen a, a', a'' u. s. w. hervorgehen. Die Gleichung (1) nimmt dann die einfache Form an

$$(3)\quad \sigma a\,\sigma b\,\sigma c\,\sigma d + \sigma a'\,\sigma b'\,\sigma c'\,\sigma d' + \sigma a''\,\sigma b''\,\sigma c''\,\sigma d'' = 0. \text{ —}$$

Denkt man sich nun die Grössen a, b, c, d um Vielfache von halben Perioden vermehrt, in der Weise, dass auch a', b', c', d' und a'', b'', c'', d'' um Vielfache halber Perioden wachsen, und führt man dann mit Hülfe der Formeln (6) S. 191 die Functionen σ_λ, σ_μ, σ_ν ein, so erhalten alle drei Glieder denselben Exponentialfactor, und gleichzeitig verschwinden in der neuen Formel auch die Irrationalitäten. Es soll sich nun für uns darum handeln, eine Uebersicht über die Gesammtheit aller so entstehenden Additionstheoreme und über deren Gruppirung zu gewinnen. Hierzu führen die folgenden Bemerkungen:

1) Die Vermehrung einer der Grössen a, b, c, d um eine doppelte Periode $4\omega_\lambda$ ändert die Gestalt der Relation (3) überhaupt nicht, und ebensowenig die Vermehrung zweier verschiedener der Grössen a, b, c, d um dieselbe einfache Periode $2\omega_\lambda$. Wir können also, für unseren Zweck, alle diese Substitutionen als nicht wesentlich verschieden von der identischen Substitution ansehen. — Aus 1) folgt

2) Vermehrt (oder vermindert) man eine der Grössen a, b, c, d um eine einfache Periode $2\omega_\lambda$, so ist der Erfolg derselbe, welche der vier Grössen a, b, c, d man auch gewählt haben möge. Auf diese Art gehen also aus der Relation (3) im Ganzen nur *drei* neue Formeln hervor.

3) Jede der in Rede stehenden Aenderungen lässt sich zusammensetzen aus den unter 1) und 2) genannten Substitutionen und einer Vermehrung der Grössen a, b, c, d um solche Grössen $\pm\omega_\lambda$, deren Summe *gleich* Null ist. Diese aber kann man leicht aufzählen.

Es gibt, wenn man die identische Substitution einschliesst, und nicht nur die unter 1), sondern für den Augenblick auch die unter 2) besprochenen Substitutionen der Identität zuordnet, 64 verschiedene Substitutionen der genannten Art, als deren Vertreter wir die folgenden anführen mögen:

$$\begin{array}{rl} (0,\ 0,\ 0,\ 0) & \text{(die identische Substitution)} \\ (\omega_\lambda,\ \omega_\lambda,\ -\omega_\lambda,\ -\omega_\lambda) & \text{(3 verschiedene Substitutionen)} \\ (0,\ 0,\ \omega_\lambda,\ -\omega_\lambda) & (3\,.\,6 = 18 \text{ Substitutionen}) \\ (\omega_\mu,\ -\omega_\mu,\ \omega_\nu,\ -\omega_\nu) & (3\,.\,6 = 18 \text{ Substitutionen}) \\ (0,\ \omega_\lambda,\ \omega_\mu,\ \omega_\nu) & (24 \text{ Substitutionen}). \end{array}$$

Der in Klammer gesetzte Ausdruck gibt in jedem Falle, in leicht verständlicher Bezeichnung, die Zuwüchse der Grössen a, b, c, d an.

Wir gelangen so zu 4 . 64 = 256 *Additionstheoremen, die durch eine Gruppe von eben so vielen involutorischcn (und also vertauschbaren) Substitutionen in einander übergehen.*

Diese 256 Formeln theilen wir nun in 16 *Familien* von je 16, deren jeder dieselben, alsbald anzugebenden Eigenschaften zukommen.

Eine erste Familie möge alle die Relationen umfassen, in denen die zu einem Product verbundenen σ-Functionen alle den gleichen Index haben. Diese Formeln entstehen aus (3) durch Verbindung der unter 2) besprochenen Substitutionen mit den folgenden:

$$(0, 0, 0, 0), \quad (\omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda), \quad (\omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu), \quad (\omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu),$$

also durch eine von 16 Substitutionen gebildete *Untergruppe* $\mathfrak{g}_{(16)}$ der erwähnten Gruppe von 256 Substitutionen.

Aus dieser Familie von 16 Additionstheoremen entsteht sodann eine neue, wenn man c um ω_λ vermehrt und d um ω_λ vermindert, und demzufolge dieselbe Substitution $(0,\ 0,\ \omega_\lambda,\ -\omega_\lambda)$ auch auf c' und d', c'' und d'' anwendet. Die Ausübung der Substitutionen $(\omega_\lambda, \omega_\lambda, 0, 0)$ oder $(\omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\nu, \omega_\nu)$ auf das Grössensystem (a, b, c, d) würde zu derselben Formelfamilie führen. Es entstehen also durch die genannten Substitutionen, wenn man $\lambda = 1, 2, 3$ setzt, und dann die Grössen a, b, c, d beliebig vertauscht, im Ganzen nur 3 . 3 = 9 verschiedene Familien von je 16 Formeln.

Eine weitere Familie entsteht aus der ersten durch die auf die Grössen a, b, c, d auszuführende Substitution $(0,\ \omega_\lambda,\ \omega_\mu,\ \omega_\nu)$, oder auch durch eine der Substitutionen $(\omega_\lambda,\ 0,\ \omega_\nu,\ \omega_\mu)$, $(\omega_\mu,\ \omega_\nu,\ 0,\ \omega_\lambda)$,

$(\omega_\nu, \omega_\mu, \omega_\lambda, 0)$. Es gibt demnach $\frac{24}{4} = 6$ verschiedene Familien dieser Art. Die zuerst genannte Substitution $(0, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu)$ hat dieselbe Art der Aenderung für die Grössen a', b', c', d' und a'', b'', c'', d'' zur Folge.

Führt man nun die besprochenen Substitutionen in der zuletzt angegebenen Reihenfolge aus, bestimmt man also zuerst die 16 Formeln der ersten Familie, und leitet dann aus diesen die Formeln der 9 + 6 übrigen Familien her, so gelangt man zu dem folgenden Theorem:

Setzt man entweder

$$(6, \mathrm{I})\begin{cases} \mathfrak{x}_0 = (e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu)\sigma a\, \sigma b\, \sigma c\, \sigma d = \Theta a\, \Theta b\, \Theta c\, \Theta d, \\ \mathfrak{x}_1 = (e_\mu - e_\nu)\sigma_\lambda a\, \sigma_\lambda b\, \sigma_\lambda c\, \sigma_\lambda d = \Theta_\lambda a\, \Theta_\lambda b\, \Theta_\lambda c\, \Theta_\lambda d, \\ \mathfrak{x}_2 = (e_\nu - e_\lambda)\sigma_\mu a\, \sigma_\mu b\, \sigma_\mu c\, \sigma_\mu d = \Theta_\mu a\, \Theta_\mu b\, \Theta_\mu c\, \Theta_\mu d, \\ \mathfrak{x}_3 = (e_\lambda - e_\mu)\sigma_\nu a\, \sigma_\nu b\, \sigma_\nu c\, \sigma_\nu d = \Theta_\nu a\, \Theta_\nu b\, \Theta_\nu c\, \Theta_\nu d, \end{cases}$$

oder

$$(6, \mathrm{II})\begin{cases} \mathfrak{x}_0 = (e_\mu - e_\nu)\sigma a\, \sigma b\, \sigma_\lambda c\, \sigma_\lambda d = \frac{1}{\Theta_\mu(0)\,\Theta_\nu(0)} \cdot \Theta a\, \Theta b\, \Theta_\lambda c\, \Theta_\lambda d, \\ \mathfrak{x}_1 = -(e_\mu - e_\nu)\sigma_\lambda a\, \sigma_\lambda b\, \sigma c\, \sigma d = \frac{1}{\Theta_\mu(0)\,\Theta_\nu(0)} \cdot -\Theta_\lambda a\, \Theta_\lambda b\, \Theta c\, \Theta d, \\ \mathfrak{x}_2 = -\sigma_\mu a\, \sigma_\mu b\, \sigma_\nu c\, \sigma_\nu d = \frac{1}{\Theta_\mu(0)\,\Theta_\nu(0)} \cdot -\Theta_\mu a\, \Theta_\mu b\, \Theta_\nu c\, \Theta_\nu d, \\ \mathfrak{x}_3 = \sigma_\nu a\, \sigma_\nu b\, \sigma_\mu c\, \sigma_\mu d = \frac{1}{\Theta_\mu(0)\,\Theta_\nu(0)} \cdot \Theta_\nu a\, \Theta_\nu b\, \Theta_\mu c\, \Theta_\mu d, \end{cases}$$

oder endlich

$$(6, \mathrm{III})\begin{cases} \mathfrak{x}_0 = \sigma a\, \sigma_\lambda b\, \sigma_\mu c\, \sigma_\nu d = \frac{1}{\Theta'(0)^2} \cdot \Theta a\, \Theta_\lambda b\, \Theta_\mu c\, \Theta_\nu d, \\ \mathfrak{x}_1 = \sigma_\lambda a\, \sigma b\, \sigma_\nu c\, \sigma_\mu d = \frac{1}{\Theta'(0)^2} \cdot \Theta_\lambda a\, \Theta b\, \Theta_\nu c\, \Theta_\mu d, \\ \mathfrak{x}_2 = \sigma_\mu a\, \sigma_\nu b\, \sigma c\, \sigma_\lambda d = \frac{1}{\Theta'(0)^2} \cdot \Theta_\mu a\, \Theta_\nu b\, \Theta c\, \Theta_\lambda d, \\ \mathfrak{x}_3 = \sigma_\nu a\, \sigma_\mu b\, \sigma_\lambda c\, \sigma d = \frac{1}{\Theta'(0)^2} \cdot \Theta_\nu a\, \Theta_\mu b\, \Theta_\lambda c\, \Theta d, \end{cases}$$

und bezeichnet man mit $\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ *und* $\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ *dieselben Functionen der Grössen* a', b', c', d' *und* a'', b'', c'', d'', *so bestehen die linearen Gleichungen*

$$(7)\begin{cases} \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{z}_0 = 0, \\ \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{y}_\alpha + \mathfrak{z}_\alpha = 0, \\ \mathfrak{y}_0 - \mathfrak{z}_\alpha + \mathfrak{x}_\alpha = 0, \\ \mathfrak{z}_0 - \mathfrak{x}_\alpha + \mathfrak{y}_\alpha = 0, \\ \mathfrak{x}_\alpha + \mathfrak{y}_\beta + \mathfrak{z}_\gamma = 0, \end{cases}$$

[$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ in jeder beliebigen Reihenfolge; zusammen 16 Gleichungen]

oder, in anderer Anordnung,

$$
(8)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{x}_0+\mathfrak{x}_\alpha &= -\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_\alpha = -\mathfrak{z}_\beta-\mathfrak{z}_\gamma,\\
\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_\alpha &= \mathfrak{y}_\beta+\mathfrak{y}_\gamma = -\mathfrak{z}_0-\mathfrak{z}_\alpha,\\
\mathfrak{x}_\beta+\mathfrak{x}_\gamma &= -\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_\alpha = \mathfrak{z}_0-\mathfrak{z}_\alpha,\\
\mathfrak{x}_\beta-\mathfrak{x}_\gamma &= \mathfrak{y}_\beta-\mathfrak{y}_\gamma = \mathfrak{z}_\beta-\mathfrak{z}_\gamma,
\end{aligned}\right.
$$

oder endlich

$$
(9)\quad\left\{\begin{aligned}
-\mathfrak{z}_0-\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}_2 &= 2\,\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}_2+\mathfrak{y}_3,\\
\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}_3 &= 2\,\mathfrak{x}_1 = -\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_3,\\
\mathfrak{z}_0-\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}_3 &= 2\,\mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_3,\\
\mathfrak{z}_0-\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3 &= 2\,\mathfrak{x}_3 = -\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2+\mathfrak{y}_3,\\
\hline
-\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_3 &= 2\,\mathfrak{y}_0 = -\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3,\\
\mathfrak{x}_0+\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_3 &= 2\,\mathfrak{y}_1 = -\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}_3,\\
\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_3 &= 2\,\mathfrak{y}_2 = -\mathfrak{z}_0-\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}_3,\\
\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2+\mathfrak{x}_3 &= 2\,\mathfrak{y}_3 = -\mathfrak{z}_0-\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3,\\
\hline
-\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_3 &= 2\,\mathfrak{z}_0 = -\mathfrak{x}_0+\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2+\mathfrak{x}_3,\\
\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_3 &= 2\,\mathfrak{z}_1 = -\mathfrak{x}_0+\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_3,\\
\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_3 &= 2\,\mathfrak{z}_2 = -\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_3,\\
\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2+\mathfrak{y}_3 &= 2\,\mathfrak{z}_3 = -\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2+\mathfrak{x}_3.
\end{aligned}\right.
$$

Der in den Formeln (6, II) und (6, III) rechter Hand auftretende, allen Grössen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ gemeinsame Factor fällt aus den homogenen Gleichungen (7), (8), (9) heraus und kann daher weggelassen werden.

In diesem Satz sind die WEIERSTRASS'schen Additionstheoreme mit denen JACOBI's zusammengefasst. Die WEIERSTRASS'schen sind enthalten in den Formeln (7), die JACOBI'schen gehen aus (8) und (9) hervor, wenn man etwa die Grössen $\mathfrak{x}_i$ weglässt und nur auf den Zusammenhang der Grössen $\mathfrak{y}_i$ und $\mathfrak{z}_i$ achtet[1]). Es liegt auf der Hand, wie

1) Diese Formeln sind als Fundament der Theorie der elliptischen Functionen hingestellt in der von BORCHARDT ausgearbeiteten Vorlesung JACOBI's (Ges. Werke, Bd. I, S. 449). Dass die noch elementarere dreigliedrige Θ-Formel dem Scharfblick eines JACOBI entgehen konnte, lag an einem Umstand, den man zunächst für sehr geringfügig halten möchte. JACOBI hatte nämlich die von uns a', b', ... und a'', b'', ... genannten Grössen etwas anders bezeichnet, indem er, statt einer Transformation von der Periode drei, eine involutorische Abhängigkeit zwischen zwei Reihen von vier Grössen benutzte (a. a. O., S. 505 Nr. 10). Die Einführung der Grössen a, b, ..., die ihn sofort zu den viel später erst auf anderem Wege von WEIERSTRASS gefundenen Formeln hätte hinleiten müssen, bot sich daher JACOBI

man von den Formeln Jacobi's, die hier aus den Weierstrass'schen abgeleitet sind, wieder zu diesen zurückgelangen kann.

Zu berücksichtigen ist, wie gesagt, dass der Fall I eine einzige, der Fall II neun, der Fall III sechs Formelfamilien vertritt. In jedem der drei Fälle lassen die Gleichungen (7) vier von den zwölf Functionen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ linear-unabhängig. Da diese vier Functionen aber nicht nur linear-unabhängig, sondern gänzlich von einander unabhängig sind, so umfassen die aufgestellten Gleichungen überhaupt *alle* Relationen, die zwischen den zwölf Functionen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ bestehen[1]).

Die Uebereinstimmung der Gleichungen (7) ... (9) mit den in § 5 des zweiten Abschnittes entwickelten Formeln fällt in die Augen. Man braucht zwischen den Grössensystemen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ und X_i, Y_i, Z_i nur etwa folgenden Zusammenhang anzunehmen:

---

nicht nothwendig dar. Wir haben also den lehrreichen Fall vor uns, dass eine kleine Aenderung in der Bezeichnung einen wesentlichen Fortschritt nach sich zieht. —

Uebrigens sind bei Jacobi die Formeln nicht in *drei*, sondern in *fünf* Gruppen zusammengefasst, indem der bei uns mit II bezeichnete Fall in drei Unterfälle zerlegt ist.

1) Wegen des Zusammenhangs der Jacobi'schen und Weierstrass'schen Additionstheoreme (auf den übrigens auch Herr Weierstrass selbst gelegentlich hingewiesen hat) vgl. Briot et Bouquet, Fonctions elliptiques (2[me] éd. Paris 1875, Livre VII); Fr. Meyer, Amtl. Ber. der Strassburger Naturforscherversammlung, 1885, S. 354; Scheibner, Crelle's Journal Bd. 102 (1888), S. 258; Kronecker, ebenda S. 260 u. ff.

Dem im Texte hervorgehobenen Theorem sind Briot und Bouquet nahe gekommen, noch mehr Kronecker. Doch werden von diesen Autoren nur einzelne Theile des Satzes formulirt. Andrerseits hat Herr Caspary die Beziehung der Jacobi'schen Formeln (in die nur die Grössen Y und Z eingehen) zu der Figur zweier in desmischer Lage befindlicher Tetraeder hervorgehoben (Math. Ann. Bd. 29, S. 581; vgl. auch Bd. 28, S. 495).

Derselbe Verfasser hat auch die seit Jacobi bekannten Beziehungen zwischen orthogonalen Substitutionen und elliptischen Functionen genauer zu ergründen versucht, ohne jedoch zu einem besonders bemerkenswerthen Ergebniss zu kommen (Bulletin des Sciences Mathém., sér. II., vol. 13 (1889), p. 89, Journal de Mathém., sér. IV, t. 6 (1890) p. 367; vgl. Jahnke, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. 1892, S. 178). Grösseren Werth dagegen scheint mir die auf ϑ-Functionen von *zwei* Argumenten bezügliche Abhandlung des Herrn Caspary zu besitzen (Crelle's J. Bd. 94 (1883) S. 74). Leider wird die Brauchbarkeit aller dieser Arbeiten dadurch sehr beeinträchtigt, dass ihr Verfasser Bezeichnungen benutzt, die das eigentliche Gesetz seiner Formeln nur schwer erkennen lassen.

$$(10)\quad \begin{cases} X_0 = \mathfrak{x}_0, & X_1 = \mathfrak{x}_1, & X_2 = \mathfrak{x}_2, & X_3 = \mathfrak{x}_3, \\ Y_0 = -\mathfrak{y}_0, & Y_1 = \mathfrak{y}_1, & Y_2 = \mathfrak{y}_2, & Y_3 = \mathfrak{y}_3, \\ Z_0 = -\mathfrak{z}_0, & Z_1 = -\mathfrak{z}_1, & Z_2 = -\mathfrak{z}_2, & Z_3 = -\mathfrak{z}_3, \end{cases}$$

um beide Gleichungssysteme vollständig in einander überzuführen. Es ergibt sich also, bei Auffassung der Grössen $\mathfrak{x}_i$ als homogener Coordinaten eines Raumpunktes, ganz ungezwungen eine geometrische Auffassung unserer Formeln, die sie in die innigste Beziehung setzt zu *den desmischen Tetraedern*, *der Kummer'schen Configuration*, *den orthogonalen Substitutionen*, *der sphärischen Trigonometrie*. Allerdings ist diese geometrische Deutung insofern unvollständig, als sie nur die Verhältnisse der Grössen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ in Betracht zieht; bei den Anwendungen kommt es indessen meistens gerade auf die *Verhältnisse* der Θ-Functionen an.

Will man die Grössen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ selbst in ähnlicher Weise deuten, so wird man einen Raum von vier Dimensionen zu Hülfe nehmen; man kann dann die Theorie mit den Eigenschaften eines regulären Körpers, des sogenannten *Vierundzwanzigzells* in Verbindung bringen.

§ 2.

Fortsetzung: Das Aequivalent der Gruppe G_{576}.

Das Wesen der nachgewiesenen Beziehung zwischen elliptischen Functionen und orthogonalen Sustitutionen liegt natürlich nicht darin, dass man die Substitutionscoefficienten überhaupt irgendwie durch elliptische Functionen von vier Parametern darstellen kann — dies ist eine selbstverständliche Folge des Ausdrucks jener Grössen durch die Parameter X_i —, sondern es liegt in der besonderen Natur der Darstellung, nämlich darin, dass die coordinirten Grössen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ ganz *dieselben* Functionen, und zwar sehr einfache Functionen werden von Argumenten, die durch lineare Substitutionen aus einander hervorgehen. Besondere Beachtung verdient dabei der Umstand, dass die Gleichungen zwischen den zwölf Functionen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ die nämliche Form haben, wie die Gleichungen zwischen den Argumenten.

Die Natur des ganzen Zusammenhangs wird noch deutlicher durch folgenden Satz:

Die in § 8 *des zweiten Abschnittes definirte Gruppe G_{16} (die Gruppe der Kummer'schen Configuration) wird durch die Gleichungen* (6) *und*

(10) *des § 1 in jedem der drei Fälle I, II, III isomorph bezogen auf eine gewisse Gruppe* $\mathfrak{g}_{(16)}$ *von linearen Substitutionen der Grössen* a, b, c, d.

Durch dieselben Formeln wird die umfassendere Gruppe G_{576} *(die Gruppe der desmischen Tetraeder) isomorph bezogen auf eine Gruppe* $\mathfrak{g}_{(576)}$ *von linearen Substitutionen der sämmtlichen Argumente* $a, b, c, d, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ *der Functionen* $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, e_1, e_2, e_3$.

Die genannten Gruppen umfassen jedesmal unendlich viele Substitutionen, woran wir hier dadurch erinnert haben, dass der den Grad der Gruppe bezeichnende Index in Klammer eingeschlossen worden ist. In demselben Sinne beziehen sich die Bezeichnungen $\mathfrak{g}_{(96)}, \mathfrak{g}_{(192)}$ auf die Untergruppen G_{96}, G_{192} der Gruppe G_{576}. (II, § 8, S. 155.)

Die Definition der Gruppen $\mathfrak{g}_{(16)}, \mathfrak{g}_{(96)}, \mathfrak{g}_{(192)}, \mathfrak{g}_{(576)}$ ist immer eine andere in jedem der drei Fälle I, II, III.

Um die in ihnen enthaltenen Substitutionen übersehen zu können, ordnen wir die S. 193 besprochenen Aenderungen der Grössen a, b, c, d, die in allen drei Fällen nur das Hinzutreten eines gemeinsamen Factors zu den Grössen $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i, \mathfrak{z}_i$ bewirken, von vorn herein der Identität zu. Es sind dies die Vermehrung einer der Grössen a, b, c, d um eine doppelte Periode $\pm 4\bar{\omega}$, und die Vermehrung zweier dieser Grössen um dieselbe einfache Periode $\pm 2\bar{\omega}$. Ausserdem betrachten wir als von der Identität nicht verschieden alle linearen Transformationen der Perioden ω, ω' (von der Determinante Eins), die die Grössen e_1, e_2, e_3 einzeln ungeändert lassen. Die Gruppe aller linearen Periodentransformationen reducirt sich dadurch auf eine Gruppe von *sechs* Transformationen $\mathfrak{g}_{(6)}$, die den Vertauschungen von e_1, e_2, e_3 oder $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ entsprechen (Schwarz, Art. 33, Halphen p. 260). Wir behandeln nun der Reihe nach die drei Annahmen I, II, III.

I.

Der Identität sind noch weiter zuzuordnen:

1) Die sämmtlichen Vertauschungen der Grössen a, b, c, d.

2) Die gleichzeitige Aenderung des Vorzeichens zweier dieser Grössen.

Den erzeugenden Substitutionen $S_1, S_2, S_3, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ der Gruppe G_{16} oder $\mathfrak{G}_{16}$ (II. Abschn., § 11, S. 167) entsprechen dann

die folgenden Aenderungen der Grössen a, b, c, d um halbe Perioden $\pm \bar{\omega}$:

$$(1) \quad \begin{cases} S_1: (\omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda), & \Sigma_1: (-\omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda), \\ S_2: (\omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu), & \Sigma_2: (-\omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu), \\ S_3: (\omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu), & \Sigma_3: (-\omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu). \end{cases}$$

Dabei ist es im Falle der Substitutionen Σ_i natürlich gleichgültig, bei welcher der Grössen a, b, c, d wir die hinzugefügte halbe Periode mit dem negativen Vorzeichen versehen wollen[1]).

Aus der durch (1) definirten Gruppe $\mathfrak{g}_{(16)}$ entsteht sodann die Gruppe $\mathfrak{g}_{(96)}$, wenn wir die sechs Transformationen der Gruppe $\mathfrak{g}_{(6)}$ hinzufügen, die Gruppe $\mathfrak{g}_{(192)}$, wenn wir ausserdem den Vorzeichenwechsel einer einzelnen der Grössen a, b, c, d zulassen, endlich die Gruppe $\mathfrak{g}_{(576)}$, wenn wir mit den bereits genannten Substitutionen noch die cyclische Substitution von der Periode 3 verbinden, die durch die Gleichungen (2) S. 193 definirt ist, und eine cyclische Vertauschung der drei Grössenreihen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ bewirkt ($i = 0, 1, 2, 3$).

II.

In den Fällen II und III treten an Stelle der unter I genannten Substitutionen zum Theil andere, die sich aus jenen durch Transformation vermöge der Substitution $(0, 0, \omega_\lambda, -\omega_\lambda)$, bez. $(0, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu)$ ergeben. (Vgl. S. 101 Anmerk.) Im Falle II hat man danach der identischen Substitution zuzuordnen:

1) Die Vertauschung von a und b, die Vertauschung von c und d, und die Substitution

$$a_0 = c - \omega_\lambda, \quad b_0 = b, \quad c_0 = a + \omega_\lambda, \quad d_0 = d$$

(sowie alle 24 wesentlich-verschiedenen Verbindungen dieser Substitutionen).

---

1) Da die im zweiten Abschnitte durchaus natürliche Auszeichnung des X-Tetraeders im gegenwärtigen Zusammenhang nicht mehr gerechtfertigt ist, so betrachtet man als erzeugende Substitutionen der Gruppe G_{16} besser noch die in der Anmerkung auf S. 168 definirten. Die entsprechenden Substitutionen von $g_{(16)}$ sind:

$$S_3\Sigma_2: (\omega_\lambda + 2\omega_\mu, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda),$$
$$S_2\Sigma_3: (\omega_\lambda + 2\omega_\nu, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda),$$

u. s. f., mit cyclischer Vertauschung von 1, 2, 3; λ, μ, ν.

2) Den Vorzeichenwechsel von a und b, den von c und d, sowie die Substitution

$$a_0 = -a\,, \ b_0 = b\,, \ c_0 = -c + 2\omega_\lambda\,, \ d_0 = d \quad \text{(u. s. w.)}.$$

Die erzeugenden Substitutionen von $\mathfrak{g}_{(16)}$ werden dieselben, wie unter I (Nr. 1); an Stelle der Substitutionen von $\mathfrak{g}_{(96)}$ aber treten zum Theil andere. Man hat nämlich jetzt die Substitutionen von $\mathfrak{g}_{(6)}$, die die nachfolgenden Vertauschungen von e_λ, e_μ, e_ν und σ_λ, σ_μ, σ_ν bewirken, mit den daneben aufgeführten Aenderungen der Grössen a, b, c, d zu verbinden:

$$\begin{array}{ll}
(\lambda, \mu, \nu):(0, 0, 0, \quad 0)\,; & (\lambda, \nu, \mu):(0, 0, 0, \quad 0)\,; \\
(\mu, \nu, \lambda):(0, 0, \omega_\nu, -\omega_\nu)\,; & (\nu, \mu, \lambda):(0, 0, \omega_\mu, -\omega_\mu)\,; \\
(\nu, \lambda, \mu):(0, 0, \omega_\mu, -\omega_\mu)\,; & (\mu, \lambda, \nu):(0, 0, \omega_\nu, -\omega_\nu)\,.
\end{array}$$

III.

1) An Stelle der Vertauschungen der Grössen a, b, c, d treten jetzt die Substitutionen

$$\begin{array}{llll}
a_0 = b - \omega_\lambda\,, & b_0 = a + \omega_\lambda\,, & c_0 = c\,, & d_0 = d\,; \\
a_0 = c - \omega_\mu\,, & b_0 = b\,, & c_0 = a + \omega_\mu\,, & d_0 = d\,; \\
a_0 = d - \omega_\nu\,, & b_0 = b\,, & c_0 = c\,, & d_0 = a + \omega_\nu\,,
\end{array}$$

und die daraus zusammenzusetzenden.

2) An Stelle der Vorzeichenwechsel zweier der Grössen a, b, c, d treten die Substitutionen

$$\begin{array}{llll}
a_0 = -a\,, & b_0 = -b + 2\omega_\lambda\,, & c_0 = c\,, & d_0 = d\,; \\
a_0 = -a\,, & b_0 = b\,, & c_0 = -c + 2\omega_\mu\,, & d_0 = d\,; \\
a_0 = -a\,, & b_0 = b\,, & c_0 = c\,, & d_0 = -d + 2\omega_\nu\,,
\end{array}$$

u. s. f.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{g}_{(16)}$ sind wieder dieselben, wie unter I (Nr. 1); man kann aber, was bemerkt zu werden verdient, diese Substitutionen jetzt auch so schreiben

(2)

	a_0	b_0	c_0	d_0		a_0	b_0	c_0	d_0
S_1	b	a	d	c	Σ_1	$-b$	$-a$	d	c
S_2	c	d	a	b	Σ_2	$-c$	$-d$	a	b
S_3	d	c	b	a	Σ_3	$-d$	$-c$	b	a

Die Substitutionen endlich, die die Vertauschungen der Grössen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ nach sich ziehen, lauten jetzt, wenn wir uns einer ähnlichen Schreibart, wie unter II bedienen:

$(\lambda, \mu, \nu) : (0, 0, 0, 0); \quad (\lambda, \nu, \mu) : (0, 0, \omega_\lambda, -\omega_\lambda);$
$(\mu, \nu, \lambda) : (0, \omega_\nu, \omega_\lambda, \omega_\mu); \quad (\nu, \mu, \lambda) : (0, -\omega_\mu, 0, \omega_\mu);$
$(\nu, \lambda, \mu) : (0, \omega_\mu, \omega_\nu, \omega_\lambda); \quad (\mu, \lambda, \nu) : (0, \omega_\nu, -\omega_\nu, 0).$

Specialisirt man die Formeln (6, III) des § 1 dadurch, dass man $e_\mu = e_\nu = -\frac{1}{2} e_\lambda$ setzt (vgl. SCHWARZ, Art. 10, 20, HALPHEN p. 289), so kommt man zu den Ausdrücken[1])

$$(6, \text{IV}) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_0 = 2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b), \\ \mathfrak{x}_1 = 2 \cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b), \\ \mathfrak{x}_2 = 2 \sin c \cos d = \sin(c+d) + \sin(c-d), \\ \mathfrak{x}_3 = 2 \cos c \sin d = \sin(c+d) - \sin(c-d), \end{cases}$$

die dadurch bemerkenswerth sind, dass die zu einem der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe (II, § 8, S. 153, 154) gehörigen Coordinaten in die Sinus von vier unabhängigen Argumenten übergegangen sind; im Falle $e_\lambda = e_\mu = e_\nu = 0$ endlich folgt

$$(6, \text{V}) \quad \mathfrak{x}_0 = a, \ \mathfrak{x}_1 = b, \ \mathfrak{x}_2 = c, \ \mathfrak{x}_3 = d.$$

Die Gleichungen (7), (8), (9) *des* § 1 *gehen jetzt ohne irgendwie ihre Form zu ändern, in die linearen Gleichungen zwischen den Grössen* a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'' über (vgl. Nr. 2, § 1, S. 193). —

Setzt man etwa im Falle I eine der Grössen a, b, c, d gleich Null oder gleich einer halben Periode, so liegt der zugehörige Raumpunkt auf einer Fläche des $\mathfrak{x}$-Tetraeders; und in ähnlicher Weise entstehen die Flächen des $\mathfrak{y}$- und des $\mathfrak{z}$-Tetraeders durch Specialisirung der Parameter a', b', c', d' und a'', b'', c'', d''. Halten wir uns an die Annahme $a'' = 0$, und führen wir, vor dem Uebergang zu dieser Grenze, eine neue Ordinate $\bar{\mathfrak{z}}_0$ ein durch die Substitution $\bar{\mathfrak{z}}_0 = \frac{\mathfrak{z}_0}{a''}$, so erfahren die zwischen den Grössen X_i, Y_i, Z_i (§ 1, Nr. 10, S. 198) bestehenden Relationen die in § 14 des II. Abschnittes angegebene Aenderung. Man kann also mit Hülfe dieses Grenzübergangs auch die *ebene* Trigonometrie zu den elliptischen Functionen in Beziehung setzen.

---

1) Wir fahren hier in der Nummernbezeichnung des § 1 fort.

§ 3.

Darstellung orthogonaler Substitutionen durch σ-Functionen von vier Argumenten.

Die durch die Formeln Nr. 10 in § 1 definirten Ausdrücke für die Coefficienten a_α einer orthogonalen Substitution sind ganze homogene Functionen *zweiten* Grades einer jeden der Grössenreihen

$$\Theta a,\ \Theta_\lambda a,\ \Theta_\mu a,\ \Theta_\nu a \quad \text{(u. s. f.)}.$$

Es ist nun bemerkenswerth, dass sich die Ausdrücke der zehn Coefficienten a_{00}, $a_{11} \ldots a_{33}$, nämlich

$$(1)\quad \begin{cases} a_{00} = \Sigma \mathfrak{x}_i^2 = \Sigma \mathfrak{y}_i^2 = \Sigma \mathfrak{z}_i^2, \\ a_{11} = \Sigma(\pm \mathfrak{x}_i^2) = 2(\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3 - \mathfrak{y}_0\mathfrak{y}_1) = 2(\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_0\mathfrak{z}_1), \\ a_{23} = \Sigma(\pm \mathfrak{y}_i^2) = 2(\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3 - \mathfrak{z}_0\mathfrak{z}_1) = 2(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1), \\ a_{32} = \Sigma(\pm \mathfrak{z}_i^2) = 2(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1) = 2(\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3 + \mathfrak{y}_0\mathfrak{y}_1) \text{ u. s. w.,} \end{cases}$$

durch Einführung neuer Argumente an Stelle der Grössen $a, a', \ldots$ so umformen lassen, dass sie eine noch einfachere Gestalt annehmen, nämlich ganze homogene Functionen *ersten* Grades der Θ-Functionen der transformirten Argumente werden.

Die gemeinte Aenderung der Argumente wird bewirkt durch die Substitutionen

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{llll} \alpha = & c - d = & c' - d' = & c'' - d'', \\ \beta = & -c - d = & a' + b' = & -a'' + b'', \\ \gamma = & -a + b = & -c' - d' = & a'' + b'', \\ \delta = & a + b = & -a' + b' = & -c'' - d'', \\ & & & \\ \alpha' = & d - b = & d' - b' = & d'' - b'', \\ \beta' = & -d - b = & a' + c' = & -a'' + c'', \\ \gamma' = & -a + c = & -d' - b' = & a'' + c'', \\ \delta' = & a + c = & -a' + c' = & -d'' - b'', \\ & & & \\ \alpha'' = & b - c = & b' - c' = & b'' - c'', \\ \beta'' = & -b - c = & a' + d' = & -a'' + d'', \\ \gamma'' = & -a + d = & -b' - c' = & a'' + d'', \\ \delta'' = & a + d = & -a' + d' = & -b'' - c''. \end{array} \right.$$

Die so definirten zwölf Grössen $\alpha \ldots \delta''$ sind unter einander durch genau dieselben Gleichungen verbunden, wie die ursprünglichen Argumente $a \ldots d''$.

Es können also auch hier wieder irgend vier derselben Gruppe angehörige unter ihnen als unabhängige Parameter betrachtet werden.

Die in Rede stehende Umgestaltung vollzieht sich jetzt mit Hülfe von Formeln, die aus den Formeln des § 1 durch Specialisirung hervorgehen. Setzen wir nämlich dort zwei der Argumente a, b, c, d gleich Null, so ergeben sich die folgenden speciellen Additionstheoreme:

$$
(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&(e_\mu - e_\nu)\sigma_\lambda u\,\sigma_\lambda v + (e_\nu - e_\lambda)\sigma_\mu u\,\sigma_\mu v + (e_\lambda - e_\mu)\sigma_\nu u\,\sigma_\nu v\\
&\qquad = 2(e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu)\sigma^2\frac{u+v}{2}\,\sigma^2\frac{u-v}{2},\\
&-(e_\mu - e_\nu)\sigma_\lambda u\,\sigma_\lambda v + (e_\nu - e_\lambda)\sigma_\mu u\,\sigma_\mu v + (e_\lambda - e_\mu)\sigma_\nu u\,\sigma_\nu v\\
&\qquad = -2(e_\mu - e_\nu)\,\sigma_\lambda^2\frac{u+v}{2}\,\sigma_\lambda^2\frac{u-v}{2},\\
&\mp(e_\mu - e_\nu)\sigma u\,\sigma v + \sigma_\mu u\,\sigma_\mu v - \sigma_\nu u\,\sigma_\nu v\\
&\qquad = -2(e_\mu - e_\nu)\,\sigma^2\frac{u\pm v}{2}\,\sigma_\lambda^2\frac{u\mp v}{2},\\
&\mp(e_\mu - e_\nu)\sigma u\,\sigma v + \sigma_\mu u\,\sigma_\mu v + \sigma_\nu u\,\sigma_\nu v\\
&\qquad = 2\,\sigma_\mu^2\frac{u\pm v}{2}\,\sigma_\nu^2\frac{u\mp v}{2},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sigma u\,\sigma_\lambda v + \sigma_\lambda u\,\sigma v\\
&\qquad = 2\sigma\frac{u+v}{2}\,\sigma_\lambda\frac{u+v}{2}\,\sigma_\mu\frac{u-v}{2}\,\sigma_\nu\frac{u-v}{2},\\
&\sigma u\,\sigma_\lambda v - \sigma_\lambda u\,\sigma v\\
&\qquad = 2\sigma_\mu\frac{u+v}{2}\,\sigma_\nu\frac{u+v}{2}\,\sigma\frac{u-v}{2}\,\sigma_\lambda\frac{u-v}{2},\\
&\sigma_\mu u\,\sigma_\nu v + \sigma_\nu u\,\sigma_\mu v\\
&\qquad = 2\sigma_\mu\frac{u+v}{2}\,\sigma_\nu\frac{u+v}{2}\,\sigma_\mu\frac{u-v}{2}\,\sigma_\nu\frac{u-v}{2},\\
&\sigma_\mu u\,\sigma_\nu v - \sigma_\nu u\,\sigma_\mu v\\
&\qquad = -2(e_\mu - e_\nu)\sigma\frac{u+v}{2}\,\sigma_\lambda\frac{u+v}{2}\,\sigma\frac{u-v}{2}\,\sigma_\lambda\frac{u-v}{2}.
\end{aligned}\right.
$$

Um die mit Hülfe dieser Identitäten aus (1) abzuleitenden Ausdrücke der Substitutionscoefficienten bequem übersehen zu können, führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$
(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Pi_{0000} = \Theta'(0)^4 \,.\, \Theta\alpha\,\Theta\beta\,\Theta\gamma\,\Theta\delta\\
&= (e_\mu - e_\nu)^2(e_\nu - e_\lambda)^2(e_\lambda - e_\mu)^2 \,.\, \sigma\alpha\,\sigma\beta\,\sigma\gamma\,\sigma\delta,\\
&\Pi_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = \Theta_\lambda(0)^4 \,.\, \Theta_\lambda\alpha\,\Theta_\lambda\beta\,\Theta_\lambda\gamma\,\Theta_\lambda\delta\\
&= \quad = (e_\mu - e_\nu)^2 \,.\, \sigma_\lambda\alpha\,\sigma_\lambda\beta\,\sigma_\lambda\gamma\,\sigma_\lambda\delta,\\
&\Pi_{00\lambda\lambda} = \Theta_\mu(0)^2\Theta_\nu(0)^2 \,.\, \Theta\alpha\,\Theta\beta\,\Theta_\lambda\gamma\,\Theta_\lambda\delta\\
&= (e_\mu - e_\nu)\,(e_\nu - e_\lambda)\,(e_\lambda - e_\mu) \,.\, \sigma\alpha\,\sigma\beta\,\sigma_\lambda\gamma\,\sigma_\lambda\delta,\\
&\Pi_{\mu\mu\nu\nu} = \Theta_\mu(0)^2\Theta_\nu(0)^2 \,.\, \Theta_\mu\alpha\,\Theta_\mu\beta\,\Theta_\nu\gamma\,\Theta_\nu\delta\\
&= (e_\nu - e_\lambda)\,(e_\lambda - e_\mu) \,.\, \sigma_\mu\alpha\,\sigma_\mu\beta\,\sigma_\nu\gamma\,\sigma_\nu\delta,
\end{aligned}\right.
$$

u. s. w. Die Aufeinanderfolge der Indices, die dem Zeichen Π angehängt sind, deutet in jedem Falle die Reihenfolge der den Grössen α, β, γ, δ zuzuordnenden σ-Functionen an; Π'_{klmn} und Π''_{klmn} endlich sollen die Functionen bedeuten, die aus Π_{klmn} durch Substitution der Argumente α', β', γ', δ' und α'', β'', γ'', δ'' an Stelle von α, β, γ, δ hervorgehen.

Am übersichtlichsten gestaltet sich das Ergebniss der Rechnung im Falle

I.

Hier ergibt sich nämlich der Satz:

Die Ausdrücke

$$
(6,\,\mathrm{I})\quad\left\{\begin{array}{lll}
 & \Pi_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + \Pi_{\mu\mu\mu\mu} + \Pi_{\nu\nu\nu\nu}\,, & \\
\Pi_{\mu\mu\nu\nu} + \Pi_{\nu\nu\mu\mu}\,, & \Pi_{\lambda\mu\lambda\mu} + \Pi_{\mu\lambda\mu\lambda}\,, & \Pi_{\nu\lambda\lambda\nu} + \Pi_{\lambda\nu\nu\lambda}\,,\\
\Pi_{\lambda\mu\mu\lambda} + \Pi_{\mu\lambda\lambda\mu}\,, & \Pi_{\nu\nu\lambda\lambda} + \Pi_{\lambda\lambda\nu\nu}\,, & \Pi_{\mu\nu\mu\nu} + \Pi_{\nu\mu\nu\mu}\,,\\
\Pi_{\nu\lambda\nu\lambda} + \Pi_{\lambda\nu\lambda\nu}\,, & \Pi_{\mu\nu\nu\mu} + \Pi_{\nu\mu\mu\nu}\,, & \Pi_{\lambda\lambda\mu\mu} + \Pi_{\mu\mu\lambda\lambda}\,,
\end{array}\right.
$$

sind, in dieser Anordnung, gleich den Coefficienten a_{00}, a_{11}, a_{12}, ... a_{33} *der durch die Formeln* (1) *definirten orthogonalen Substitution.*

Sie ändern ihre Werthe nicht, wenn man die Producte Π_{klmn} *durch die Producte* Π'_{klmn} *oder durch die Producte* Π''_{klmn} *ersetzt.*

Die zweite Hälfte dieses Satzes ist natürlich eine Folge der in § 1 mitgetheilten Formeln JACOBI's. — Man bemerke, dass die Grössen a_{11} ... a_{33} (durch eine einfach-transitive Gruppe) in einander übergeführt werden, wenn man einmal die Indices λ, μ, ν, sodann die Argumente β, γ, δ cyclisch vertauscht.

II.

Es würde umständlich sein, wollten wir auch in den Fällen II und III die einzelnen Substitutionscoefficienten auf dem angegebenen Wege

unmittelbar bestimmen. Wir gelangen schneller zum Ziel, wenn wir uns erinnern, dass der Fall II aus I hervorgeht durch die auf die Argumente a, b, c, d auszuübende Substitution $(0,\ 0,\ \omega_\lambda,\ -\omega_\lambda)$. Diese Substitution zieht für unsere drei neuen Argumentreihen die folgenden Substitutionen nach sich:

$[2\omega_\lambda,\ 0,\ 0,\ 0]$, $[-\omega_\lambda,\ \omega_\lambda,\ \omega_\lambda,\ \omega_\lambda]$, $[-\omega_\lambda,\ -\omega_\lambda,\ -\omega_\lambda,\ -\omega_\lambda]$.

Durch dieselben Substitutionen muss auch die neu zu entwerfende Coefficiententafel aus (6, I) hervorgehen, abgesehen von einem Exponentialfactor, der für alle Elemente den nämlichen Werth $-(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu)e^{2\eta_\lambda(\alpha+\omega_\lambda)}$ hat.

Es entsteht also jetzt die Coefficiententafel

$$(6,\ \mathrm{II}):\qquad (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\left\{\begin{array}{ccc} & a_{00}, & \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{array}\right\} =$$

$$-\Pi_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + \Pi_{\mu\mu\mu\mu} + \Pi_{\nu\nu\nu\nu}$$
$$= \frac{-\Pi'_{0000} + (e_\lambda - e_\mu)^2\Pi'_{\mu\mu\mu\mu} + (e_\lambda - e_\nu)^2\Pi'_{\nu\nu\nu\nu}}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}$$
$$= \frac{\Pi''_{0000} + (e_\lambda - e_\mu)^2\Pi''_{\mu\mu\mu\mu} + (e_\lambda - e_\nu)^2\Pi''_{\nu\nu\nu\nu}}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)},$$

$$\begin{array}{rl|rl|rl}
 & \Pi_{\mu\mu\nu\nu} + \Pi_{\nu\nu\mu\mu} & & -\Pi_{\lambda\mu\lambda\mu} + \Pi_{\mu\lambda\mu\lambda} & & \Pi_{\nu\lambda\lambda\nu} - \Pi_{\lambda\nu\nu\lambda} \\
= & \Pi'_{\mu\mu\nu\nu} + \Pi'_{\nu\nu\mu\mu} & = & -\Pi'_{0\nu0\nu} + \Pi'_{\nu0\nu0} & = & -\Pi'_{\mu00\mu} + \Pi'_{0\mu\mu0} \\
= & \Pi''_{\mu\mu\nu\nu} + \Pi''_{\nu\nu\mu\mu}, & = & \Pi''_{0\nu0\nu} + \Pi''_{\nu0\nu0}, & = & -\Pi'_{\mu00\mu} - \Pi''_{0\mu\mu0}, \\
\hline
 & -\Pi_{\lambda\mu\mu\lambda} + \Pi_{\mu\lambda\lambda\mu} & & \Pi_{\nu\nu\lambda\lambda} - \Pi_{\lambda\lambda\nu\nu} & & \Pi_{\mu\nu\mu\nu} + \Pi_{\nu\mu\nu\mu} \\
= & -\Pi'_{0\nu\nu0} + \Pi'_{\nu00\nu} & = & -\Pi'_{\mu\mu00} + \Pi'_{00\mu\mu} & = & \Pi'_{\mu\nu\mu\nu} + \Pi'_{\nu\mu\nu\mu} \\
= & \Pi''_{0\nu\nu0} + \Pi''_{\nu00\nu}, & = & -\Pi''_{\mu\mu00} - \Pi''_{00\mu\mu}, & = & \Pi''_{\mu\nu\mu\nu} + \Pi''_{\nu\mu\nu\mu}, \\
\hline
 & \Pi_{\nu\lambda\nu\lambda} - \Pi_{\lambda\nu\lambda\nu} & & \Pi_{\mu\nu\nu\mu} + \Pi_{\nu\mu\mu\nu} & & -\Pi_{\lambda\lambda\mu\mu} + \Pi_{\mu\mu\lambda\lambda} \\
= & -\Pi'_{\mu0\mu0} + \Pi'_{0\mu0\mu} & = & \Pi'_{\mu\nu\nu\mu} + \Pi'_{\nu\mu\mu\nu} & = & -\Pi'_{00\nu\nu} + \Pi'_{\nu\nu00} \\
= & -\Pi''_{\mu0\mu0} - \Pi''_{0\mu0\mu}, & = & \Pi''_{\mu\nu\nu\mu} + \Pi''_{\nu\mu\mu\nu}, & = & \Pi''_{00\nu\nu} + \Pi''_{\nu\nu00}.
\end{array}$$

Den Werth von a_{00} schreibt man, um das Bildungsgesetz hervortreten zu lassen, besser ausführlich:

$$a_{00} =$$
$$= \frac{-(e_\mu - e_\nu)^2\sigma_\lambda\sigma_\lambda\sigma_\lambda\sigma_\lambda + (e_\lambda - e_\nu)^2\sigma_\mu\sigma_\mu\sigma_\mu\sigma_\mu + (e_\lambda - e_\mu)^2\sigma_\nu\sigma_\nu\sigma_\nu\sigma_\nu}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}$$
$$= -(e_\mu - e_\nu)^2\sigma\alpha'\sigma\beta'\sigma\gamma'\sigma\delta' + \sigma_\mu\alpha'\sigma_\mu\beta'\sigma_\mu\gamma'\sigma_\mu\delta' + \sigma_\nu\alpha'\sigma_\nu\beta'\sigma_\nu\gamma'\sigma_\nu\delta'$$
$$= (e_\mu - e_\nu)^2\sigma\alpha''\sigma\beta''\sigma\gamma''\sigma\delta'' + \sigma_\mu\alpha''\sigma_\mu\beta''\sigma_\mu\gamma''\sigma_\mu\delta'' + \sigma_\nu\alpha''\sigma_\nu\beta''\sigma_\nu\gamma''\sigma_\nu\delta''.$$

Der den sämmtlichen Grössen a_α in (6, II) gemeinsame Nenner fällt heraus, oder genauer, er geht in den Factor -1 über, wenn man in den Definitionsgleichungen der Grössen $\mathfrak{x}_i$ (6, II, S. 195) rechter Hand den allen gemeinsamen Nenner unterdrückt, und statt der σ-Functionen die Θ-Functionen benutzt.

III.

Die auf die Grössen a, b, c, d auszuübende Substitution $(0, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu)$ zieht für die neuen Argumente die folgenden Substitutionen nach sich:

$$[\omega_\lambda + 2\omega_\mu, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda], \quad [\omega_\mu + 2\omega_\nu, \omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu], \quad [\omega_\nu + 2\omega_\lambda, \omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu].$$

Man erhält jetzt, durch eine ähnliche Rechnung wie vorhin, die Coefficiententafel

$$(6, \text{III}): \; -(e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu) \left\{ \begin{array}{ccc} & a_{00}, & \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{\Pi_{0000} + (e_\lambda - e_\mu)^2 \Pi_{\mu\mu\mu\mu} - (e_\lambda - e_\nu)^2 \Pi_{\nu\nu\nu\nu}}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}$$

$$= -\frac{\Pi'_{0000} + (e_\mu - e_\nu)^2 \Pi'_{\nu\nu\nu\nu} - (e_\mu - e_\lambda)^2 \Pi'_{\lambda\lambda\lambda\lambda}}{(e_\mu - e_\nu)(e_\mu - e_\lambda)}$$

$$= -\frac{\Pi''_{0000} + (e_\nu - e_\lambda)^2 \Pi''_{\lambda\lambda\lambda\lambda} - (e_\nu - e_\mu)^2 \Pi''_{\mu\mu\mu\mu}}{(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu)},$$

$$\begin{array}{ll|ll|ll}
 & \Pi_{\nu\nu\mu\mu} - \Pi_{\mu\mu\nu\nu} & & -\Pi_{0\nu0\nu} + \Pi_{\nu0\nu0} & & \Pi_{\mu00\mu} + \Pi_{0\mu\mu0} \\
= & -\Pi'_{00\lambda\lambda} + \Pi'_{\lambda\lambda00} & = & \Pi'_{\nu0\nu0} + \Pi'_{0\nu0\nu} & = & \Pi'_{\lambda\nu\nu\lambda} - \Pi'_{\nu\lambda\lambda\nu} \\
= & \Pi''_{\lambda\lambda00} + \Pi''_{00\lambda\lambda}, & = & \Pi''_{\mu\lambda\mu\lambda} - \Pi''_{\lambda\mu\lambda\mu}, & = & -\Pi''_{0\mu\mu0} + \Pi''_{\mu00\mu}, \\
\hline
 & -\Pi_{0\nu\nu0} + \Pi_{\nu00\nu} & & \Pi_{\mu\mu00} + \Pi_{00\mu\mu} & & \Pi_{\nu\mu\nu\mu} - \Pi_{\mu\nu\mu\nu} \\
= & \Pi'_{\nu00\nu} + \Pi'_{0\nu\nu0} & = & \Pi'_{\lambda\lambda\nu\nu} - \Pi'_{\nu\nu\lambda\lambda} & = & -\Pi'_{0\lambda0\lambda} + \Pi'_{\lambda0\lambda0} \\
= & \Pi''_{\mu\lambda\mu\lambda} - \Pi''_{\lambda\mu\lambda\mu}, & = & -\Pi''_{00\mu\mu} + \Pi''_{\mu\mu00}, & = & \Pi''_{\lambda0\lambda0} + \Pi''_{0\lambda0\lambda}, \\
\hline
 & \Pi_{\mu0\mu0} + \Pi_{0\mu0\mu} & & \Pi_{\nu\mu\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu\nu\mu} & & -\Pi_{00\nu\nu} + \Pi_{\nu\nu00} \\
= & \Pi'_{\lambda\nu\lambda\nu} - \Pi'_{\nu\lambda\nu\lambda} & = & -\Pi'_{0\lambda\lambda0} + \Pi'_{\lambda00\lambda} & = & \Pi'_{\nu\nu00} + \Pi'_{00\nu\nu} \\
= & -\Pi''_{0\mu0\mu} + \Pi''_{\mu0\mu0}, & = & \Pi''_{\lambda00\lambda} + \Pi''_{0\lambda\lambda0}, & = & \Pi''_{\mu\mu\lambda\lambda} - \Pi''_{\lambda\lambda\mu\mu}.
\end{array}$$

Hierzu ist Aehnliches zu bemerken, wie zu den Formeln unter II. Der Coefficient a_{00} lautet ausgeschrieben:

$$a_{00} =$$
$$-\frac{1}{e_\mu - e_\nu}\left\{(e_\mu - e_\nu)^2 \sigma\sigma\sigma\sigma + \sigma_\mu\sigma_\mu\sigma_\mu\sigma_\mu - \sigma_\nu\sigma_\nu\sigma_\nu\sigma_\nu\right\}$$
$$= -\frac{1}{e_\nu - e_\lambda}\left\{(e_\nu - e_\lambda)^2 \sigma\sigma\sigma\sigma + \sigma_\nu\sigma_\nu\sigma_\nu\sigma_\nu - \sigma_\lambda\sigma_\lambda\sigma_\lambda\sigma_\lambda\right\}'$$
$$= -\frac{1}{e_\lambda - e_\mu}\left\{(e_\lambda - e_\mu)^2 \sigma\sigma\sigma\sigma + \sigma_\lambda\sigma_\lambda\sigma_\lambda\sigma_\lambda - \sigma_\mu\sigma_\mu\sigma_\mu\sigma_\mu\right\}''.$$

Mit den aufgezählten 16 Fällen sind die verschiedenen sich darbietenden Möglichkeiten, aus linearen Verbindungen der Grössen $\Pi_{\varkappa lmn}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution zusammenzusetzen, noch nicht erschöpft. Es geht nämlich aus den Formeln (6, I) eine ähnliche Coefficiententafel überhaupt immer dann hervor, wenn man die Grössen α, β, γ, δ einer Substitution der Gruppe Γ unterwirft, die aus der in § 1 (S. 193, 194) definirten Gruppe durch Vertauschung der Grössen a, b, c, d mit den Grössen α, β, γ, δ entspringt. Die Zahl der wesentlich verschiedenen Substitutionen dieser Gruppe ist, wie gesagt, 256. *Es gibt also 256 verschiedene Coefficiententafeln der angegebenen Art.*

Eine Uebersicht über die Gesammtheit dieser Formeln erhält man, wenn man die Gruppe Γ oder $\Gamma_{(256)}$ wieder in zwei Untergruppen von je 16 Substitutionen zerlegt. Der Identität sind zuzuordnen die Aenderung einer der Grössen α, β, γ, δ um $4\omega_\lambda$ oder zweier dieser Grössen um dasselbe Vielfache von $2\omega_\lambda$. Als Erzeugende der ersten Untergruppe können dann gelten die auf α, β, γ, δ auszuführenden Substitutionen $[2\omega_\lambda, 0, 0, 0]$, $[\omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda]$ u. s. w.; als Erzeugende der zweiten Untergruppe die Substitutionen, bei denen α ungeändert bleibt, während β, γ, δ um solche halbe Perioden wachsen, deren Summe gleich Null ist.

Die erste Untergruppe führt zu den bereits aufgestellten Formeln; durch die zweite gehen aus jeder von diesen noch 15 weitere Coefficiententafeln hervor.

In jeder der 16 Reihen von je 16 orthogonalen Substitutionen, die auf solche Art entstehen, gruppiren sich die einzelnen Glieder wieder nach dem Schema 1 + 9 + 6. Das erste, für sich allein stehende, unter einer der Formen I ... III begriffene Glied ist in doppelter Hinsicht ausgezeichnet. Erstens algebraisch dadurch, dass in ihm die Differenzen der Grössen e_λ, e_μ, e_ν *rational* vorkommen,

während die übrigen 15 Coefficiententafeln die Quadratwurzeln jener Differenzen enthalten; zweitens, im Zusammenhange hiermit, durch die besonders einfache Vertheilung der zehn Substitutionscoefficienten auf die in § 1 aufgestellten Formelfamilien (in denen wir uns jetzt die Grössen a, b, c, d durch die Grössen α, β, γ, δ ersetzt denken wollen). Es ist nämlich in den Fällen I... III, nicht aber in den übrigen 240 Fällen, immer der erste Coefficient a_{00} der ersten Familie (I) entnommen, und die übrigen neun Coefficienten vertheilen sich auf die neun Familien des Typus (II); die sechs Familien des Typus (III) kommen in diesen Tafeln überhaupt nicht vor[1]).

Es ist nicht unsere Absicht, diesen Gegenstand, der mit der Theorie der den Periodenvierteln entsprechenden Functionen σ_α nahe zusammenhängt, im Einzelnen zu erörtern; doch werden wir später (in § 5) wenigstens in einem Specialfalle die 16 orthogonalen Substitutionen wirklich aufstellen, die aus einem Coefficientensystem des Typus III entspringen. —

Wir haben die in diesem Paragraphen mitgetheilten Sätze aus den Additionstheoremen JACOBI's hergeleitet. Es ist daher wohl nicht überflüssig, ausdrücklich darauf hinzuweisen, dass das Ergebniss einen ganz anderen Charakter hat, als jene Formeln. Sieht man nämlich von der zweiten Hälfte etwa des unter I ausgesprochenen Theorems ab, die, wie gesagt, den JACOBI'schen Sätzen gegenüber nichts Neues bietet, so gehört der übrig bleibende Satz eigentlich gar nicht der Theorie der elliptischen Functionen, sondern der *Algebra* an: Die Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten a_{ik} sind

---

1) Für den mit der Theorie der hyperelliptischen Functionen bekannten Leser braucht nur kurz angedeutet zu werden, wie man die Gruppirung der 256 Formelsysteme durch eine doppelte Charakteristikenbezeichnung darstellen kann. Das einzelne System wird bezeichnet durch eine Haupt- und eine Nebencharakteristik. Die Hauptcharakteristiken unterscheiden die 16 Reihen, die aus den Tafeln I... III entspringen. Die erste Reihe erhält die Charakteristik (135) = (246), die aus II hervorgehenden Reihen werden den neun übrigen geraden Charakteristiken, die aus III entspringenden Reihen den ungeraden Charakteristiken (1)... (6) zugeordnet. In jeder Reihe erhält das erste, ausgezeichnete Glied die Nebencharakteristik (135) = (246), u. s. w. — In gleicher Weise hätten wir auch schon die 256 WEIERSTRASS'schen Additionstheoreme bezeichnen können. —

Dem Umstande entsprechend, dass eine gerade Charakteristik ausgezeichnet ist, verwendet man übrigens hier besser eine Bezeichnung durch zweimal zwei Indices (Sächs. Ber. 1892, S. 161).

algebraische Folgen der zwischen den Quadraten der σ-Functionen bestehenden linearen Gleichungen. —

In den beiden folgenden Paragraphen beschäftigen wir uns mit einem Specialfall der in den §§ 1 ... 3 entwickelten Theorie, der in mehrfacher Hinsicht ein besonderes Interesse beanspruchen darf. Um eine einfache und zusammenhängende Darstellung zu erzielen, werden wir dabei die Ergebnisse der §§ 2 und 3 nicht voraussetzen, sondern wir wollen unmittelbar an die Formeln des § 1 anknüpfen.

§ 4.

Die desmische Fläche vierter Ordnung.

Halten wir in den Formeln des § 1 die Perioden 2ω und $2\omega'$ fest, und betrachten wir nur die Grössen a, b, c, d als veränderlich, so können wir durch diese Formeln jeden Raumpunkt darstellen, und zwar noch auf ∞^1 verschiedene Weisen. Dagegen erhalten wir nur Punkte einer *Fläche*, wenn wir etwa b, c und d einander gleich setzen. Wir werden von den drei wesentlich verschiedenen Flächen, die aus den Annahmen I, II und III hervorgehen, hier nur die letzte und einfachste behandeln, in dem Umfange, wie es für unseren augenblicklichen Zweck wünschenswerth ist; erwähnt mag jedoch werden, dass die in den Fällen I und II entstehenden Flächen von der *zwölften* Ordnung sind, und dass die Fläche I dualistisch ist zu der Fläche III.

Um die durch die genannte Annahme hervorgerufene Specialisirung der coordinirten Parametersysteme in symmetrischer Weise darzustellen, führen wir sechs neue Zeichen s_i, t_i ein[1]), Grössen, die durch die folgenden Gleichungen verbunden sind:

$$(1)\quad \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 0\,, \\ t_1 = s_2 - s_3\,, \quad t_2 = s_3 - s_1\,, \quad t_3 = s_1 - s_2\,. \end{cases}$$

Die zwischen den Grössen a, b, .. u. s. w. bestehenden Gleichungen werden nun befriedigt durch die Annahme

1) Es wird wohl kein Missverständniss dadurch verursacht werden, dass im ersten und zweiten Abschnitt die Bezeichnungen s_i in einem anderen Sinne verwendet worden sind.

$$(2)\begin{cases} a = t_1, & b = c = d = s_1, & \alpha = 0, & \beta = \beta' = \beta'' = -2s_1, \\ a' = t_2, & b' = c' = d' = s_2, & \alpha' = 0, & \gamma = \gamma' = \gamma'' = -2s_2, \\ a'' = t_3, & b'' = c'' = d'' = s_3, & \alpha'' = 0, & \delta = \delta' = \delta'' = -2s_3. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6, III) des § 1 gehen jetzt über in die folgenden:

$$(3)\begin{cases} 2\mathfrak{x}_0 = \sigma(2s_1)\dfrac{\sigma t_1}{\sigma s_1}, & 2\mathfrak{y}_0 = \sigma(2s_2)\dfrac{\sigma t_2}{\sigma s_2}, & 2\mathfrak{z}_0 = \sigma(2s_3)\dfrac{\sigma t_3}{\sigma s_3}, \\ 2\mathfrak{x}_1 = \sigma(2s_1)\dfrac{\sigma_\lambda t_1}{\sigma_\lambda s_1}, & 2\mathfrak{y}_1 = \sigma(2s_2)\dfrac{\sigma_\lambda t_2}{\sigma_\lambda s_2}, & 2\mathfrak{z}_1 = \sigma(2s_3)\dfrac{\sigma_\lambda t_3}{\sigma_\lambda s_3}, \\ 2\mathfrak{x}_2 = \sigma(2s_1)\dfrac{\sigma_\mu t_1}{\sigma_\mu s_1}, & 2\mathfrak{y}_2 = \sigma(2s_2)\dfrac{\sigma_\mu t_2}{\sigma_\mu s_2}, & 2\mathfrak{z}_2 = \sigma(2s_3)\dfrac{\sigma_\mu t_3}{\sigma_\mu s_3}, \\ 2\mathfrak{x}_3 = \sigma(2s_1)\dfrac{\sigma_\nu t_1}{\sigma_\nu s_1}, & 2\mathfrak{y}_3 = \sigma(2s_2)\dfrac{\sigma_\nu t_2}{\sigma_\nu s_2}, & 2\mathfrak{z}_3 = \sigma(2s_3)\dfrac{\sigma_\nu t_3}{\sigma_\nu s_3}. \end{cases}$$

Zwischen diesen Grössen bestehen nach wie vor die Gleichungen (7), (8), (9) des § 1. Wir wollen sie, *abweichend von der bisher festgehaltenen Annahme*, dadurch in Beziehung zu den Untersuchungen des zweiten Abschnittes setzen, dass wir sie den drei Tetraedern der *zweiten* Reihe zuordnen (II, § 8). Die zu den Tetraedern der »ersten« Reihe gehörigen Coordinaten mögen mit x_i, y_i, z_i bezeichnet, und so gewählt werden, dass zwischen ihnen wieder dieselben linearen Gleichungen bestehen, die zwischen den Grössen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ stattfinden. Dies erreichen wir durch den Ansatz (vgl. § 3, Nr. 2):

$$(4)\begin{cases} \mathfrak{x}_0 = x_2 - x_3 = y_2 - y_3 = z_2 - z_3, \\ \mathfrak{x}_1 = -x_2 - x_3 = y_0 + y_1 = -z_0 + z_1, \\ \mathfrak{x}_2 = -x_0 + x_1 = -y_2 - y_3 = z_0 + z_1, \\ \mathfrak{x}_3 = x_0 + x_1 = -y_0 + y_1 = -z_2 - z_3, \\[1ex] \mathfrak{y}_0 = x_3 - x_1 = y_3 - y_1 = z_3 - z_1, \\ \mathfrak{y}_1 = -x_3 - x_1 = y_0 + y_2 = -z_0 + z_2, \\ \mathfrak{y}_2 = -x_0 + x_2 = -y_3 - y_1 = z_0 + z_2, \\ \mathfrak{y}_3 = x_0 + x_2 = -y_0 + y_2 = -z_3 - z_1, \\[1ex] \mathfrak{z}_0 = x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2, \\ \mathfrak{z}_1 = -x_1 - x_2 = y_0 + y_3 = -z_0 + z_3, \\ \mathfrak{z}_2 = -x_0 + x_3 = -y_1 - y_2 = z_0 + z_3, \\ \mathfrak{z}_3 = x_0 + x_3 = -y_0 + y_3 = -z_1 - z_2. \end{cases}$$

Die so definirten Grössen x_i, y_i, z_i werden nun ebenfalls ganz einfache Producte von σ-Functionen. Mit Hülfe der Formeln (4) in § 3 (S. 204) findet man nach kurzer Rechnung:

$$
(6)\quad \begin{cases}
x_0 = -(e_\mu - e_\nu)\, \sigma s_1\, \sigma_\lambda s_1 . \sigma s_2\, \sigma_\lambda s_2 . \sigma s_3\, \sigma_\lambda s_3, \\
x_1 = \sigma s_1\, \sigma_\lambda s_1 . \sigma_\mu s_2 \sigma_\nu s_2 . \sigma_\mu s_3 \sigma_\nu s_3, \\
x_2 = \sigma_\mu s_1 \sigma_\nu s_1 . \sigma s_2\, \sigma_\lambda s_2 . \sigma_\mu s_3 \sigma_\nu s_3, \\
x_3 = \sigma_\mu s_1 \sigma_\nu s_1 . \sigma_\mu s_2 \sigma_\nu s_2 . \sigma s_3\, \sigma_\lambda s_3, \\[1ex]
y_0 = -(e_\nu - e_\lambda)\, \sigma s_1\, \sigma_\mu s_1 . \sigma s_2\, \sigma_\mu s_2 . \sigma s_3\, \sigma_\mu s_3, \\
y_1 = \sigma s_1\, \sigma_\mu s_1 . \sigma_\nu s_2 \sigma_\lambda s_2 . \sigma_\nu s_3 \sigma_\lambda s_3, \\
y_2 = \sigma_\nu s_1 \sigma_\lambda s_1 . \sigma s_2\, \sigma_\mu s_2 . \sigma_\nu s_3 \sigma_\lambda s_3, \\
y_3 = \sigma_\nu s_1 \sigma_\lambda s_1 . \sigma_\nu s_2 \sigma_\lambda s_2 . \sigma s_3\, \sigma_\mu s_3, \\[1ex]
z_0 = -(e_\lambda - e_\mu)\, \sigma s_1\, \sigma_\nu s_1 . \sigma s_2\, \sigma_\nu s_2 . \sigma s_3\, \sigma_\nu s_3, \\
z_1 = \sigma s_1\, \sigma_\nu s_1 . \sigma_\lambda s_2 \sigma_\mu s_2 . \sigma_\lambda s_3 \sigma_\mu s_3, \\
z_2 = \sigma_\lambda s_1 \sigma_\mu s_1 . \sigma s_2\, \sigma_\nu s_2 . \sigma_\lambda s_3 \sigma_\mu s_3, \\
z_3 = \sigma_\lambda s_1 \sigma_\mu s_1 . \sigma_\lambda s_2 \sigma_\mu s_2 . \sigma s_3\, \sigma_\nu s_3 .
\end{cases}
$$

Aus den 16 dreigliedrigen linearen Gleichungen, die zwischen diesen 12 Grössen bestehen, hebt sich jedesmal das Product von drei σ-Functionen heraus. Man gelangt so zu den folgenden, unter der Voraussetzung $u + v + w = 0$ bestehenden Additionstheoremen

$$(7)\quad (e_\mu - e_\nu)\sigma_\lambda u \sigma_\lambda v \sigma_\lambda w + (e_\nu - e_\lambda)\sigma_\mu u \sigma_\mu v \sigma_\mu w + (e_\lambda - e_\mu)\sigma_\nu u \sigma_\nu v \sigma_\nu w = 0,$$

$$(8)\quad \sigma_\mu u \sigma_\nu v \sigma_\nu w - \sigma_\nu u \sigma_\mu v \sigma_\mu w + (e_\mu - e_\nu)\sigma_\lambda u \sigma v\, \sigma w = 0,$$

$$(9)\quad \sigma u\, \sigma_\mu v \sigma_\nu w + \sigma_\mu u \sigma v\, \sigma_\lambda w + \sigma_\nu u \sigma_\lambda v \sigma w = 0,$$

von denen wiederum das erste *eine*, das zweite *neun* und das dritte *sechs* verschiedene Formeln umfasst. Wir haben diese Formeln (7), (8), (9) hier mit abgeänderter Bezeichnung der Argumente angeführt, weil wir sie später gebrauchen werden. Uebrigens können sie aus den Additionstheoremen des § 1 auch unmittelbar durch geeignete Specialisirungen der Parameter a, b, c, d hergeleitet werden.

Die Darstellung der Grössen x_i, y_i, z_i durch die Formeln (6) liefert ohne Weiteres die *Gleichung* unserer Fläche. Setzen wir zur Abkürzung

$$(10)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\, \sigma(2s_1)\, \sigma(2s_2)\, \sigma(2s_3),$$

so ergibt sich

$$(11)\quad 4\varrho \,.\, x_2 x_3 = \frac{\sigma_\mu s_1 \sigma_\nu s_1}{\sigma s_1\, \sigma_\lambda s_1}, \quad 4\varrho \,.\, x_0 x_1 = -(e_\mu - e_\nu)\, \frac{\sigma s_1\, \sigma_\lambda s_1}{\sigma_\mu s_1\, \sigma_\nu s_1}.$$

Die nicht hingeschriebenen Ausdrücke der übrigen Producte $x_i x_k$ gehen hieraus durch cyclische Vertauschung von 1, 2, 3 hervor;

ebenso ergeben sich die entsprechenden Producte $y_\iota y_\varkappa$ und $z_\iota z_\varkappa$, wenn man λ, μ, ν durch μ, ν, λ und ν, λ, μ ersetzt. Aus (11) folgt nun

$$
(12) \qquad \begin{cases} 16\varrho^2 \,.\, x_0 x_1 x_2 x_3 = -(e_\mu - e_\nu)\,, \\ 16\varrho^2 \,.\, y_0 y_1 y_2 y_3 = -(e_\nu - e_\lambda)\,, \\ 16\varrho^2 \,.\, z_0 z_1 z_2 z_3 = -(e_\lambda - e_\mu)\,, \end{cases}
$$

d. h., es besteht neben der Identität

$$
(13) \qquad x_0 x_1 x_2 x_3 + y_0 y_1 y_2 y_3 + z_0 z_1 z_2 z_3 = 0
$$

(vgl. Nr. 5, S. 141) noch die identische Gleichung

$$
(14) \qquad e_\lambda \,.\, x_0 x_1 x_2 x_3 + e_\mu \,.\, y_0 y_1 y_2 y_3 + e_\nu \,.\, z_0 z_1 z_2 z_3 = 0\,,
$$

die keine Folge der linearen Gleichungen (7), (8), (9) des § 1 ist, und (so lange die Grösse G (S. 191, Nr. 7) nicht verschwindet) die Punkte einer irreduciblen Fläche des Raumes definirt. Es ist dies die aus den Untersuchungen mehrerer Geometer bekannte sogenannte *desmische Fläche* vierter Ordnung, zwölfter Classe, die Reciproke der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche zweiten Grades[1]) (der zu Eingang des § erwähnten Fläche I).

Es ist hier nicht der geeignete Ort für eine eingehende Untersuchung dieser merkwürdigen Fläche 4. O. Immerhin wird es nützlich sein, ihre Darstellung durch die Parameter s_1, s_2, s_3 noch durch wenige Worte zu erläutern.

Die Fläche (14) gehört einem ganzen Büschel von desmischen Flächen 4. O. an, einem Flächenbüschel, dessen Besonderheit darin besteht, dass es drei in Ebenenquadrupel zerfallende Flächen enthält. Die Fläche enthält daher 16 gerade Linien, die Schnittlinien von je drei Tetraederflächen (II. Abschn. § 8). Die zwölf Schnittpunkte dieser Geraden, die Ecken der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe, sind *Knotenpunkte* unserer Fläche. Zu ihnen gehören unbestimmte Werthe der Parameter s_1, s_2, s_3. Es werden nämlich die

---

1) Stahl, Crelle's Journal Bd. 101, S. 78 (1887); Wälsch, Acta Leopoldina 1888. Humbert, Journal de Mathématiques 1891 p. 353. Von diesen sehr interessanten Abhandlungen enthält die zuletzt genannte die Parameterdarstellung:

$$
\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \frac{\mathfrak{S}\,t}{\mathfrak{S}\,s} : \frac{\mathfrak{S}_1 t}{\mathfrak{S}_1 s} : \frac{\mathfrak{S}_2 t}{\mathfrak{S}_2 s} : \frac{\mathfrak{S}_3 t}{\mathfrak{S}_3 s}\,.
$$

Herr Humbert hat allein auf diese Formel, mit grossem geometrischem Geschick, eine umfassende Theorie der Fläche gegründet.

Ecken des $\mathfrak{x}$-Tetraeders erhalten, wenn wir, unter $\bar{\omega}$ eine halbe Periode verstehend, der Reihe nach

$$\begin{matrix} s_1 \equiv 2\bar{\omega} & s_1 \equiv 2\bar{\omega} + \omega_\lambda, \\ s_1 \equiv 2\bar{\omega} + \omega_\mu, & s_1 \equiv 2\bar{\omega} + \omega_\nu \end{matrix} \quad (\text{modd. } 4\omega,\ 4\omega')$$

setzen, bei unbestimmt gelassenen Werthen von t_1. Im ersten Falle $s_1 \equiv 2\bar{\omega}$ z. B. entspricht den modd. 4ω, $4\omega'$ verschiedenen, in der Form $\pm t_1 + 2\bar{\omega}$ enthaltenen Werthsystemen je eine (von der Wahl des Vorzeichens unabhängige) Fortschreitungsrichtung durch den Doppelpunkt $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_3 = 0$; den vier Geraden durch den Doppelpunkt, längs deren die Fläche von dem Tangentialkegel des Doppelpunktes berührt wird, entsprechen insbesondere die Parametersysteme

$$t_1 \equiv 2\bar{\omega},\ 2\bar{\omega} + 2\omega_\lambda,\ 2\bar{\omega} + 2\omega_\mu,\ 2\bar{\omega} + 2\omega_\nu\ (\text{modd. } 4\omega,\ 4\omega').$$

Den ∞^1 Punkten der 16 auf der Fläche verlaufenden geraden Linien entsprechen also nur discrete Werthsysteme der Parameter s_1, s_2, s_3: Systeme von drei halben Perioden, deren Summe gleich Null ist.

Nimmt man diesen Fall aus, so entspricht jedem System von drei Grössen s_1, s_2, s_3, deren Summe den Werth Null hat, ein bestimmter Flächenpunkt.

Umgekehrt entspricht vermöge der Formeln (2) und (3) einem gegebenen Flächenpunkt (abgesehen von den Knotenpunkten) ein »bestimmtes« Parametersystem, sofern man die folgenden Substitutionen als von der Identität nicht verschieden betrachtet:

1) Die Vermehrung von s_1, s_2, s_3 um solche Vielfache $2\bar{\omega}$ einfacher Perioden, deren Summe $= 0$ ist,

2) Den gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller drei Grössen s_1, s_2, s_3.[1])

Besondere Aufmerksamkeit zieht das Coordinatensystem auf unserer Fläche auf sich, das von den Curven $s_i =$ const., $t_i =$ const. gebildet wird. Wir würden uns indessen zu weit von unserem eigent-

1) Definirt man die desmische Fläche nicht durch die Formeln (3), sondern etwa durch das erste der drei Formelsysteme (6), so kann man an Stelle der Gleichung $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ die Congruenz $s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0$ (mod. 2ω, $2\omega'$) setzen. Man hat dann eine umfassendere Gruppe von Aenderungen der identischen Substitution zuzuordnen. Hierdurch wird aber der einfache Zusammenhang zwischen den Grössen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$, x_i, y_i, s_i zerstört. Es ist daher zweckmässiger, nur solche Systeme von drei Parametern zu benutzen, deren Summe *gleich* Null ist.

lichen Gegenstande entfernen, wollten wir den merkwürdigen Eigenschaften dieser Curven eine eingehende Untersuchung widmen. Wir haben dazu um so weniger Veranlassung, als Herr Humbert bereits, auf ähnlicher Grundlage, eine solche Untersuchung geliefert hat, auf die wir hier verweisen können. Bemerkt sei jedoch, dass die von Herrn Humbert geführten Beweise sich zum Theil beträchtlich abkürzen lassen. Herrn Humbert ist nämlich der durch den Jacobi'schen Fundamentalsatz gegebene Zusammenhang zwischen den drei Parameterdarstellungen (3) entgangen; er musste daher die von ihm gefundenen schönen Sätze auf eine umständlichere Weise begründen, als es mit den uns zu Gebote stehenden Hülfsmitteln möglich ist. —

Geht man zur Grenze $e_\mu - e_\lambda = 0$ über, so verwandelt sich das Büschel von desmischen Flächen 4. O. in das Flächenbüschel

$$\overline{Z}_0\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3 - 4c^2\,\overline{Y}_0\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Y}_3 = 0, \tag{15}$$

wobei die Grössen $\overline{Z}_i$, $\overline{Y}_i$ die in § 14 des II. Abschnittes (S. 180) erklärte Bedeutung haben. Ersetzen wir im Grenzfall gleichzeitig s_1, s_2, s_3 durch $\frac{\bar{\alpha}_1}{2}, \frac{\bar{\alpha}_2}{2}, \frac{\bar{\alpha}_3}{2} - \pi$, so tritt an Stelle der entwickelten Formeln das Formelsystem (vgl. II, § 14):

$$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3 = 2\pi, \quad \bar{a}_i = 2c \sin \bar{\alpha}_i, \tag{16}$$

$$\overline{Z}_0 = c^2 \sin\bar{\alpha}_1 \sin\bar{\alpha}_2 \sin\bar{\alpha}_3, \quad \overline{Z}_i = \sin\bar{\alpha}_i \; (i = 1, 2, 3), \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} \overline{Y}_0 &= 2\sin\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\cdot\sin\frac{\bar{\alpha}_2}{2}\cdot\sin\frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \overline{Y}_1 &= 2\sin\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\cdot\cos\frac{\bar{\alpha}_2}{2}\cdot\cos\frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \overline{Y}_2 &= 2\cos\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\cdot\sin\frac{\bar{\alpha}_2}{2}\cdot\cos\frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \overline{Y}_3 &= 2\cos\frac{\bar{\alpha}_1}{2}\cdot\cos\frac{\bar{\alpha}_2}{2}\cdot\sin\frac{\bar{\alpha}_3}{2}\,{}^{1)}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Der Parameter c^2 ist für die einzelne Fläche 4. O. nicht wesentlich im Sinne der projectiven Geometrie. Jede dieser Flächen hat im Anfangspunkt der Coordinaten $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3 = 0$ einen dreifachen (sogenannten triplanaren) Punkt; ausserdem hat sie sechs Doppelpunkte $\overline{Z}_0 = 0$, $\overline{Y}_i = 0$, $\overline{Y}_\varkappa = 0$ im Unendlichen. (Vgl. die

1) Die Formeln (17) sind schon von Herrn Humbert angegeben worden.

Fig. 16, S. 184.) Sie enthält noch zehn gerade Linien, nämlich die vier Geraden $\overline{Z}_0 = 0$, $\overline{Y}_\iota = 0$, und die sechs Geraden $\overline{Y}_\iota = 0$, $\overline{Y}_\varkappa = 0$, von denen jede zwei Geraden der allgemeinen desmischen Fläche 4. O. entspricht. Die Doppelpunktsparameter sind die Vielfachen von π; der dreifache Punkt entspricht dem Parameterwerth ∞.

Die Fläche geht durch eine (imaginäre) dualistische Transformation über in die *Krümmungsmittelpunktsfläche eines Paraboloids*. (Vgl. SALMON-FIEDLER, Geometrie des Raumes, 3. Aufl., Bd. II, S. 345.)

§ 5.

Orthogonale Substitutionen und sphärische Dreiecke, die mit der desmischen Fläche vierter Ordnung verknüpft sind.

Wir bringen jetzt die Betrachtungen des § 4 mit der im II. Abschnitt durchgeführten Untersuchung in engeren Zusammenhang, indem wir, festhaltend an der bereits in § 4 eingeführten Vorstellungsweise (also abweichend von dem in § 3 beobachteten Verfahren) die Grössen X, Y, Z in folgender Weise durch die Grössen x, y, z ausdrücken:

$$(1)\begin{cases} X_0 = \sqrt{\varrho}\cdot x_0, & X_1 = \sqrt{\varrho}\cdot x_1, & X_2 = \sqrt{\varrho}\cdot x_2, & X_3 = \sqrt{\varrho}\cdot x_3, \\ Y_0 = -\sqrt{\varrho}\cdot y_0, & Y_1 = \sqrt{\varrho}\cdot y_1, & Y_2 = \sqrt{\varrho}\cdot y_2, & Y_3 = \sqrt{\varrho}\cdot y_3, \\ Z_0 = -\sqrt{\varrho}\cdot z_0, & Z_1 = -\sqrt{\varrho}\cdot z_1, & Z_2 = -\sqrt{\varrho}\cdot z_2, & Z_3 = -\sqrt{\varrho}\cdot z_3. \end{cases}$$

Setzen wir nun in den Formeln (4) des § 3 $v = 0$, so folgt:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_\mu u\,\sigma_\nu u}{\sigma u\,\sigma_\lambda u} = \dfrac{\sigma_\mu(2u) + \sigma_\nu(2u)}{\sigma(2u)}, \\ -(e_\mu - e_\nu)\dfrac{\sigma u\,\sigma_\lambda u}{\sigma_\mu u\,\sigma_\nu u} = \dfrac{\sigma_\mu(2u) - \sigma_\nu(2u)}{\sigma(2u)}. \end{cases}$$

Führen wir diese Werthe in die Formeln (6) des § 4 ein, so gelangen wir zu den folgenden Ausdrücken der Coefficienten $a_{11} \ldots a_{33}$ (vgl. II, § 5, S. 142):

$$(3,\text{I})\qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \Bigg\} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_\lambda(2s_1)}{\sigma(2s_1)} & \dfrac{\sigma_\mu(2s_3)}{\sigma(2s_3)} & \dfrac{\sigma_\nu(2s_2)}{\sigma(2s_2)} \\ \dfrac{\sigma_\nu(2s_3)}{\sigma(2s_3)} & \dfrac{\sigma_\lambda(2s_2)}{\sigma(2s_2)} & \dfrac{\sigma_\mu(2s_1)}{\sigma(2s_1)} \\ \dfrac{\sigma_\mu(2s_2)}{\sigma(2s_2)} & \dfrac{\sigma_\nu(2s_1)}{\sigma(2s_1)} & \dfrac{\sigma_\lambda(2s_3)}{\sigma(2s_3)}. \end{cases}$$

Die auf der rechten Seite stehenden σ-Quotienten sind also, in dieser Anordnung, proportional den Coefficienten einer orthogonalen Substitution.

Man kann dies natürlich auch sofort durch Ausrechnung bestätigen: Die Summen der Quadrate von je drei Gliedern in einer Horizontalreihe haben (unabhängig von unserer Voraussetzung $s_1 + s_2 + s_3 = 0$) den nämlichen Werth vermöge der Identitäten zwischen den Quadraten von je drei σ-Functionen, und die Summen der Producte entsprechender Glieder in parallelen Reihen verschwinden zufolge der Identitäten (9) des § 4.

Für den zehnten Coefficienten a_{00}, den wir als Function der Grössen $2s_1$, $2s_2$, $2s_3$ durch ein besonderes Zeichen

$$a_{00} = Q(2s_1,\ 2s_2,\ 2s_3) \tag{4}$$

darstellen wollen, ergibt sich eine ganze Reihe verschiedener Ausdrücke. Man kann ihn zunächst ebenfalls aus den Formeln (4) des § 3 herleiten, indem man wieder die obigen Formeln (2) benutzt; man kann ihn zweitens berechnen mit Hülfe der Formeln (9) in II, § 5 (S. 142); man kann ihn endlich finden, indem man aus der Quadratsumme der Glieder in irgend einer Vertical- oder Horizontalreihe die Wurzel zieht und das Vorzeichen gehörig bestimmt. Wenn man alle diese Ausdrücke mit einander vergleicht, so ergibt sich:

Die durch die Formel (4) definirte Function Q dreier durch die Gleichung $u + v + w = 0$ verbundener Argumente hat den Werth

$$Q(u,\ v,\ w)$$

$$\left\{\begin{aligned}
&= -\frac{1}{e_\mu - e_\nu}\left(\frac{\sigma_\mu u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_\mu v}{\sigma v}\,\frac{\sigma_\mu w}{\sigma w} - \frac{\sigma_\nu u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_\nu v}{\sigma v}\,\frac{\sigma_\nu w}{\sigma w}\right)\\
&= \frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}\left(\frac{\sigma_\lambda v}{\sigma v}\,\frac{\sigma_\lambda w}{\sigma w} - \frac{\sigma_\mu u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_\nu u}{\sigma u}\right)\\
&= \sqrt{\wp u + \wp v + \wp w}\\
&= -(\zeta u + \zeta v + \zeta w)\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\wp' v - \wp' w}{\wp v - \wp w} = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' w - \wp' u}{\wp w - \wp u} = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Von diesen Formeln umfasst die erste drei, die zweite neun verschiedene Ausdrücke der Function Q. Die Gleichheit der Ausdrücke in den beiden ersten Zeilen ist eine Folge der Identitäten (7) und (8) des § 4; die Gleichheit der Ausdrücke in den drei letzten

Zeilen bildet das bekannte Additionstheorem der $\wp$-Function. ζu ist das in der SCHWARZ'schen Formelsammlung mit $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ bezeichnete Integral 2. Gattung.

Die Substitutionscoefficienten a_{ik} sind, als Functionen von zweien der Argumente s_i betrachtet, in ihrer Veränderlichkeit durch eine Gleichung beschränkt, die man entweder aus der Gleichung (14) des § 4, oder auch aus der zwischen den Quadraten der Functionen σ_1, σ_2, σ_3 bestehenden Identität ablesen kann:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(e_\mu - e_\nu)\, a_{11}^2 + (e_\nu - e_\lambda)\, a_{23}^2 + (e_\lambda - e_\mu)\, a_{32}^2 \\ =\ &(e_\mu - e_\nu)\, a_{22}^2 + (e_\nu - e_\lambda)\, a_{31}^2 + (e_\lambda - e_\mu)\, a_{13}^2 \\ =\ &(e_\mu - e_\nu)\, a_{33}^2 + (e_\nu - e_\lambda)\, a_{12}^2 + (e_\lambda - e_\mu)\, a_{21}^2 = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Zu der nämlichen Gleichung gelangt man von der Formel (7) des § 4 aus, da die linke Seite der Gleichung

$$(7)\quad (e_\mu - e_\nu)\, a_{11} a_{22} a_{33} + (e_\nu - e_\lambda)\, a_{23} a_{31} a_{12} + (e_\lambda - e_\mu)\, a_{32} a_{13} a_{21} = 0$$

in das Product aus a_{00} und der linken Seite von (6) zerfällt[1]). —

Wir schliessen hier die linearen Substitutionen der Argumente s_1, s_2, s_3, ω, ω' an, die die Transformationen der in § 11 des zweiten Abschnittes besprochenen Gruppen G_{16}, G_{96}, G_{192}, G_{576} hervorrufen.

Zunächst entsprechen der Gruppe G_{16} der KUMMER'schen Configuration die 16 nach der Festsetzung des § 4 (S. 214) noch verschiedenen Aenderungen der Parameter $s_\varkappa$ um *halbe* Perioden $\tilde{\omega}$, deren Summe Null ist. Insbesondere die erzeugenden Operationen S_i, Σ_i (S. 167) haben als Aequivalent die folgenden linearen Substitutionen der Parameter $s_\varkappa$:

(8)		s_1'	s_2'	s_3'		s_1'	s_2'	s_3'
	S_1	$s_1 - 2\omega_\mu$	$s_2 + \omega_\mu$	$s_3 + \omega_\mu$	Σ_1	$s_1 - 2\omega_\nu$	$s_2 + \omega_\nu$	$s_3 + \omega_\nu$
	S_2	$s_1 + \omega_\mu$	$s_2 - 2\omega_\mu$	$s_3 + \omega_\mu$	Σ_2	$s_1 + \omega_\nu$	$s_2 - 2\omega_\nu$	$s_3 + \omega_\nu$
	S_3	$s_1 + \omega_\mu$	$s_2 + \omega_\mu$	$s_3 - 2\omega_\mu$	Σ_3	$s_1 + \omega_\nu$	$s_2 + \omega_\nu$	$s_3 - 2\omega_\nu$

1) Die drei Ausdrücke (6) (und ebenso die linke Seite von (7), getheilt durch a_{00}) haben denselben Werth für *jede* orthogonale Substitution. Bildet man ihre Summe, und setzt man diese gleich Null, so entsteht die vom Verfasser als *Normalform* bezeichnete Gleichungsform der desmischen Fläche 4. O. (Sächs. Ber. 1892, S. 155).

Fügen wir hierzu die Vertauschungen der Grössen s_1, s_2, s_3, so erfahren die Grössen x_i die Vertauschungen der Gruppe G_{96}; die Gruppen G_{192} und G_{576} entstehen sodann, wenn wir noch lineare Periodentransformationen hinzufügen: Die Gruppe G_{192} entsteht durch Zufügung der Vertauschung von μ und ν; G_{576} entsteht, wenn man sämmtliche Vertauschungen von λ, μ, ν hinzunimmt.

Die Gruppe G_{96} umfasst im Allgemeinen alle collinearen Transformationen, die die desmische Fläche 4. O. in sich selbst überführen; ausgenommen sind nur die Fälle $g_3 = 0$ und $g_2 = 0$; im ersten Fall lässt die Fläche, wenn etwa $e_\lambda = 0$ angenommen wird, noch die Transformationen von G_{192} zu, im zweiten 288 Transformationen, die eine invariante Untergruppe von G_{576} bilden. —

Die genannten linearen Transformationen der Parameter $s_\varkappa$ (Nr. 8) haben nur Vorzeichenwechsel der Substitutionscoefficienten $a_{i\varkappa}$, der unter (3) angegebenen σ-Quotienten zur Folge. Dagegen erhält man wesentlich neue Gruppirungen von σ-Quotienten zu Coefficientensystemen orthogonaler Substitutionen, wenn man die Parameter $s_\varkappa$ um *Periodenviertel* vermehrt, deren Summe gleich Null ist. Betrachtet man der Einfachheit halber jetzt auch noch die unter (8) angegebenen Aenderungen als nicht wesentlich verschieden von der identischen Substitution, so bleiben im Ganzen noch 16 Aenderungen der Grössen $s_\varkappa$ um Periodenviertel, deren jede zu einem neuen Coefficientensystem führt. Diese 16 Anordnungen der σ-Quotienten lassen sich, ähnlich wie die Formeln (6) des § 1, in drei Typen ordnen, von denen der erste einen, der zweite neun, der dritte sechs verschiedene Fälle umfasst. Den ersten Fall haben wir unter (3, I) bereits angeführt. Als Vertreter des zweiten Typus wählen wir die durch die Substitution

$$s_1' = s_1 - \omega_\lambda, \quad s_2' = s_2 + \frac{\omega_\lambda}{2}, \quad s_3' = s_3 + \frac{\omega_\lambda}{2}$$

aus (3, I) hervorgehende Coefficiententafel:

$$(3, \text{II}) \begin{cases} \dfrac{\sigma_\lambda(2s_1)}{\sigma(2s_1)}, & \sqrt{e_\lambda - e_\mu} \cdot \dfrac{\sigma_\nu(2s_3)}{\sigma_\lambda(2s_3)}, & \sqrt{e_\lambda - e_\nu} \cdot \dfrac{\sigma_\mu(2s_2)}{\sigma_\lambda(2s_2)}, \\ \sqrt{e_\lambda - e_\nu}\, \dfrac{\sigma_\mu(2s_3)}{\sigma_\lambda(2s_3)}, & -\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\lambda - e_\nu} \cdot \dfrac{\sigma(2s_2)}{\sigma_\lambda(2s_2)}, & -\dfrac{\sigma_\mu(2s_1)}{\sigma(2s_1)}, \\ \sqrt{e_\lambda - e_\mu}\, \dfrac{\sigma_\nu(2s_2)}{\sigma_\lambda(2s_2)}, & -\dfrac{\sigma_\nu(2s_1)}{\sigma(2s_1)}, & -\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\lambda - e_\nu} \cdot \dfrac{\sigma(2s_3)}{\sigma_\lambda(2s_3)}; \end{cases}$$

als Vertreter des dritten die Tafel, die aus (3, I) durch die Substitution

$$s_1' = s_1 + \frac{\omega_\lambda}{2}, \quad s_2' = s_2 + \frac{\omega_\mu}{2}, \quad s_3' = s_3 + \frac{\omega_\nu}{2}$$

hervorgeht:

$$(3, \text{III}) \begin{cases} -\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\lambda - e_\nu}\frac{\sigma(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)}, & \sqrt{e_\nu - e_\mu}\frac{\sigma_\lambda(2s_3)}{\sigma_\nu(2s_3)}, & \sqrt{e_\mu - e_\nu}\frac{\sigma_\lambda(2s_2)}{\sigma_\mu(2s_2)}, \\ -\sqrt{e_\nu - e_\lambda}\sqrt{e_\nu - e_\mu}\frac{\sigma(2s_3)}{\sigma_\nu(2s_3)}, & \sqrt{e_\mu - e_\lambda}\frac{\sigma_\nu(2s_2)}{\sigma_\mu(2s_2)}, & \sqrt{e_\lambda - e_\mu}\frac{\sigma_\nu(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)}, \\ -\sqrt{e_\mu - e_\nu}\sqrt{e_\mu - e_\lambda}\frac{\sigma(2s_2)}{\sigma_\mu(2s_2)}, & \sqrt{e_\lambda - e_\nu}\frac{\sigma_\mu(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)}, & \sqrt{e_\nu - e_\lambda}\frac{\sigma_\mu(2s_3)}{\sigma_\nu(2s_3)}. \end{cases}$$

Bei der mit unseren Formeln zusammenhängenden Darstellung sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen beschränken wir uns auf den einfachsten und interessantesten Fall (3, I). Wir können uns nunmehr kurz fassen. Die Formeln (6) des § 4 liefern uns, wenn wir die Formeln (2) in II, § 6 (S. 143) berücksichtigen, und über die Vorzeichen der zunächst nur durch die Producte $l_i l_\varkappa$, $\lambda_i \lambda_\varkappa$ gegebenen Grössen l, λ eine geeignete Entscheidung treffen, unmittelbar den Ansatz:

$$(9) \begin{cases} l_\varkappa = \operatorname{ctg}\frac{a_\varkappa}{2} = \frac{\sigma\omega_\mu \sigma_\lambda s_\varkappa \sigma_\mu s_\varkappa}{\sigma_\lambda \omega\, \sigma s_\varkappa \sigma_\nu s_\varkappa} = -i \cdot \frac{\Theta_\lambda s_\varkappa \Theta_\mu s_\varkappa}{\Theta s_\varkappa \Theta_\nu s_\varkappa} \\ \quad = \frac{\sigma_\lambda(2s_\varkappa) + \sigma_\mu(2s_\varkappa)}{\sqrt{e_\mu - e_\lambda}\,\sigma(2s_\varkappa)} = \frac{\sqrt{e_\mu - e_\lambda}\,\sigma(2s_\varkappa)}{\sigma_\lambda(2s_\varkappa) - \sigma_\mu(2s_\varkappa)} \\ \quad = \frac{\zeta s_\varkappa - \zeta_\nu s_\varkappa}{\sqrt{e_\mu - e_\lambda}} = \frac{\sqrt{e_\mu - e_\lambda}}{\zeta_\lambda s_\varkappa - \zeta_\mu s_\varkappa}, \\ \lambda_\varkappa = \operatorname{ctg}\frac{\alpha_\varkappa}{2} = \frac{\sigma\omega_\nu \sigma_\lambda s_\varkappa \sigma_\nu s_\varkappa}{\sigma_\lambda \omega_\nu \sigma s_\varkappa \sigma_\mu s_\varkappa} = \frac{\Theta_\lambda s_\varkappa \Theta_\nu s_\varkappa}{\Theta s_\varkappa \Theta_\mu s_\varkappa} \\ \quad = \frac{\sigma_\lambda(2s_\varkappa) + \sigma_\nu(2s_\varkappa)}{\sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\sigma(2s_\varkappa)} = \frac{\sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\sigma(2s_\varkappa)}{\sigma_\lambda(2s_\varkappa) - \sigma_\nu(2s_\varkappa)} \\ \quad = \frac{\zeta s_\varkappa - \zeta_\mu s_\varkappa}{\sqrt{e_\nu - e_\lambda}} = \frac{\sqrt{e_\nu - e_\lambda}}{\zeta_\lambda s_\varkappa - \zeta_\nu s_\varkappa}. \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

Die Functionen $\zeta_\lambda u$, $\zeta_\mu u$, $\zeta_\nu u$ sind die in der Schwarz'schen Formelsammlung (Art. 25) mit $\frac{\sigma_\lambda' u}{\sigma_\lambda u}$, $\frac{\sigma_\mu' u}{\sigma_\mu u}$, $\frac{\sigma_\nu' u}{\sigma_\nu u}$ bezeichneten Integrale. 2. Gattung.

Durch die Formeln (9) *sind die Cotangenten der halben Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks als eindeutige homogene Functionen* 0ten *Grades von sechs Verhältnissgrössen*

$$\omega_\lambda : \omega_\mu : \omega_\nu : s_1 : s_2 : s_3$$

dargestellt, zwischen denen zwei lineare Gleichungen stattfinden:

$$\omega_\lambda + \omega_\mu + \omega_\nu = 0\,, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0\,. \text{ —}$$

Für die Cosinus und Sinus der Seiten und Winkel ergeben sich die Ausdrücke:

$$(10) \quad \begin{cases} \cos a_\varkappa = \dfrac{\sigma_\mu(2s_\varkappa)}{\sigma_\lambda(2s_\varkappa)}, & \sin a_\varkappa = \sqrt{e_\mu - e_\lambda} \cdot \dfrac{\sigma(2s_\varkappa)}{\sigma_\lambda(2s_\varkappa)}, \\ \cos \alpha_\varkappa = \dfrac{\sigma_\nu(2s_\varkappa)}{\sigma_\lambda(2s_\varkappa)}, & \sin \alpha_\varkappa = \sqrt{e_\nu - e_\lambda} \cdot \dfrac{\sigma(2s_\varkappa)}{\sigma_\lambda(2s_\varkappa)}, \end{cases}$$

woraus unmittelbar die bei gegebenen Werthen von ω und ω' zwischen den Seiten und Winkeln stattfindende Relation abgelesen werden kann:

$$(11) \qquad P : \Pi = \sqrt{e_\mu - e_\nu} : \sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,.$$

Diese Proportion ist wieder nichts Anderes, als *die Gleichung der desmischen Fläche 4. O.*, bezogen auf das System transcendenter Coordinaten, das von den sechs Winkelgrössen $a_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$ gebildet wird. (Vgl. Nr. 6.) —

Unsere Entwickelung setzt uns nicht nur in den Stand, die Cotangenten $l_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ der halben Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks als eindeutige Functionen von drei unabhängigen Veränderlichen auszudrücken, sondern auch umgekehrt zu gegebenen Werthen der $l_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ die Argumente in allgemeinster Weise zu bestimmen.

Dem Beweise schicken wir den folgenden Satz voraus:

Durch die Formeln (9) ***oder*** (10) ***wird die in § 4 des I. Abschnittes definirte Gruppe*** $\mathfrak{G}_{64}$ ***isomorph bezogen auf eine gewisse Gruppe von linearen Substitutionen der Argumente*** ω_λ, ω_μ, ω_ν, s_1, s_2, s_3.

Wie man durch geeignete Aenderungen der Argumente $s_\varkappa$ allein die Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, oder vielmehr die durch diese Gruppe hervorgerufenen Aenderungen der Grössen $l_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ erzeugen kann, haben wir soeben schon gesehen (Nr. 8); es handelt sich also nur noch um die Hervorbringung der Substitutionen T und T, die einfache Vorzeichenwechsel der Grössen $l_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ im Gefolge haben. (Vgl. S. 102, Nr. 3.) Wir bemerken nun, dass die linearen Periodentransformationen, die e_λ, e_μ, e_ν ungeändert lassen, die Vorzeichen der Quadrat-

wurzeln $\sqrt{e_\mu - e_\lambda}$, $\sqrt{e_\nu - e_\lambda}$ thatsächlich noch beeinflussen. Die fraglichen Transformationen haben, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten, die der Bedingung

$$(\alpha + \delta)^2 = 2\beta\gamma$$

genügen, die Gestalt

$$(12) \qquad \begin{cases} \omega_\mu' = \omega_\mu + 2\alpha\omega_\mu + 2\beta\omega_\nu, \\ \omega_\nu' = \omega_\nu + 2\gamma\omega_\mu + 2\delta\omega_\nu.\text{[1]} \end{cases}$$

Wir finden nun, mit Hülfe der Formeln (6), S. 75

$$\frac{\sigma_\lambda \omega_\mu'}{\sigma \omega_\mu'} = (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\sigma_\lambda \omega_\mu}{\sigma \omega_\mu}, \quad \frac{\sigma_\lambda \omega_\nu'}{\sigma \omega_\nu'} = (-1)^{\gamma+\delta} \frac{\sigma_\lambda \omega_\nu}{\sigma \omega_\nu}.$$

Die Periodentransformationen (12) zerfallen demnach in vier Schaaren, die in folgender Weise den Substitutionen von $\mathfrak{H}_4$ (S. 102) zugeordnet sind:

$$(13) \qquad \begin{cases} 1 \;:\; \alpha + \beta \equiv 0 \quad \gamma + \delta \equiv 0 \\ T \;:\; \alpha + \beta \equiv 1 \quad \gamma + \delta \equiv 0 \\ \mathrm{T} \;:\; \alpha + \beta \equiv 0 \quad \gamma + \delta \equiv 1 \\ T\mathrm{T}: \alpha + \beta \equiv 1 \quad \gamma + \delta \equiv 1 \end{cases} \pmod{2}.$$

Diese Substitutionen also rufen, verbunden mit den Substitutionen (8), dieselben Aenderungen der Grössen $l_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ hervor, wie die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{64}$.

Zu bemerken ist jedoch, dass die Substitution $T\mathrm{T}$ auch durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller Grössen s_i hervorgebracht werden kann. Es entsteht also eine möglichst umfassende mit $\mathfrak{G}_{64}$ holoëdrisch isomorphe Gruppe, wenn wir die folgenden Substitutionen der Identität zuordnen:

1) Die Aenderungen der Grössen $s_\varkappa$ um Vielfache ganzer Perioden,

2) die Substitution $s_\varkappa' = - s_\varkappa$, verbunden mit *den* Periodentransformationen (12), die der Bedingung $\beta + \gamma \equiv 0$ mod. 2 (d. h. $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ mod. 2, $\alpha + \delta \equiv 0$ mod. 4) genügen.

---

1) Herr F. KLEIN bezeichnet diese Gruppe als (homogene) »Hauptcongruenzgruppe der zweiten Stufe« innerhalb der Gruppe der Modulsubstitutionen. Ihre Untergruppe $\beta + \gamma \equiv 0$ mod. 2 gehört, nach der Terminologie des Herrn KLEIN, zur vierten Stufe. S. F. KLEIN, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, ausgearbeitet und vervollständigt von R. FRICKE (Leipzig, Teubner, 1890—92) Bd. I, S. 388 u. ff.

Die Aenderungen 1) *und* 2) *umfassen bereits die ganze Vieldeutigkeit der Argumente* $(\omega : s)$, *die zu gegebenen Werthen* $l_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ *gehören.*

Sind nämlich die Grössen $l_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ bekannt, so können wir mit Hülfe der Gleichung (14) in § 4 (S. 213) die Verhältnisse der Grössen e_λ, e_μ, e_ν rational darstellen. Haben wir sodann über den Werth einer dieser Grössen, und damit auch über die Werthe der übrigen entschieden, so ergeben sich 2ω, $2\omega'$ als ein Paar solcher primitiver Perioden des Integrals

$$\int \frac{d\wp}{2\sqrt{(\wp-e_\lambda)(\wp-e_\mu)(\wp-e_\nu)}},$$

für die der reelle Theil des Quotienten $\frac{\omega'}{\omega i}$ *positiv* ist[1]). Die ihnen innewohnende Vieldeutigkeit ist zunächst noch gegeben durch die Formeln (12), ohne hinzutretende Beschränkung. Jetzt können wir, auf Grund der Formeln (3, I) die Grössen $s_\varkappa$ finden, abgesehen vom Vorzeichen, und abgesehen von Vielfachen ganzer Perioden, die noch zu ihnen hinzutreten können. Tragen wir nun die gefundenen Werthe in (9) auf der rechten Seite ein, so sind die Gleichungen (9) möglicher Weise noch nicht erfüllt, da die Vorzeichen links und rechts noch verschieden sein können. Diesen Mangel haben wir noch zu beseitigen durch eine geeignete Periodentransformation, nach Anweisung der Formeln (13). Die den Grössen s_1, s_2, s_3, ω_λ, ω_μ, ω_ν jetzt noch anhaftende Vieldeutigkeit ist dieselbe, die wir oben unter 1) und 2) angegeben haben. —

Die Formeln (10) gehen im Falle $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $\nu = 2$ in die von Lagrange entdeckten bekannten Formeln über. Man kann sie natürlich auch im Rahmen der Weierstrass'schen Theorie unmittelbar begründen, indem man das in der Form

---

1) Da die in die Definition der σ-Function aufgenommene Bedingung $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ auf einer willkürlichen Entscheidung zwischen zwei an und für sich gleichwerthigen Möglichkeiten beruht, so können die zwischen den Grössen $l_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ bestehenden Gleichungen noch auf eine zweite Art durch ganz ähnlich gebildete Functionen befriedigt werden. Diese beiden Parameterdarstellungen der Mannigfaltigkeit M_3^8 (S. 136, Anmerkung) sind natürlich als verschieden anzusehen, da es nicht möglich ist, die eine durch analytische Fortsetzung in die andere überzuführen.

$$\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u} = \frac{\sigma_\mu v}{\sigma_\lambda v} \cdot \frac{\sigma_\mu w}{\sigma_\lambda w} - (e_\mu - e_\lambda)\frac{\sigma v}{\sigma_\lambda v} \cdot \frac{\sigma w}{\sigma_\lambda w} \cdot \frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u},$$
$$\frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u} = \frac{\sigma_\nu v}{\sigma_\lambda v} \cdot \frac{\sigma_\nu w}{\sigma_\lambda w} - (e_\nu - e_\lambda)\frac{\sigma v}{\sigma_\lambda v} \cdot \frac{\sigma w}{\sigma_\lambda w} \cdot \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u}$$

geschriebene specielle Additionstheorem (8) des § 4 mit den beiden Cosinussätzen der sphärischen Trigonometrie vergleicht. Der von uns eingeschlagene längere Weg hat aber den Vorzug, dass er tiefer in das Wesen der Sache hineinführt, und insbesondere die Beziehung der Formeln (10) zu der in § 3 nachgewiesenen Darstellung orthogonaler Substitutionen durch elliptische Functionen von vier Argumenten aufdeckt. In der That erhält man das Coefficientensystem (3, I) und (4), wenn man in die Formeln (6, III) des § 3 die durch die Formeln (1), (2) des § 4 (S. 211) gegebene besondere Annahme einführt, mit der unwesentlichen Aenderung, dass die Grössen $a_{11} \dots a_{33}$ das Vorzeichen gewechselt haben, und dass gleichzeitig die beiden letzten Verticalreihen vertauscht sind. — Auch wenn man die Substitutionscoefficienten in dieser letzten Anordnung, ohne sie vorher vertauscht zu haben, zur Darstellung eines sphärischen Dreiecks benutzt, ergibt sich ein bemerkenswerther specieller Satz:

Man kann die Cosinus der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks auch mit Hülfe der folgenden Formeln durch elliptische Functionen von zwei Argumenten ausdrücken:

$$(14)\quad \begin{cases} \cos a_1 = -\dfrac{\sigma(v+w)\sigma_\lambda v}{\sigma_\lambda(v+w)\sigma v}, & \cos \alpha_1 = -\dfrac{\sigma(v+w)\sigma_\lambda w}{\sigma_\lambda(v+w)\sigma w}, \\ \cos a_2 = -\dfrac{\sigma(v+w)\sigma_\mu v}{\sigma_\mu(v+w)\sigma v}, & \cos \alpha_2 = -\dfrac{\sigma(v+w)\sigma_\mu w}{\sigma_\mu(v+w)\sigma w}, \\ \cos a_3 = -\dfrac{\sigma(v+w)\sigma_\nu v}{\sigma_\nu(v+w)\sigma v}, & \cos \alpha_3 = -\dfrac{\sigma(v+w)\sigma_\nu w}{\sigma_\nu(v+w)\sigma w}. \end{cases}$$

In diesem Falle werden jedoch nicht, wie in dem eben betrachteten, gleichzeitig auch die Sinus der Seiten und Winkel durch eindeutige Functionen dargestellt.

Die Gestalt der in den letzten Paragraphen entwickelten Formeln kann noch in mannigfacher Weise abgeändert werden, insbesondere dadurch, dass man statt der σ-Quotienten die Functionen $\wp u$ und $\wp' u$ benutzt. Wir stellen hier einige (bekannte) Relationen zusammen, deren man sich bei solchen Umformungen bedienen kann:

$$(15)\begin{cases} \sigma_\lambda(2u) = \sigma_\lambda^4 u - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\sigma^4 u = \\ = \sigma_\lambda^2\sigma_\mu^2 - (e_\lambda - e_\mu)\,\sigma^2\sigma_\nu^2 = \sigma_\lambda^2\sigma_\nu^2 - (e_\lambda - e_\nu)\sigma^2\sigma_\mu^2, \\ \dfrac{\sigma_\mu u \sigma_\nu u}{\sigma u \sigma_\lambda u} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\wp' u}{\wp u - e_\lambda} = -2\dfrac{(\wp u - e_\mu)(\wp u - e_\nu)}{\wp' u}, \\ \qquad \dfrac{\sigma_\lambda(2u)}{\sigma(2u)} = \sqrt{\wp(2u) - e_\lambda} = \\ = (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\cdot\left\{\dfrac{1}{\wp'(u \pm \omega_\lambda)} + \dfrac{1}{\wp' u}\right\} \\ = -\dfrac{(\wp u - e_\lambda)^2 - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp' u} \\ = -\dfrac{4(\wp u - e_\lambda)^2 + g_2 - 12 e_\lambda^2}{4\wp' u}. \end{cases}$$

(Vgl. auch Nr. (2) § 5 (S. 216). —

§ 6.

Die Wellenfläche. — Schlusswort.

Dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie mit gewissen Formeln der Theorie der elliptischen Functionen durch ein so enges Band verknüpft sind, wie wir soeben gesehen haben, dies beruht zum Theil auf dem Umstand, dass die aus der Trigonometrie abgeleiteten Gruppen $\mathfrak{G}_{16}$ u. s. w. isomorph sind zu gewissen Gruppen linearer Substitutionen der Argumente ω, ω', u, v, . . elliptischer Functionen. Ein solcher Isomorphismus wird aber noch auf mannigfache andere Arten hergestellt werden können. Es wird nützlich sein, noch mit wenigen Worten eines Beispiels zu gedenken, das einiges Interesse beanspruchen darf, wenn sich auch nicht so bemerkenswerthe Sätze ergeben, wie in den bereits behandelten Fällen.

Betrachten wir die σ- oder Θ-Functionen, die zu zwei von einander *unabhängigen* Perioden-Paaren 2ω, $2\omega'$ und $2\bar{\omega}$, $2\bar{\omega}'$ gehören, und daher durch die Bezeichnungen Θ_x, $\bar{\Theta}_x$ unterschieden werden mögen, und setzen wir

$$(1)\qquad \begin{cases} x_0 = -\Theta u\,\bar{\Theta} v\,, & x_1 = \Theta_\lambda u\,\bar{\Theta}_\lambda v, \\ x_2 = \Theta_\mu u\,\bar{\Theta}_\mu v, & x_3 = \Theta_\nu u\,\bar{\Theta}_\nu v, \end{cases}$$

so erkennen wir sofort, dass wir auch bei dieser Annahme die Gruppe G_{16} durch eine Gruppe von linearen Transformationen der Argumente u, v, nämlich von Aenderungen um geeignete Vielfache halber

Perioden hervorbringen können; ja wir können, wenn wir noch Periodentransformationen zu Hülfe nehmen, auch noch die Gruppen G_{96} und G_{192} in ähnlicher Weise erzeugen. Es ergeben sich also auch jetzt wieder einfache Ausdrücke für die Cosinus der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks und seiner sämmtlichen Nachbardreiecke. Lassen wir u und v allein sich ändern, so erhalten wir wieder eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Dreiecken, denen im Raume die Punkte einer Fläche entsprechen. Auch hier gelangen wir zu einer bekannten Fläche, dem sogenannten *Tetraedroid*, oder zu der davon nicht wesentlich verschiedenen *Fresnel'schen Wellenfläche*[1]).

Aus der Parameterdarstellung (1) folgt, dass die fragliche Fläche nicht allein durch die Substitutionen der Gruppe G_{16}, sondern ausserdem noch durch die Substitution $x_0' = -x_0$, $x_i' = x_i$ in sich selbst übergeführt wird. Ihre Gleichung enthält daher nur die Quadrate der Grössen x_i, und sie ist in diesen Quadraten von der zweiten Ordnung, da man Θ_μ^2 und Θ_ν^2 linear durch Θ^2 und Θ_λ^2 ausdrücken kann, die Grössen x_i^2 also ganze lineare Functionen von zwei Parametern werden. Man schliesst nun leicht, dass die gesuchte Gleichung die Form

$$c_0(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + c_1(x_2^2x_3^2 + x_0^2x_1^2) + * + * = 0$$

haben muss. Die Elimination der Grössen Θ^2, Θ_λ^2, $\bar{\Theta}^2$, $\bar{\Theta}_\lambda^2$ lässt sich leicht ausführen. Setzt man

$$(2) \qquad a : b : c = \frac{\bar{\Theta}_\lambda^2(0)}{\Theta_\lambda^2(0)} : \frac{\bar{\Theta}_\mu^2(0)}{\Theta_\mu^2(0)} : \frac{\bar{\Theta}_\nu^2(0)}{\Theta_\nu^2(0)},$$

also

$$(3) \quad \begin{cases} e_\mu - e_\nu : e_\nu - e_\lambda : e_\lambda - e_\mu = b^2 - c^2 : c^2 - a^2 : a^2 - b^2, \\ \bar{e}_\mu - \bar{e}_\nu : \bar{e}_\nu - \bar{e}_\lambda : \bar{e}_\lambda - \bar{e}_\mu = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} : \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \end{cases}$$

so folgt

$$(4) \quad \begin{cases} (x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)(x_2^2x_3^2 + x_0^2x_1^2) + \\ + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)(x_3^2x_1^2 + x_0^2x_2^2) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)(x_1^2x_2^2 + x_0^2x_3^2) = 0. \end{cases}$$

---

1) Vgl. H. Weber in Crelle's Journal Bd. 84 (1878) S. 353.

Dies ist die Gleichung des Tetraedroids, eines speciellen Falles der Kummer'schen Fläche 4. O. Sie geht in die bekannte Gleichung der Fresnel'schen Wellenfläche

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=1$$

über durch die Substitution

$$x=\sqrt{-bc}\cdot\frac{x_1}{x_0},\quad y=\sqrt{-ca}\cdot\frac{x_2}{x_0},\quad z=\sqrt{-ab}\cdot\frac{x_3}{x_0}.$$

Die Gleichungen (3) zeigen deutlich die Abhängigkeit der Fläche von einer Gleichung 6. Grades, deren Wurzeln paarweise reciproke Werthe haben.

Indem wir unsere Betrachtungen hiermit beschliessen, wollen wir nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, wie das Begonnene nach mancherlei Richtungen hin fortgesetzt werden kann. Die Trigonometrie bietet in der That einen reichhaltigen Stoff dar, dem sich noch manche neue Seiten abgewinnen lassen werden.

Zunächst weist unsere Darstellung selbst, ebenso wie alle früheren, noch eine wesentliche Lücke auf: Sie gibt uns keinen Einblick in *vollständige* Systeme von Formeln der Trigonometrie. Wir meinen hiermit Folgendes. Man setze einen bestimmten sogenannten *Integritätsbereich* fest, d. h. man betrachte den Inbegriff aller ganzen rationalen Functionen F, die sich z. B. aus den Grössen l_i, λ_i oder etwa aus den Grössen $\cos a_i$, $\sin a_i$, $\cos \alpha_i$, $\sin \alpha_i$ mit numerischen Coefficienten bilden lassen. Welches ist nun die Gesammtheit der Functionen F, die identisch verschwinden? Welches sind die zwischen diesen Functionen bestehenden Relationen (sogenannte Syzygien erster und höherer Ordnung)? Es ist klar, dass man erst dann, wenn diese Fragen für die gebräuchlichsten goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel erledigt sind, mit Sicherheit wird sagen können, dass man auch nur die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln vollständig beherrscht.

Ein anderer Kreis von Fragestellungen bezieht sich darauf, wie man die Relationen $F=0$ befriedigen kann, dadurch dass man die in ihnen vorkommenden goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel, sei es durch *eindeutige Functionen* von drei unabhängigen Grössen darstellt, sei es überhaupt durch Functionen eines geeigneten,

von vorn herein gegebenen Functionenbereichs. Wir haben zwar gesehen, dass die Cosinus der Seiten und Winkel sich rational durch drei Grössen darstellen lassen, dass die Grössen $\operatorname{tg}\frac{a_i}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}$ einer ähnlichen Darstellung durch eindeutige transcendente Functionen fähig sind, dass endlich die Grössen $\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}$ eindeutig durch vier Grössen ausgedrückt werden können, zwischen denen eine Gleichung besteht; aber dies sind nur gelegentliche Ergebnisse. Eine systematische Theorie solcher Parameterdarstellungen, die ja freilich zu den schwierigsten Gegenständen der Functionentheorie gehören würde, fehlt noch durchaus.

Ferner haben wir nicht behandelt die sogenannten *Invarianten* der betrachteten projectiven Gruppen, d. h. die ganzen homogenen Functionen der Veränderlichen, die sich bei den Transformationen der Gruppe bis auf einen Factor reproduciren, und ebensowenig haben wir die mit unseren Gruppen verknüpften algebraischen *Gleichungen* betrachtet. Es sei z. B. ein sphärisches Dreieck nicht unmittelbar vorgelegt, sondern durch das Dreikant bestimmt, das seine Ecken aus dem Mittelpunkt der Kugel projicirt, und dieses Dreikant selbst sei nicht durch seine einzelnen Kanten oder Flächen, sondern nur durch sein Polarsystem gegeben. Dann wird die Theorie eine andere Gestalt annehmen, indem die bis jetzt rational bekannten Grössen nunmehr als Wurzeln algebraischer Gleichungen definirt sind. Die Durchführung dieses Gedankens, der die Trigonometrie mit gewissen ternären Formen in Zusammenhang bringt, wird, in den einfachsten Fällen wenigstens, keine Schwierigkeiten bieten. — Noch in anderer Weise kann man einen Zusammenhang zwischen der Trigonometrie und der Formentheorie herstellen durch das bekannte *Hesse'sche Uebertragungsprincip*, indem man jeden Strahl durch den Mittelpunkt der Kugel darstellt durch ein Punktepaar, das dem sogenannten unendlich fernen Kugelkreis angehört. Nicht nur die Trigonometrie, sondern überhaupt die Polygonometrie auf der Kugel wird so in eine keineswegs unfruchtbare Beziehung gesetzt zur Theorie der binären quadratischen Formen. Wieder in anderer Weise könnte man, ebenfalls durch Hesse's Uebertragungsprincip, die ebene Trigonometrie mit der Theorie gewisser binärer Formen verbinden. Ein jedes ebene Dreieck ist nämlich Poldreieck eines einzigen Kreises. Nimmt man

diesen als Träger des binären Gebietes, so entspricht dem Dreieck eine Form 6. Ordnung, deren vierte Ueberschiebung $(f, f)_4$ identisch verschwindet, und der unendlich fernen Geraden entspricht eine quadratische Form φ. Die goniometrischen Functionen der Winkel des Dreiecks werden irrationale absolute Invarianten im System der Formen f und φ.

Die Betrachtung des unendlich fernen Kugelkreises erinnert uns daran, dass man auch auf die Gruppe der collinearen Transformationen eines reellen Kegelschnittes eine Geometrie der Ebene gründen kann, die mit der von Lobatschewski und Bolyai entworfenen absoluten Geometrie übereinstimmt, durch die sogenannte projective Maassbestimmung. Den Untersuchungen des I. und II. Abschnittes werden sich in diesem Falle ähnliche Ueberlegungen an die Seite stellen lassen, die andere, und zwar verwickeltere Realitätsverhältnisse darbieten. In ähnlicher Weise wird dann auch der III. Abschnitt zu ergänzen sein, in dem wir der Einfachheit halber von den Realitätsverhältnissen gänzlich abgesehen haben. —

Wir haben gelegentlich schon erwähnt, dass die Functionentheorie neuerdings zur Bildung eines Dreiecksbegriffs geführt hat, bei dem vom Dreieck eine zusammenhängende Fläche gefordert wird. Wir haben diesen Dreiecksbegriff, der sehr wohl eine genauere Untersuchung verdient, gänzlich bei Seite gelassen. Andrerseits hat Herr Schilling kürzlich gefunden, dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie auch dann noch einer einfachen geometrischen Auffassung fähig sind, wenn man den Seiten und Winkeln *complexe* Werthe beilegt (Gött. Nachr. 1891, Nr. 5). Dieser schöne Satz ist aber (was Herrn Schilling entgangen ist) nur einer von *drei* ähnlich lautenden Sätzen, die den drei Hauptarten der Raumgeometrie angehören, und den drei Systemen complexer Zahlen entsprechen, die man aus zwei Einheiten bilden kann. Das Dreieck wird so zur Figur eines räumlichen Sechsecks erweitert, bei dem je zwei auf einander folgende Seiten sich rechtwinklig schneiden — einer Figur, die von der grössten Wichtigkeit ist für die Geometrie der Bewegung, und deren Theorie eine grosse Zahl von interessanten Sätzen in sich vereinigt, die man dem grossen französischen Geometer Chasles verdankt.

Nicht geringeres Interesse bietet die Frage nach einer anderen Verallgemeinerung: Wird es möglich sein (wie es durch verschiedene

Umstände wahrscheinlich gemacht wird), die Theorie der *Tetraeders*, zunächst im Nicht-Euclidischen Raume, in ähnlicher Weise zu behandeln wie die des Dreiecks?

Auch die Untersuchungen des III. Abschnittes endlich verlangen eine Fortsetzung. Von noch weitergehenden Verallgemeinerungen absehend, gedenken wir nur der Ausdehnung unserer Betrachtung auf ϑ-Functionen mit zwei Veränderlichen, wie sie durch die Theorie der KUMMER'schen Fläche und durch die ROSENHAIN'schen ϑ-Formeln nahe gelegt wird Auch in diesen Formeln, die acht Argumente enthalten, tritt das System von linearen Gleichungen auf, das wir wiederholt zu betrachten hatten. Aber auch schon in der Theorie der elliptischen Functionen kann man, wie hier nachträglich bemerkt werden mag, ähnliche Formeln mit acht und mehr Argumenten bilden, zum Beispiel auf Grund des folgenden algebraischen Satzes:

»Sind $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ und $\mathfrak{x}_i'$, $\mathfrak{y}_i'$, $\mathfrak{z}_i'$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ zwei Systeme von zwölf Grössen, die in der auf S. 196 Nr. 7...9 angegebenen Beziehung stehen, so definiren die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_0'' &= \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1' + \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_0', \\
\mathfrak{x}_1'' &= \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_0' + \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1', \\
\mathfrak{x}_2'' &= -\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3' - \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_2', \\
\mathfrak{x}_3'' &= -\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_2' - \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_3' \text{ (u. s. w.)}
\end{aligned}
$$

ein drittes System von zwölf Grössen $\mathfrak{x}_i''$, $\mathfrak{y}_i''$, $\mathfrak{z}_i''$ von derselben Eigenschaft.«

Wir erwähnen nur *eine* Folgerung dieses Satzes.

Bezeichnen wir mit $a, \dots d''$, $\bar{a}, \dots \bar{d}''$ zwei Systeme von zwölf Grössen, die in der mehrfach besprochenen Beziehung stehen, so ändert die Summe $\mathfrak{a}_{00} =$

$$
\begin{aligned}
&\Theta_{0000}\bar{\Theta}_{0000} + \Theta_{\lambda\lambda\lambda\lambda}\bar{\Theta}_{\lambda\lambda\lambda\lambda} \\
&+ \Theta_{\mu\mu\mu\mu}\bar{\Theta}_{\mu\mu\mu\mu} + \Theta_{\nu\nu\nu\nu}\bar{\Theta}_{\nu\nu\nu\nu},
\end{aligned}
$$

worin zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
\Theta_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \Theta_\alpha a\,\Theta_\beta b\,\Theta_\gamma c\,\Theta_\delta d, \\
\bar{\Theta}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \bar{\Theta}_\alpha \bar{a}\,\bar{\Theta}_\beta \bar{b}\,\bar{\Theta}_\gamma \bar{c}\,\bar{\Theta}_\delta \bar{d}
\end{aligned}
$$

gesetzt ist, ihren Werth nicht, wenn man die Grössen $a \dots d$, $\bar{a} \dots \bar{d}$ durch $a' \dots d'$, $\bar{a}' \dots \bar{d}'$ oder $a'' \dots d''$, $\bar{a}'' \dots \bar{d}''$ ersetzt.

Wir ersehen hieraus, dass die zweite Hälfte des in § 3 unter I (S. 205) formulirten Satzes noch erhalten bleibt, wenn man die dort besprochenen zehn Grössen a_{00}, a_{11}, a_{23}, a_{32} u. s. w. durch die allgemeineren Ausdrücke $\mathfrak{a}_{00}$ (s. oben),

$$\mathfrak{a}_{11} = (\Theta_{\mu\mu\nu\nu} + \Theta_{\nu\nu\mu\mu})(\bar{\Theta}_{\mu\mu\nu\nu} + \bar{\Theta}_{\nu\nu\mu\mu}),$$
$$\mathfrak{a}_{23} = (\Theta_{\mu\nu\mu\nu} + \Theta_{\nu\mu\nu\mu})(\bar{\Theta}_{\mu\nu\mu\nu} + \bar{\Theta}_{\nu\mu\nu\mu}),$$
$$\mathfrak{a}_{32} = (\Theta_{\mu\nu\nu\mu} + \Theta_{\nu\mu\mu\nu})(\bar{\Theta}_{\mu\nu\nu\mu} + \bar{\Theta}_{\nu\mu\mu\nu}) \text{ u. s. w.}$$

ersetzt. Coefficienten einer orthogonalen Substitution sind diese Grössen $\mathfrak{a}_{ik}$ im Allgemeinen offenbar *nicht*; immerhin sind sie uns erwähnenswerth erschienen, weil sie vermöge ihrer grösseren Allgemeinheit das Bildungsgesetz jener Substitutionscoefficienten deutlicher hervortreten lassen als die auf S. 205 (Nr. 6, I) angegebenen Ausdrücke der Grössen a_{ik} selbst.

Von dem ganzen Kreis unter einander zusammenhängender Probleme, die soeben erwähnt worden sind, und von denen *einige* vielleicht eine genauere Betrachtung verdienen, konnte von uns nur ein kleiner Ausschnitt behandelt werden. Immerhin wird das Mitgetheilte wohl zeigen, dass die Formeln der Trigonometrie doch noch nicht so genau bekannt sind, wie man wohl hier und da geglaubt haben mag, ja dass das Beste vielleicht noch zu thun bleibt. Aehnliches aber gilt von der elementaren Geometrie überhaupt.

So kommen wir am Ende unseres Weges zu dem im Vorwort ausgesprochenen Gedanken zurück. Möchten Andere das Begonnene weiterbilden und vervollständigen; möchte man sich wieder gewöhnen, in der elementaren Geometrie ein dankbares und wichtiges Forschungsgebiet zu erblicken!

Inhalt.

Seite

I. Abschnitt. Geometrische Untersuchung der sphärischen Dreiecke.

§ 1. Von der Gestalt eines Kugeldreiecks 90
§ 2. Ungleichungen für die Seiten und Winkel 94
§ 3. Uebergangsformen 96
§ 4. Nachbardreiecke 100
§ 5. Die Gruppe 𝔊 105
§ 6. Eintheilung der sphärischen Dreiecke in zwei Classen 109
§ 7. Die goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks. — Erweiterte Gruppen 113
§ 8. Ebene Dreiecke. 116

II. Abschnitt. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie und ihr Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Substitutionen . 123

§ 1. Die Grundformeln. 124
§ 2. Die Delambre'schen und L'Huilier'schen Formeln 127
§ 3. Folgerungen aus den L'Huilier'schen Formeln. 131
§ 4. Folgerungen aus den Delambre'schen Formeln 136
§ 5. Einführung der Parameter X, Y, Z und der orthogonalen Substitutionen 140
§ 6. Darstellung der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks durch die Parameter X, Y, Z 143
§ 7. Umkehrung des in § 6 aufgestellten Satzes 150
§ 8. Die desmischen Tetraeder 152
§ 9. Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum. 157
§ 10. Fortsetzung: Die Abbildung der Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln 162
§ 11. Die Gruppen G_{16}, G_{96}, G_{192}, G_{576} 167
§ 12. Die Halbmesser der Eckenkreise und der Berührungskreise des Dreiecks 172
§ 13. Kreisvierecke in der Ebene 174
§ 14. Grenzübergang zum ebenen Dreieck 180

III. Abschnitt. Darstellung orthogonaler Substitutionen und sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen.

Einleitung. Hülfssätze 188
§ 1. Die Gruppirung der Weierstrass'schen und Jacobi'schen Additionstheoreme 192
§ 2. Fortsetzung: Das Aequivalent der Gruppe G_{576} 198
§ 3. Darstellung orthogonaler Substitutionen durch 𝔖-Functionen von vier Argumenten 203
§ 4. Die desmische Fläche vierter Ordnung 210
§ 5. Orthogonale Substitutionen und sphärische Dreiecke, die mit der desmischen Fläche vierter Ordnung verknüpft sind 216
§ 6. Die Wellenfläche. — Schlusswort 225

DRUCK- UND ARBEITSLEISTUNG

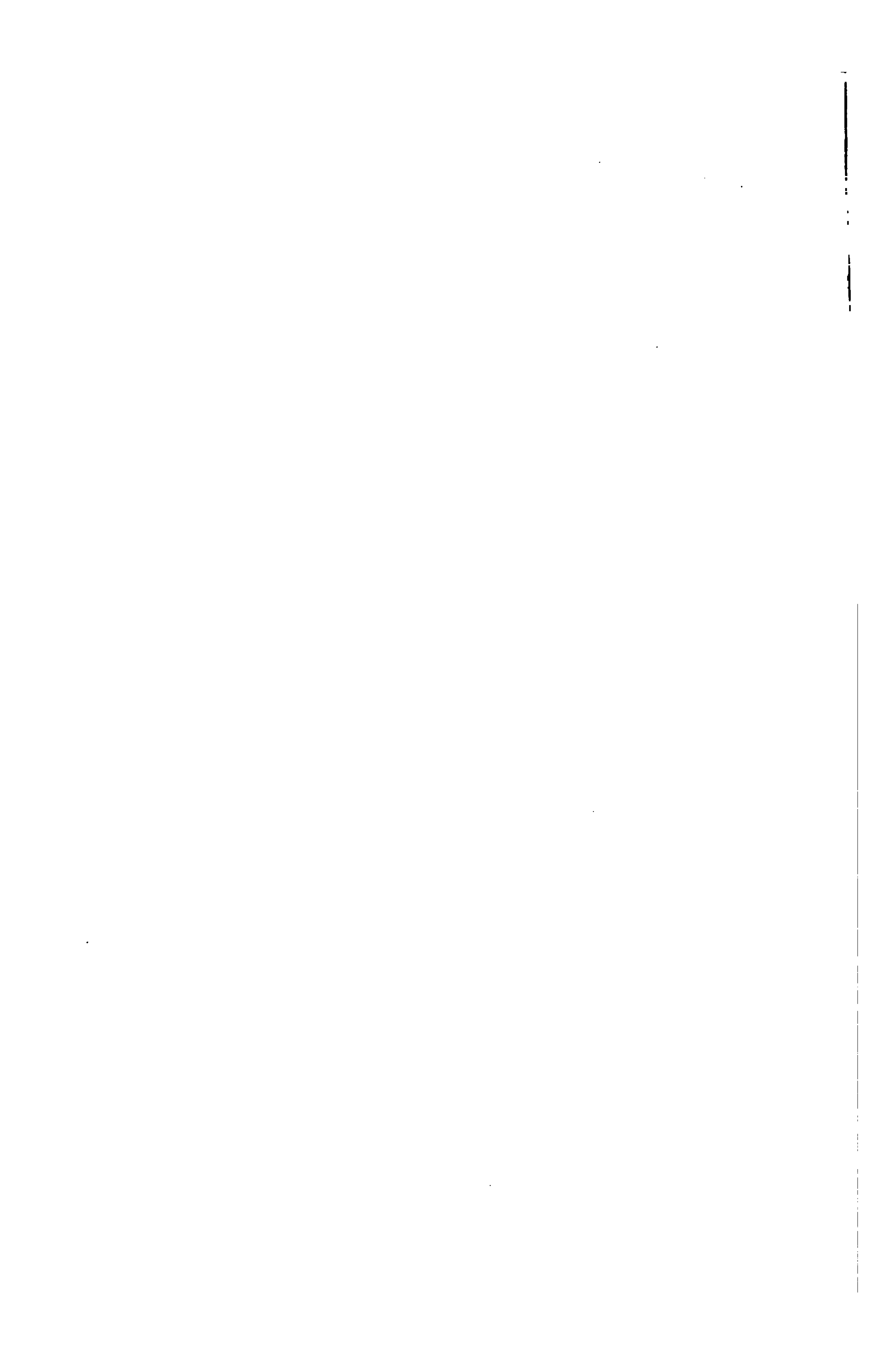
DURCH

WACHSENDE PFLANZEN

VON

W. PFEFFER.

MIT VIERZEHN HOLZSCHNITTEN.



Seinem lieben Lehrer und Freunde

Herrn

N. PRINGSHEIM

zu seinem siebzigsten Geburtstag

in Dankbarkeit und Verehrung

gewidmet

vom

Verfasser.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Einleitung 235

Allgemeines über Aussenleistungen. — Beziehungen zwischen Aussen- und Innenarbeit. — Literatur.

II. Methodisches 238

A. Das Eingipsen 238

Technik des Eingipsens und Behandlung der eingegipsten Objecte. — Widerstandsfähigkeit von Gips und von Gips-Cement. — Gipsguss und Lebensbedingungen. — Hinweis auf Anwendungen der Gipsmethode.

B. Das Eingipsen für Druckversuche 247

Eingipsen für Messung von Längs- und Querdruck. — Die Fixirung im Gipsguss.

C. Die Druckmessung 250

Die Apparate und deren Anwendung. — Fehlerquellen.

D. Druckmessung mittelst eines Kautschuckschlauches. 260

III. Die Druckleistungen der Wurzeln 262

A. Allgemeines über die Druckleistungen und die Druckhöhen 262

Zur Orientirung. — Uebersicht des Längs- und Querdruckes. — Bedingung für maximale Leistung, sowie Beziehung zwischen Längs- und Querdruck. — Wachsthumsdeformationen und Reduction des absoluten Druckes auf Flächeneinheit.

B. Längsdruck 270

Ohne allseitige Widerlage ist der Druck gering. — Die Berechnung und die Vertheilung der Druckintensität, sowie die Fehlerquellen. — Ungleiche Leistungsfähigkeit verschiedener Wurzeln und Bedeutung der Gestalt u. s. w. für die Leistung.

Seite

C. Querdruck 280
Berechnung der Druckintensität. — Verhältniss von Quer- und Längsdruck. — Absolute Druckleistung und Sprengung der Hülle. — Druck subapicaler Partieen und Einfluss des partiellen Eingipsens auf die Druckhöhe.

IV. Zeitlicher Verlauf der Druckentwicklung in Wurzeln 284
Versuche mit und ohne Druckherstellung zu Beginn des Versuches. — Fehler durch Volumänderung im Gipsguss. — Die Druckentwicklung beginnt mit dem Aufstossen der Wurzel. — Druckentwicklung und Wachsthumsschnelligkeit. — Verlauf des Querdrucks.

V. Die Mechanik der Aussenleistung durch Wurzeln 288

A. Vorbemerkungen 288
Die Energie wird durch die constante oder anschwellende Turgorkraft geliefert, indem diese durch Entspannung der Zellwand nach aussen gelenkt wird. — Verhalten bei Entfernung des Widerstandes. — Im Princip gilt gleiches bei Vorhandensein von Gewebespannung. — Orientirung über Constanz, resp. Anschwellen des Turgors.

B. Turgorverhältnisse 293

1) **Methodisches** 293
Plasmolytische- und Verkürzungs-Methode.

2) **Die Turgorregulation** 296
Eine Turgorschwellung tritt ein bei Faba, nicht bei Mais. — Differenz der Schwellung in verschiedenen Geweben und Genauigkeit der Curven. — Der Widerstand, resp. die hiermit erzielte Wachsthumshemmung veranlasst die Turgorregulation.— Verlauf der Turgorschwellung und der Hautentspannung. — Rückregulation nach Entfernen des Widerstandes. — Die Turgorregulation in anderen Pflanzen. — Turgorregulationen aus anderen Ursachen.

3) **Anschliessende Beobachtungen und Bemerkungen** 305
Kritisches über die benutzte Methodik. — Plasmolyse und Turgorhöhe im Urmeristem. — Die Turgorcurve in Keimstengeln. — Turgordehnung der Haut und Wachsthumscurve. — Veränderung der elastischen Dehnbarkeit durch Eingipsen.

C. Die Entspannung der Zellhaut 311
Die Zellwand wächst im Gipsverband bis zur Aufhebung der Turgordehnung. — Verlauf dieser Hautentspannung. — Entspannung in radialer Richtung. — Die Hautentspannung vollzieht sich in dem ganzen wachsthumsthätigen Wurzeltheil.

D. Schlussbetrachtungen 320
Durch das entspannende Flächenwachsthum in der Zellhaut wird die osmotische Energie gegen Widerstände gelenkt. — In zartwandigen Geweben kann die Aussenleistung die osmotische Energie nicht erheblich übertreffen.

Seite

VI. Wachsthum und Arbeitsleistung gegen Widerstände 323

A. Wachsthumsschnelligkeit und Aussenarbeit 323

Die Aussenarbeit erreicht bei gewissem Widerstand ein Maximum. — In Thon und Gelatine wird die Wachsthumsschnelligkeit nur wenig retardirt, die Aussenarbeit also gesteigert, d. h. der Widerstand veranlasst eine Vermehrung des Energieumsatzes und der Arbeitsleistung der Pflanze und deshalb ist die Aussenarbeit auch kein Maass für die Innenarbeit. — Die Energie für die Aussenarbeit liefert die Turgorkraft; das entspannende Hautwachsthum ist nur Mittel, um die osmotische Energie gegen die Widerlage zu lenken. — Die Betriebskraft für solches Flächenwachsthum muss also activ in der Zellwand, durch Ausscheidungsenergie, entwickelt werden. — Hinweis auf die Beziehungen zwischen Stoffwechsel (einschl. Athmung) und Wachsthumsarbeit.

B. Correlative Verschiebung der Wachsthumsthätigkeit 342

Wird das Wachsthum mechanisch unmöglich gemacht, so beginnt in der allein frei gelassenen Wurzelspitze ein sehr beschleunigtes Wachsen. Es ist dieses Folge einer correlativen Reizwirkung, die auch veranlasst, dass sich die übliche Wachsthumsvertheilung wieder herstellt, sobald es die Verhältnisse gestatten. — Hinweis auf die biologische Bedeutung eines solchen Verhaltens. — Ursache der geringen Dimensionsänderungen in dem in Gelatine fixirten Wurzeltheil.

C. Wachsthum nach längerem Eingipsen 351

Die wachsthumsfähige Zone wird verkürzt, die jüngeren Gewebe bewahren aber die Wachsthumsfähigkeit. — Wiederbeginn und Verlauf des Wachsens nach dem Entgipsen. — Die in der Wurzel von Faba vermehrte Turgorkraft erzielt keine plastische Dehnung der Zellwand.

VII. Anderweitige Reactionserfolge in der Wurzel 354

Das embryonale Gewebe bewahrt im Gipsverband seine Wachsthumsfähigkeit. — Mechanische Wachsthumshemmung beschleunigt, wie Decapitiren, Production und Ausbildung von Nebenwurzeln. — Im Gipsverband rückt die Gewebedifferenzirung näher gegen die Wurzelspitze. — Specielles über einige Wurzeln.

VIII. Ausblick auf die mechanische Action der Wurzel in der Natur 362

In gewöhnlichem und selbst steinigem Boden ist geringe Aussenarbeit nöthig, da die Wurzel Hindernisse umgeht. Für solche Inanspruchnahme genügt die Verankerung im Boden. — Verhalten beim Uebertritt in resistenteren Boden und umgekehrt. — Durchwanderung enger Spalten, Durchwachsen von Tuff,

Seite

Stanniol etc. — Grösse der mechanischen Druck- und Sprengleistung durch eine Wurzel und ein Wurzelsystem. — Die Keil- und Druckwirkungen der Wurzel und Hinweis auf verschiedene für den Erfolg in Betracht kommende Factoren. — Bemerkungen über die Sensilibität der Wurzelspitze für Berührung und über den Traumatropismus.

IX. Stengel von Keimpflanzen 375

A. Druckversuche 375

Thatsachen über Keimstengel. — Erfahrungen an Baumstämmen.

B. Turgorverhältnisse 377

C. Die Entspannung der Zellhaut 378

Zum Zwecke der Aussenleistung tritt partielle oder totale Entspannung der Haut ein. — Die Gewebespannung verschwindet nicht gänzlich. — Die positiv gespannten Gewebe arbeiten gegen die negativ gespannten wie gegen eine mechanische Widerlage.

D. Anderweitige Beobachtungen 381

Verkürzung der wachsthumsfähigen Zone im Gipsverband. — Anatomische Aenderungen und correlative Wirkungen durch die Wachsthumshemmung. — Absolute Druckhöhen. — Hinweis auf biologische Verhältnisse und auf Hebelwirkungen.

X. Algen 385

Spirogyra und Chara bleiben im Gipsverband lebend. — Die Aussenleistung wird durch Hautentspannung vermittelt. — Bemerkungen über die Aussenleistung.

XI. Versuche mit Grasknoten 388

A. Allgemeines 388

Methode zur Messung der Energie in der geotropischen Krümmung. — Der Blatttheil des Knotens ist allein geotropisch activ, doch bieten einzelne Gräser Abweichungen.

B. Druckleistungen 391

Mechanik der Krümmung. — Lage der neutralen Achse und des Schwerpunkts in Bezug auf die Druckberechnung. — Uebersicht und Discussion der Druckleistungen.

C. Turgorverhältnisse 398

Die geotropische Reizung erzielt nur in einzelnen Gräsern eine Turgorschwellung. — Die eventuell inducirte Turgordifferenz erhält sich bei Plasmolyse.

D. Die Mechanik der Aussenleistungen 400

Betrachtung der Mechanik der Krümmung mit Rücksicht auf die Gewebespannung. — Durch die nach aussen gelenkte Turgorenergie des Parenchyms sind die Collenchymstränge in Zugspannung gesetzt. Indem diese Zugspannung durch Wachsthum

Seite

des Collenchyms theilweise oder gänzlich aufgehoben wird, kommt es zu geringerer oder maximaler geotropischer Aussenleistung. — Zur Erreichung der Aussenleistung dient in principieller Hinsicht dieselbe Zellmechanik wie in Wurzeln. — Die Turgorenergie genügt für die hohen Druckleistungen. — Bei maximaler Aussenleistung ist im Collenchym die Turgordehnung der Zellwand aufgehoben. — Die Elasticität des Collenchyms macht eine plastische Verlängerung durch die im Knoten wirksamen Dehnkräfte unmöglich, die Collenchymwandung wächst also activ.

E. Vorgänge beim Ausführen der Krümmung 407
Faltungen und Zerreissungen beim Krümmen. — Wachsthumsregulation in den ungleich schnell wachsenden Zonen. — Aussenleistung halbirter Knoten. — Die auf die Krümmung des passiven Stengeltheils im Knoten aufzuwendende Energie. — Die statischen Momente horizontal liegender Halme.

F. Bemerkungen über die Krümmungsmechanik . . . 411
Allgemeine Bedingungen für das Krümmen. — Die mechanische Vermittlung ist nicht immer dieselbe. — Krümmung in einer Zelle und in einem Gewebe. — Die Veränderungen der Biegungselasticität in geotropisch inducirten Pflanzen sind nicht eindeutig.

XII. Rückblick 418
Allgemeinheit der Aussenleistungen und Bedingungen für diese. — Grösse der Druck- und Arbeitsleistung. — Verhalten bei Veränderung des äusseren Widerstands. — Arbeitsgrösse und Wachsthumsschnelligkeit. — Correlative Reactionen und Einfluss von Gewebespannungen. — Erhaltung des embryonalen Gewebes bei mechanischer Hemmung. — Die Aussenarbeit wird durch osmotische Energie geleistet; die Hautentspannung wirkt nur vermittelnd. Active Pressung durch actives Hautwachsthum ist zur Zeit nicht völlig sicher gestellt. — Die Gestaltung der Leistungsmechanik bei Vorhandensein von Gewebespannung. — Die Widerlage, resp. die Hemmung des Wachsens kommen für die regulatorisch gelenkten Actionen als Reizanstoss in Betracht.

XIII. Ergebnisse in Bezug auf die Wachsthumsmechanik der Zellhaut 429
Erörterungen über die Energiequellen für den Betrieb des Flächenwachsthums. — Aus dem zum Entspannen führenden Flächenwachsthum folgt, dass die Energie durch Intussusception geliefert werden muss. — Die Turgordehnung hat eventuell nur formale Bedeutung. — Die Wachsthumsmechanik kann Differenzen bieten; eine regulatorische Lenkung ist aber immer nöthig.

Seite

XIV. Belege 440

Abth. I. Druckversuche mit Wurzeln von Keimpflanzen 440

A. Messungen des Längsdruckes der Wurzeln von Keimpflanzen 442

B. Messungen des Querdruckes an Wurzeln von Keimpflanzen 450

C. Druckentwicklung der nicht eingegipsten Wurzel 459

Abth. II. Vergleichende Versuche über die Wachsthumsschnelligkeit von Keimwurzeln in flüssigem und festem Thon, resp. in Gelatine 460

Abth. III. Wachsthumsbeschleunigung in der Wurzelspitze nach Einschmelzen in Gelatine . . . 463

Abth. IV. Wachsthum nach längerem Eingipsen 468

Abth. V. Druckversuche mit Keimstengeln 469

Abth. VI. Druckmessungen mit Grasknoten 471

I. Einleitung.

Wachsthum und Bewegung erfordern naturgemäss einen entsprechenden Aufwand von Energie zur Ueberwindung innerer und äusserer Widerstände. Der numerische Werth dieser letzteren ist nicht nur im Experiment, sondern auch in den natürlichen Vegetationsbedingungen in weiten Grenzen veränderlich. Während z. B. eine Wurzel eine ansehnliche Aussenarbeit vollbringt, wenn sie in einem zähen Lehmboden fortwächst oder einen Stein auseinandertreibt, geht diese Aussenarbeit beim Wachsen in Luft oder in Wasser auf einen sehr geringen Betrag zurück.

Diese und andere hohe Aussenleistungen durch Wurzeln, Stämme u. s. w. vollziehen sich so offenkundig, dass sie den Beobachtern ältester Zeit auffallen mussten. Messende Versuche sind dagegen spärlich und diejenigen Experimente, welche sich mit einer einfachen Constatirung eines hohen Gesammtdruckes zufrieden gaben, ohne mindestens eine Reduction auf vergleichbare Einheiten zu versuchen, bringen nur eine Bestätigung dessen, was schon die oberflächliche Naturbeobachtung lehrt, dass nämlich eine sehr hohe Energiesumme gegen eine Widerlage durch die wachsende Pflanze entwickelt werden kann. Ein. Eindringen in die Causalität dieser Aussenleistungen wurde aber nicht versucht, und wenn etwa für letztere die Wachsthumskraft verantwortlich gemacht wird, so ist damit natürlich in keiner Weise eine nähere Erklärung gegeben, so lange nicht diese Wachsthumskraft in die massgebenden und wirkenden Factoren zergliedert wird.

Eine allgemeine Betrachtung über die Mittel und Wege für die Leistungen der Pflanze, sowie über die Beziehungen zwischen Innen- und Aussenleistungen, wurde wohl zuerst in meiner Physiologie

versucht[1]). In jüngster Zeit unterzog ich dann dieses Thema einer kritischen Studie[2]), aus welcher genugsam zu ersehen ist, wie unzureichend unsere Kenntnisse in Bezug auf die Aussenleistungen durch wachsende Pflanzen sind, wie aber ein tieferer Einblick in die Genesis derselben ein weitgehendes physiologisches Interesse hat.

Es ist ja schon von hoher Wichtigkeit aufzuklären, wie und wodurch die Pflanze eine je nach den gebotenen Verhältnissen grössere oder geringere Energie gegen Widerstände aufzuwenden, also in zweckentsprechender Weise regulatorisch zu arbeiten vermag. Solche Fähigkeit und Thätigkeit sind aber der Ausfluss von Functionen der lebensthätigen Pflanze. Demgemäss führt die causale Aufhellung der Aussenleistungen direct in das Innengetriebe der Pflanze, deren Reactions- und Arbeitsvermögen es ja zu verdanken ist, dass, je nach Umständen, ein grösserer oder kleinerer Theil der ihr zur Verfügung stehenden Energie- und Betriebsmittel für Aussenleistungen nutzbar gemacht wird.

In Erwägung dieser genetischen Verkettung gewinnen aber die Aussenleistungen um so mehr ein höheres Interesse, als in ihnen Intensität und Quantität der Energie nach Maass und Zahl bestimmbar sind, während eine derartige Messung der im Wachsen aufgewandten Innenarbeit wenigstens zur Zeit nicht möglich ist. Auf gewisse Factoren dieser Innenarbeit können aber in der That Rückschlüsse aus der bemessenen Aussenleistung gezogen werden, die ja thatsächlich durch die im Wachsthum thätigen und mitwirkenden Energiemittel betrieben wird. Eine auch nur annähernde Kenntniss der activen Energie kann aber zuweilen gestatten[3]), die mögliche Realisirung innerer Vorgänge zu präcisiren oder mindestens einzuengen, da natürlich eine jede Deutung ausgeschlossen ist, welche dem Postulate zureichender Energie nicht Genüge leistet.

Aussen- und Innenarbeit sind übrigens nicht immer scharf auseinander zu halten[4]). Denn für eine Zelle, für ein Gewebe kommt das umgebende Gewebe durch seine passiven oder activen Kräfte

1) Pflanzenphysiologie 1881, Bd. II, p. 1.

2) Studien zur Energetik der Pflanze 1892.

3) Siehe z. B. Pfeffer, Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen 1890, p. 329.

4) Vgl. Pfeffer, Energetik 1892, p. 160.

in analogem Sinne in Betracht, wie ein von aussen wirksamer mechanischer Widerstand oder Zug und die rein mechanische Bedeutung von Wirkung und Gegenwirkung fällt natürlich stets ins Gewicht, in welcher Weise immerhin die correlativen Beeinflussungen der lebendigen Gewebe das Ausmaass dieser mechanischen Grössen reguliren mögen. Solche mechanische Wirkungen von theilweise hoher Energie sind z. B. in Gewebespannungen, im Durchbruch endogener Sprossungen geboten. Aber auch das Auseinandertreiben der Knospenschuppen durch den wachsenden Spross, und die Hebung der Last des Pflanzenkörpers durch Wachsthums- und Krümmungsvorgänge gehören hierher.

Unter den angedeuteten Gesichtspunkten wurden bereits in den »Studien zur Energetik« die Aussenleistungen wachsender Pflanzen betrachtet. Doch musste ich mich auf allgemeine Erwägungen schon deshalb beschränken, weil specielle Studien über dieses Thema in der Literatur nicht vorlagen und damals nur ein Theil derjenigen Untersuchungen ausgeführt war, welche den Gegenstand dieser Abhandlung bilden. In den allgemeinen Entwickelungen in der Energetik ist übrigens der allgemeine Rahmen richtig gekennzeichnet, innerhalb dessen allerdings diese Arbeit zahlreiche Erweiterungen und Präcisirungen bringt.

Uebrigens ist auch hier nur eine Studie über die allgemeinen Principien und nächsten Ursachen der Aussenleistungen, nicht aber eine ausgedehnte Schilderung der damit verknüpften biologischen Eigenthümlichkeiten beabsichtigt. In Rücksicht auf dieses Ziel waren kritische Untersuchungen an richtig gewählten Versuchsobjecten wichtiger, als eine Anhäufung von Beobachtungen über eine Summe biologischer Besonderheiten.

In erster Linie wurden Wurzeln studirt, welche vermöge ihrer Lebensweise vielfach gegen veränderliche äussere Widerstände zu arbeiten haben. Im Anschluss an diese wurden ferner Keimstengel und einige Algen in den Kreis der Untersuchungen gezogen. Ausserdem fanden die geotropischen Wachsthumskrümmungen der Knoten im Halme der Gräser besondere Berücksichtigung.

Zu Reactionen gegen mechanische Widerstände sind vermöge und während des Wachsthums alle Pflanzen befähigt, während nach dem Auswachsen auffällige vitale Bewegungen nicht allen Pflanzen

zukommen. Die Leistungen durch solche Variationsbewegungen, wie sie die Staubfäden der Cynareen und die Pflanzen mit nyctitropischen Bewegungen u. s. w. ausführen, sind übrigens in den »Studien zur Energetik« genugsam berücksichtigt, um, soweit es nöthig erscheint, auf letztere Bezug nehmen zu können. Hier halten wir uns zunächst nur an die durch wachsende Pflanzen erzielten und vermittelten Vorgänge, und da wir diese Pflanzen stets in einem turgescenten Zustand voraussetzen, haben wir nicht die Effecte zu berücksichtigen, welche bei Zufuhr und Abfuhr von Wasser durch Turgorvariation und Quellung erreichbar sind[1]). Ebenso fordern die mit dem Absterben erzielten Reactionen gegen die Aussenwelt keine Beachtung.

Abgesehen von den schon genannten Arbeiten gibt es eine auf das allgemeine Wesen und das Zustandekommen der Aussenleistungen bezügliche Literatur nicht. Die einzelnen auf unser Thema bezüglichen oder mit ihm zusammenhängenden Beobachtungen, so die von Duhamel, Darwin, Clark, N. J. C. Müller, Krabbe u. s. w., werden besser an der entsprechenden Stelle berücksichtigt.

Hier aber habe ich dankend der Unterstützung zu gedenken, welche mir, insbesondere in der wiederholten Controle der plasmolytischen Studien und in der Ausdehnung dieser auf verschiedene Objecte, durch meine Assistenten Herrn Dr. Klemm und Herrn Dr. Benecke, zu Theil wurde.

II. Methodisches.

In diesem Kapitel sollen nur die Mittel und Wege geschildert werden, welche zur Gewinnung einer festen Widerlage und zur Messung der Druckwirkungen benutzt wurden, während die auf andere Ziele berechneten Methoden besser an der zugehörigen Stelle behandelt werden.

A. Das Eingipsen.

Zur Herstellung einer festen Widerlage hat sich bis dahin am besten ein Gipsverband bewährt, der im hiesigen Institut schon seit

1) Vgl. Pfeffer, Studien zur Energetik 1892, p. 237.

einigen Jahren zu verschiedenen Zwecken erfolgreich angewandt wurde[1]. Einen solchen Verband gewinnt man durch Anrühren von gebranntem Gips mit Wasser und Einbettung der Objecte in diesen Gipsbrei, welcher bekanntlich bald erstarrt und nun eine harte, sich allseitig anschmiegende Masse bildet. In der näheren Ausführung der Operationen muss natürlich den Objecten und den erstrebten Zielen gebührende Rechnung getragen werden, doch dürften die nachfolgenden Erörterungen und Beispiele genügen, um die der mannigfachsten Anwendung fähige Methode Jedermann zugänglich zu machen.

Die Herstellung einer äusseren Form für Aufnahme des Gipsbreies ist im Allgemeinen ohne Schwierigkeit zu erreichen. Handelt es sich z. B. um Wurzeln u. s. w., so benutze ich einen unten geschlossenen, mit arabischem Gummi verklebten Cylinder aus Schreibpapier. Nach Eingiessen des Gipsbreies stecke ich in diesen die Wurzel, lege die ganze Masse, sobald der Gips genügend fest geworden ist, in Wasser und entferne späterhin die nun leicht abzulösende Papierhülle.

Soll z. B. der Stengel einer im Topfe verbleibenden Keimpflanze umhüllt werden, so pflege ich den übergestülpten offenen Papiercylinder unten mit plastischem Thone zu schliessen. Auf diese Weise oder auch unter Verwendung von gespaltenen Korken, Pappscheiben (nöthigenfalls unter gleichzeitiger Verwendung von Thon) ist es auch möglich geeignete Gussformen an beliebigen Stellen von Stengeln, Blättern u. s. w. anzubringen und somit einen localisirten Gipsverband herzustellen. Wie noch fernerhin gezeigt werden soll, können in einem solchen Gipsverband Fensterchen ausgespart, also gewisse Partien der Pflanzenorgane frei gehalten werden.

In anderen Fällen empfiehlt es sich die Objecte in etwas Gipsbrei zwischen zwei Glasplatten zu bringen und diese je nach Bedürfniss, nur wenig, oder auch so weit durch Druck gegenseitig zu nähern, dass die Pflanzentheile an die Glaswand stossen oder wenigstens durchscheinen. Solche Gussplatten können sowohl isolirt werden,

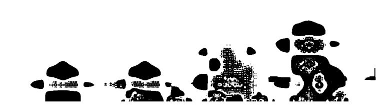
---

1) Eine vorläufige Mittheilung über die Methode machte ich in »Berichte d. Sächs. Ges. d. Wissenschaften« 1892, p. 539. Hinweise auf die Verwendung eines Gipsverbandes finden sich ebenda 1891, p. 642 und in meinen »Studien zur Energetik« 1892, p. 78.

[illegible] …en, Bindfaden, Klemmschrauben u…
[illegible] …alten werden. Zur Veranschauli…
…ag die nebenstehende Fig. 1 di…
…e stellt eine Keimpflanze von Vicia
…or, deren Wurzel durch ihr Wachs…
…ereits eine Sprengung der Gips…
…rzielte (diese Sprengung wird in
…III behandelt).

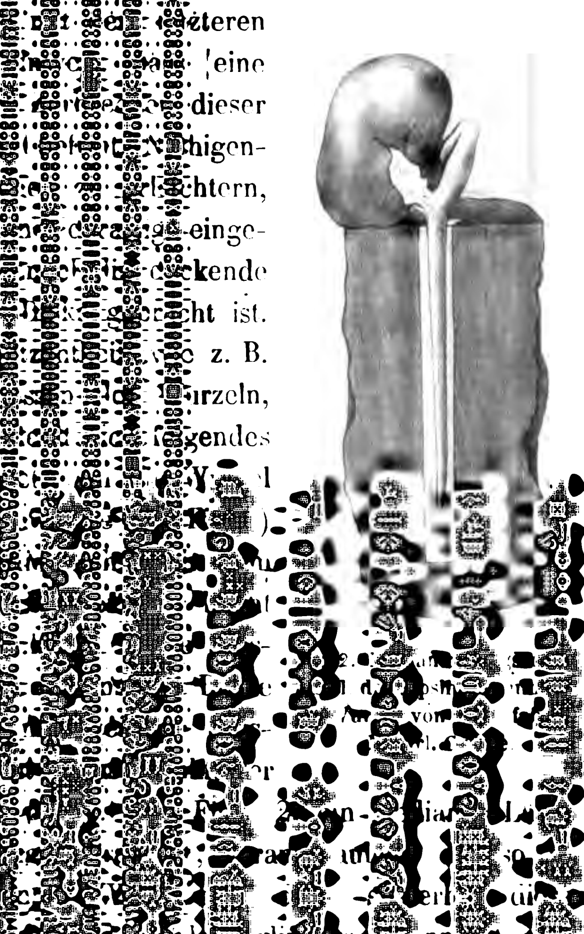
Durch dünne Gipslagen dringt
…ügend Licht, um in grünen Pflanze…
nöthige Productionsthätigkeit zu …
halten. In der That erhielten sic…
solcher Zwangslage Algenfäden, Ni…
Chara u. s. w. durch Wochen und M…
lebend, als die Präparate bei mäs…
Beleuchtung in verdünnter Nährlö…
oder in Wasser gehalten wurden, …
mit ausgefaulter Erde in Berührung st…
In solchem Gipsverband lässt sich bei …
tella und Chara, an geeigneten Stellen …
Fortdauer der normalen Plasmaströ…
direct beobachten und bei Spiro…
u. s. w. kann man wenigstens direc…
[illegible] …n controliren. Uebrigens empfiehl…
[illegible] …nten der zwischen Glas eingeschloss…
[illegible] Dicke und auch mässige Breite zu geben.

[illegible]



... Verband nass zu erhalten —
... zeln ausgeübten Druckes —
... umhüllt, das durch Saug-
... menge zugeführt erhielt. In
... es Gipswasser in Anwendung,
... sehr schwer löslichen Gipses

... anzentheile wurden, je nach
... oder auch dem Austrocknen
... e Versuche ebensowohl an
... usgeführt werden.
... wierig, die eingegipste Pflanze
... zu befreien. Handelt es sich
... Gips hervorsehenden Stengel,
... zteren
... eine
... dieser
... higen-
... chtern,
... einge-
... kende
... ht ist.
... z. B.
... urzeln,
... gendes



schneidet, so stösst man zunächst auf die gut markirte weisse Gipsplatte. Legt man nun die beiden Schmalseiten dieser Platte frei, so gelingt es nach zuvorigem Einlegen in Wasser unschwer, die in zwei Hälften zerlegte Masse des Hüllgipses zu entfernen. Die Befreiung der Pflanze durch Zerbrechen der Gipsplatte geschieht darauf in der schon beschriebenen Weise. In welcher Art an der in der Gipshülle befindlichen Wurzel Messungen an aufgesetzten Marken ausführbar sind, wird späterhin dargethan werden.

Auch Chara, sowie dünne Algenfäden konnte ich aus ihrer Gipshülle befreien, indem ich die dünne Gipsplatte durch Stechen und Drücken vermittelst einer Nadel zertrümmerte und die Gipsstücke mit Hilfe von Pinsel und Nadel entfernte.

Die Härte und Widerstandsfähigkeit des Gipsgusses fällt je nach der angewandten Wassermasse sehr verschieden aus. Während der mit viel Wasser angerührte Gips so weich bleibt, dass sich wachsende Wurzeln in ihn einbohren, macht der härtere Gips jedes Vordringen von Pflanzen in ihm unmöglich, bildet also eine unverrückbare Widerlage, vorausgesetzt dass keine Sprengung der Gipshülle eintritt. Genügt zur Erreichung dieses Zieles bei kleinen Objecten schon eine geringe Dicke der Gipsmasse, so trifft dieses nicht mehr bei grösseren Pflanzentheilen zu. Schon die wenig mächtige Wurzel von Vicia faba muss, bei Anwendung einer festen Gipsmasse, mit einem Cylindermantel von 1 bis 1,5 cm Durchmesser umkleidet werden, um gegen eine Sprengung vollständig gesichert sein (vgl. Fig. 2). Bei dicken Stengeln oder Baumstämmchen ist die Gipshülle allein unzureichend, doch gewinnt man genügende Widerstandskraft indem man die Gipshülle mit Bindfaden oder mit einer Anzahl überzinnter Eisenringe umgibt und das Ganze mit einem weiteren Gipsguss umkleidet. Hierdurch, oder indem man den Gips als Füllmasse einer soliden oder durchbrochenen Eisenform benutzt, ist stets eine ausreichende Widerstandskraft zu erzielen. Denn wenn es sich nicht um Zerbrechen und Zerreissen, sondern nur um Compression handelt, besitzt eine harte Gipsmasse eine ausreichende Resistenz. So wurde z. B. keine Deformation merklich, als auf eine 8 mm dicke Gipsplatte zwischen zwei ebenen Metallplatten von 12,8 qmm Oberfläche ein Druck von 250 kg, d. h. von 19,5 kg auf das qmm wirkte.

Eine noch resistentere Gussmasse, deren man übrigens in physiologischen Experimenten zumeist nicht bedürfen wird, erhält man durch Verwendung eines Gemisches von 1 Theil gebranntem Gips und 3 Theilen Portlandcement. Mit Wasser angerührt erstarrt diese Masse durch den Gips ziemlich schnell, erreicht aber in Folge der nur langsamen Reaction des Cements erst nach einigen Tagen die volle Härte. Da ausserdem die Objecte aus diesem Gusse schlechter zu befreien sind, so ist seine Anwendung nur da zu empfehlen, wo die Festigkeit des Gipses nicht ausreicht.

Da der gebrannte Gips je nach Reinheit und Darstellung nicht ganz gleichwerthig ist, lässt sich die zweckmässig anzuwendende Wassermenge nicht allgemein angeben. Der von mir benutzte käufliche gebrannte Gips lieferte den gewünschten Härtegrad, wenn er mit soviel Wasser angerührt wurde, dass der zunächst flüssigere Brei nach 2 bis 3 Minuten dickflüssiger wurde und nach 6 bis 10 Minuten zu einer schon recht harten Masse erstarrt war. Es ergab sich, dass zu diesem Ziele annähernd gleiche Gewichtstheile von Gips und Wasser zu mischen waren. 10 Theile Gips und 15 Theile Wasser lieferten eine Gipsmasse, welche für die meisten Versuche schon zu weich war. Aber wenn auch durch eine geringere Wassermenge ein härterer Gips erzielt wird, so wird doch immer eine poröse, von überschüssigem Wasser durchzogene Masse gewonnen, da der gebrannte Gips zur Wiedergewinnung der verlorenen 2 Moleküle Wasser ungefähr nur $\frac{1}{4}$ seines Gewichts an Wasser bedarf. Ein solcher Wasserüberschuss ist übrigens nothwendig, damit die Gipsmasse die umschlossenen Pflanzen mit Wasser vollständig versorgen kann, resp. nicht Wasser entziehend wirkt.

In dem Processe der Wasseraufnahme werden die Körnchen des gebrannten Gipses — wie mikroskopisch leicht zu ersehen ist — durch Auflösen und Auskrystallisiren allmählich in kleine Nadeln verwandelt. Dieserhalb hat das Korn des gebrannten Gipses wohl auf den zeitlichen Verlauf der Reaction, nicht aber auf die endliche Gestaltung des Productes einen wesentlichen Einfluss. Doch ist es, schon der Reinheit halber, vortheilhaft für Einbettung von Algenfäden u. s. w. den feinsten Stuckgips anzuwenden, während für grössere Objecte zumeist eine gute Qualität des grobkörnigeren, in der Technik gebräuchlichen Gipses den Vorzug verdient. Der Umwandlungsprocess

(dessen zeitlicher Verlauf natürlich ein Maximum besitzt) ist bei solchem Gipse erst nach 16 bis 24 Stunden annähernd vollendet, d. h. dieser Process schreitet noch fort, nachdem der Gips längst zu fester Masse erstarrt ist. Erst nachdem dieses erreicht ist tritt das Maximum der Erwärmung ein, die übrigens im Allgemeinen nicht auf eine schädlich wirkende Höhe ansteigt und stets auf ein geringes Maass gebracht werden kann, indem man die eben erstarrte Gipsmasse zur Abkühlung in viel Wasser bringt. Wie und warum durch ihre Umwandlung die Gipsmasse einen Druck gegen äussere Widerlagen und gegen umschlossene Körper entwickelt, soll erst späterhin kurz mitgetheilt werden.

Der nur in geringer Menge in Wasser lösliche Gips wirkt im Allgemeinen nicht nachtheilig auf Pflanzen, doch darf natürlich das angewandte Material kein Schwefelcalcium oder andere schädliche Stoffe enthalten. Thatsächlich gedeihen die Pflanzen vortrefflich, wenn ihre Wurzeln sich in einem Gemisch aus viel Gipspulver mit wenig Gartenerde befinden und in diesem Medium ergeben die Wurzeln von Vicia faba dieselbe Zuwachsschnelligkeit wie in Gartenerde. Ebenso wurde für diese Wurzeln bei Vergleich von nahezu gipsfreiem und mit Gips gesättigtem Leitungswasser dieselbe Wachsthumsschnelligkeit gefunden. Auch Chara und viele Algen gedeihen normal in gipsgesättigtem Wasser.

Da eine gesättigte Gipslösung ungefähr mit einer 0,1 procentigen Salpeterlösung (also annähernd mit einer verdünnten Wasserculturlösung) isotonisch ist, so ist verständlich, dass die gesättigte Gipslösung durch ihre osmotische Leistung nicht hemmend auf das Wachsthum wirkt. Wasser löst nämlich bei gewöhnlicher Temperatur ungefähr 0,21 Proc. wasserfreies Calciumsulfat[1]) und unter der sicher annähernd zutreffenden Voraussetzung, dass im Vergleich zu Kalisalpeter (Molekulargewicht 101) in äquimolekularer Lösung für Calciumsulfat (Molekulargewicht 136) eine ähnliche Relation besteht wie für Magnesiasulfat, dass also die osmotische Leistung $\frac{1}{2}$ von der des Salpeters beträgt[2]), ergibt sich, dass 204 Gewichtstheile Calciumsulfat mit 101 Gewichtstheilen Kalisalpeter isosmotisch sind.

---

1) Vgl. z. B. Koller, Praktische Herstellung von Lösungen 1888, p. 105.
2) de Vries, Jahrb. f. wiss. Bot. 1884, Bd. XIV, p. 537.

Hinsichtlich der Wasserversorgung sind die von der wasserdurchtränkten Gipsmasse umgebenen Pflanzentheile wohl ebenso gut situirt wie im Boden oder wie die in Gelatine eingebetteten Pflanzentheile.

Eine zureichende Versorgung mit Sauerstoff in den gegebenen Versuchsbedingungen ergibt sich unmittelbar aus der Fortdauer der Lebensthätigkeit und aus den diese anzeigenden Wachsthumsbestrebungen. Bezüglich der Sauerstoffversorgung mag sich die Pflanze in der Gipsmasse etwa in ähnlicher Lage befinden, wie in einer gleich geformten Gelatinemasse oder in einer ruhenden oder doch nur sehr wenig bewegten Wassermasse. Und wenn die Diffusion allein durch diese Medien nicht immer ausreichen wird, um einen ausgiebigeren Sauerstoffconsum zu decken, so wird doch einmal mit der Wasseraufnahme eine Bewegung geschaffen, welche die Zufuhr gelöster Stoffe beschleunigt und ferner wird durch die in Luft befindlichen Organe auch eine Zufuhr von Sauerstoff zu den im Gips steckenden Pflanzentheilen vermittelt. Auf solche Weise wird auch die Sauerstoffversorgung der im Schlamm steckenden Wurzeln von Wasserpflanzen erreicht und Runkelrüben, Kartoffeln u. s. w. lehren, dass bis ins Innere von Pflanzentheilen, also auf weitere Strecken, der Sauerstoff auch dann in ausreichender Quantität befördert wird, wenn das Gewebe nur von engeren Intercellularräumen durchsetzt ist.

Auch ergaben directe Versuche, dass die umgipste Wurzel von Faba genügend mit Sauerstoff versorgt wurde, wenn nur die von der Schale umhüllten Samenlappen und ein am Schluss des Versuches 25 mm langer Spross sich in Luft befanden. Zu diesen Versuchen diente ein Gipscylinder mit einem längeren cylindrischen Canal von 5 mm Durchmesser, dessen eine Seite mit einer Glasscheibe luftdicht geschlossen war. Nach Einführung der zu Beginn 40 mm langen Wurzel wurde der basale Theil dieser bis an die Samenschale umgipst und so der Canal geschlossen. Darauf wurde vermittelst zweier eingegipster Glasröhrchen durch den Canal ein Strom luftfreien Wassers geleitet und nach Abschluss der Röhrchen der Gipscylinder in lufthaltiges Leitungswasser gestellt. In zwei derartigen Versuchen ergab die durch die Glasscheibe ermöglichte Messung, dass eine solche Wurzel in den ersten und den folgenden 24 Stunden denselben Zuwachs wie eine in Wasser befindliche Controlwurzel erreichte. Uebrigens würde unzureichende Sauerstoff-

versorgung durch Verlangsamung der Wachsthumsthätigkeit immer nur zu einer Depression der Druckleistung führen können.

Bei den in Gips eingebetteten Algen fällt natürlich die Sauerstoffproduction während der Beleuchtungszeit ins Gewicht. Doch auch ohne solche gelangt genügend Sauerstoff zu Sprossstücken von Nitella, welche in der beschriebenen Weise zwischen Glasplatten allseitig von Gips umschlossen waren. Denn in solchen Objecten erhielt sich die Plasmaströmung ungeschwächt während sechstägigem Aufenthalt im Dunkeln.

In allen Experimenten mit lichtbedürftigen Pflanzenorganen ist es ein Nachtheil, dass durch dickere Gypshüllen nur wenig oder kein Licht dringt und dieserhalb sind die Wurzeln, deren Leben sich normal im Dunklen abspielt, besonders werthvolle Versuchsobjecte. Eine geeignete Masse für Herstellung eines durchsichtigen und ausreichend resistenten Verbandes ist zur Zeit nicht bekannt. Gelatine und Agar bieten nicht den genügenden Widerstand. Mit wasserdurchtränkter Celloidinmasse[1]), die noch gelegentlich Erwähnung finden wird, ist ein Umgiessen der Pflanzen ebensowenig möglich, wie mit Glas oder Glimmer, die beide den Austausch mit der Umgebung absperren würden.

Immerhin ist der Gipsverband zu vielseitiger Verwendung in allen den Fällen geeignet, in welchen es sich um mechanische Hemmungen des normalen Wachsens und um die dadurch veranlassten Wachsthums- und Gestaltungsvorgänge handelt, oder auch um das Studium derjenigen Vorgänge des Stoff- und Kraftwechsels, die im Verband mit jenen Thätigkeiten fortlaufen oder modificirt werden. Die Permeabilität des Gipses gestattet zugleich lösliche Stoffe zuzuführen oder abzuführen und auch in dieser Hinsicht hat die Gipsmethode bereits im hiesigen Institute erfolgreiche Anwendung gefunden. Ebenso habe ich das locale Umgipsen vielfach zum Festhalten von Pflanzentheilen benutzt.

---

1) Eine solche Masse erhält man bekanntlich, wenn man die in eine Form gebrachte Celloidinlösung mit 80% Alkohol härtet und dann den Alkohol durch Wasser verdrängt. Scheiben aus solcher Masse dürften nach Durchtränkung mit Nährlösung auch als fester durchsichtiger Culturboden für Bacterien verwendbar sein.

B. Das Eingipsen für Druckversuche.

Kommt die Pflanze in einen aus zwei aneinander schliessenden Theilstücken zusammengesetzten Gipsverband und wird die zur Hemmung des Auseinandertreibens nöthige Gegenwirkung ermittelt, so ist damit ein Maass für die mechanische Leistung der Pflanze gegeben. Ehe wir näher auf diese Messmethode eingehen können, muss die Herstellung des geeigneten Gipsverbandes geschildert werden, doch genügt es, an einige concrete Fälle anzuknüpfen.

Für Ermittelung des Druckes, welchen in Richtung der Längsachse eine Wurzel ausübt, bringe ich eine Keimpflanze derartig in einen mit feuchten Sägespänen oder mit Erde gefüllten Blumentopf, dass die Wurzel eine genügende Strecke (etwa 15 bis 30 mm) aus dem Loche des Topfes hervorsieht, wie des näheren aus Fig. 3 (p. 251) zu entnehmen ist. Nunmehr wird der Topf, nach Auflegen eines Deckels, umgekehrt und der hervorstehende Wurzeltheil mit Gipsbrei umgossen. Sogleich darauf schiebe ich über die Wurzelspitze ein (mit Hilfe einer heissen Nadel) durchlochtes Stückchen Wachspapier und drücke dieses mittelst einer durchlochten Platte (aus Celluloid oder Glas) derart gegen den Brei, dass die gewünschte Strecke der Wurzelspitze frei von dem mit dem Topfe verbundenen Gipsguss bleibt, dass also das Gipsstück *a* (Fig. 3) gewonnen ist. Sobald der Gips genügend erhärtet ist, wird das Wachspapier entfernt, an dessen Stelle dünnes, nasses Seidenpapier der Gipsfläche angeschmiegt und nun die Gipskappe *b* gebildet.

Die Druckmessung wird darauf in der durch Fig. 3 versinnlichten Weise ausgeführt. Da das nass zu haltende Seidenpapier eine nur geringe Adhäsion der kleinen Gipskappe bedingt, so ist dessen Anwesenheit kein Hinderniss, jedoch wurde diese Papierzwischenlage öfters zuvor entfernt. Es gelingt dieses leicht, da die erhärtete Gipskappe nach Aufenthalt in Wasser leicht und ohne eine Beschädigung des Wurzel abgezogen werden kann. Nunmehr hat man auch Gelegenheit vor dem Wiederaufsetzen das Loch in der Gipskappe mittelst einer Nadel zu vertiefen oder in gewünschter Weise zu formen, so dass die Wurzel erst nach entsprechendem Wachsthum dem Gipse angepresst wird. Bei völliger Durchbohrung wird also die Wurzel aus dem Gipse hervorwachsen, resp. vermittelst

ihrer Spitze direct gegen die Glasplatte *c* der Fig. 3 wirken. Um allein diesen Spitzendruck zu messen, muss aber die Kappe *b* (Fig. 3) mit dem Gipsklotz *a* durch Umgiessen mit Gips unverrückbar verbunden werden.

Dem Gipsguss *a* pflege ich mit Hülfe eines Ringes aus Papier (oder plastischem Thon) die gewünschte Form zu geben, ebenso dem Gipsdeckel *b*, welchen man nach dem Abheben auch noch entsprechend zurecht schneiden kann, um die Contactfläche gegen *a* zu vermindern.

Indem man den Gipsguss *a*, wie auch in der Zeichnung angedeutet ist, ein wenig in das Innere des Topfes übergreifen lässt, ist für genügende Fixirung an den Topf gesorgt. Durch Anbringung einiger weiteren Löcher im Umkreise der centralen Durchbohrung des Topfes und durch entsprechende Ausbreitung des Gipsgusses auf der Bodenfläche wurde für noch weitergehende Befestigung des Gipses an den Topf in denjenigen Versuchen gesorgt, in welchem die Gipsmasse die Last des zur Messung des Querdruckes dienenden Apparates zu tragen hatte. Eine Unterlage von Papier, die für die Durchführung des Wurzel durchbohrt ist, genügt, um eine Ausbreitung des Gipsbreies in den Sägespänen zu verhindern.

Aus der Fig. 4 (p. 253), in welcher der Gipsguss im Längsschnitt dargestellt ist, ist die Gestaltung des Gipsgusses zur Messung des Querdruckes am besten zu erkennen. Die eine Längshälfte des Spitzentheils der Wurzel ruht in einer Rille der Gipsmasse *a*, welche den übrigen Wurzeltheil ganz umschliesst. Die andere Längshälfte der Wurzel wird vom Deckel *b* umschlossen, welcher also der Wurzel und auch der Gipsmasse *a* eng angeschmiegt ist.

Zur Darstellung dieses Verbandes bringe ich zunächst den Basaltheil der Wurzel bis zum Deckel in der schon beschriebenen Weise in einen Gipsverband. Auf die ebene Endfläche dieses wird dann der zunächst aus Plastilina hergestellte Deckel in der durch die Figur repräsentirten Lage fixirt und dann die weitere Gipsmasse *a* angegossen. Nach Erhärtung des Gipses und nach Entfernung der Plastilina dient das so ausgesparte Fensterchen zum Angiessen des Gipsdeckels *b*. Zuvor breite ich in diese Oeffnung nasses Seidenpapier so aus, dass die Gipsfläche zunächst (etwa 2 bis 3 mm) um die Wurzel herum frei bleibt. Nach dem Erhärten und nach dem

Verweilen der Gipsmasse in Wasser gelingt es leicht den Gipsdeckel abzuheben, der nach entsprechendem Zurechtschneiden und nach Entfernen des Seidenpapiers in seine alte Lage gebracht wird. Der Gipsdeckel ist also frei beweglich und setzt (bei mässiger Contactfläche) dem Abheben nur geringen Widerstand entgegen.

Um nun den Druckapparat zu befestigen (Fig. 4), wird der Gipsguss geeignet zurecht geschnitten, der Deckel *b* durch zwei (später zu durchschneidende) Fädchen befestigt und dann durch Umgiessen mit Gips der Schenkel *c* in die Gipsmasse fixirt. (Der in der Figur, einem Schnitt durch den Gipsguss, hervorstehende Theil des Apparates befand sich auch in Gips.) Sehr zu beachten ist, dass überall, wo der nun anzugiessende Gips an der schon erstarrten Masse haften soll, diese zuvor uneben und grubig gemacht werden muss.

Aus den entwickelten Principien ist leicht zu ersehen, wie man den Gipsverband auch anderen Objecten und anderen Zielen anpassen kann. So wirkte z. B. in gewissen Versuchen ein hinter der Spitze liegender Wurzeltheil drückend gegen den Gipsdeckel, während die Wurzelspitze selbst entweder in der Gipsmasse *a* fixirt oder freigelassen war und ungehemmt fortwuchs.

In analoger Weise lassen sich auch Stengel und andere Organe behandeln. Bei Messungen des von Keimstengeln in Richtung der Längsachse entwickelten Druckes pflege ich zwei dicke und breite Glasstreifen mit Gips so auf den Topfrand zu befestigen, dass der Keimstengel aus dem Spalte zwischen beiden hervorsieht. Diese Glasstreifen dienen als Träger des Gipsgusses, auf welchen der (hier nicht abnehmbare) Deckel in beschriebener Weise angebracht wird.

Der gut ausgeführte Gipsguss ist den Pflanzentheilen eng angeschmiegt und das Wachsthumsstreben dieser sorgt noch für weitere Anpressung. Um aber ein Gleiten zu vermeiden bedarf es gewisser Unebenheiten. Denn so wie der auf eine Glasplatte aufgegossene Gips nach dem Erstarren und nach dem Einlegen in Wasser sehr leicht von der Glasplatte abzuschieben ist, haftet die Gipsmasse auch nicht an feuchten Pflanzentheilen. Deshalb ist auch der an sich schlüpfrige Spitzentheil einer Wurzel leicht aus dem Gipse herauszuziehen, während einige Millimeter rückwärts durch leichtes Hervorwölben der Epidermiszellen eine Unebenheit geschaffen wird, welche ausreicht, um gegenüber den in der Pflanze entwickelten Schubkräften

eine ausreichende Adhäsion zu erzielen, eine Adhäsion, die mit Production der Wurzelhaare erheblich gesteigert wird.

Die Ausnutzung von Unebenheiten kann in anderen Fällen benutzt werden, um ein Gleiten im Gipsverbande zu verhindern. Bei glatten Stengeln ist z. B. die Ausdehnung der Umgipsung auf die Basis zweier distanter Blätter mit Vortheil anwendbar. Wo durch plastisches Wachsen eine Ausfüllung von Unebenheiten im Gipsverbande erreicht wird, lässt sich auch auf diesem Wege eine Befestigung herstellen. Eine für alle Fälle anzuwendende Methode gibt es natürlich nicht, doch wird es einem geschickten Experimentator wohl stets gelingen, da wo es erforderlich ist, dem Gleiten im Gipsverbande vorzubeugen.

C. Die Druckmessung.

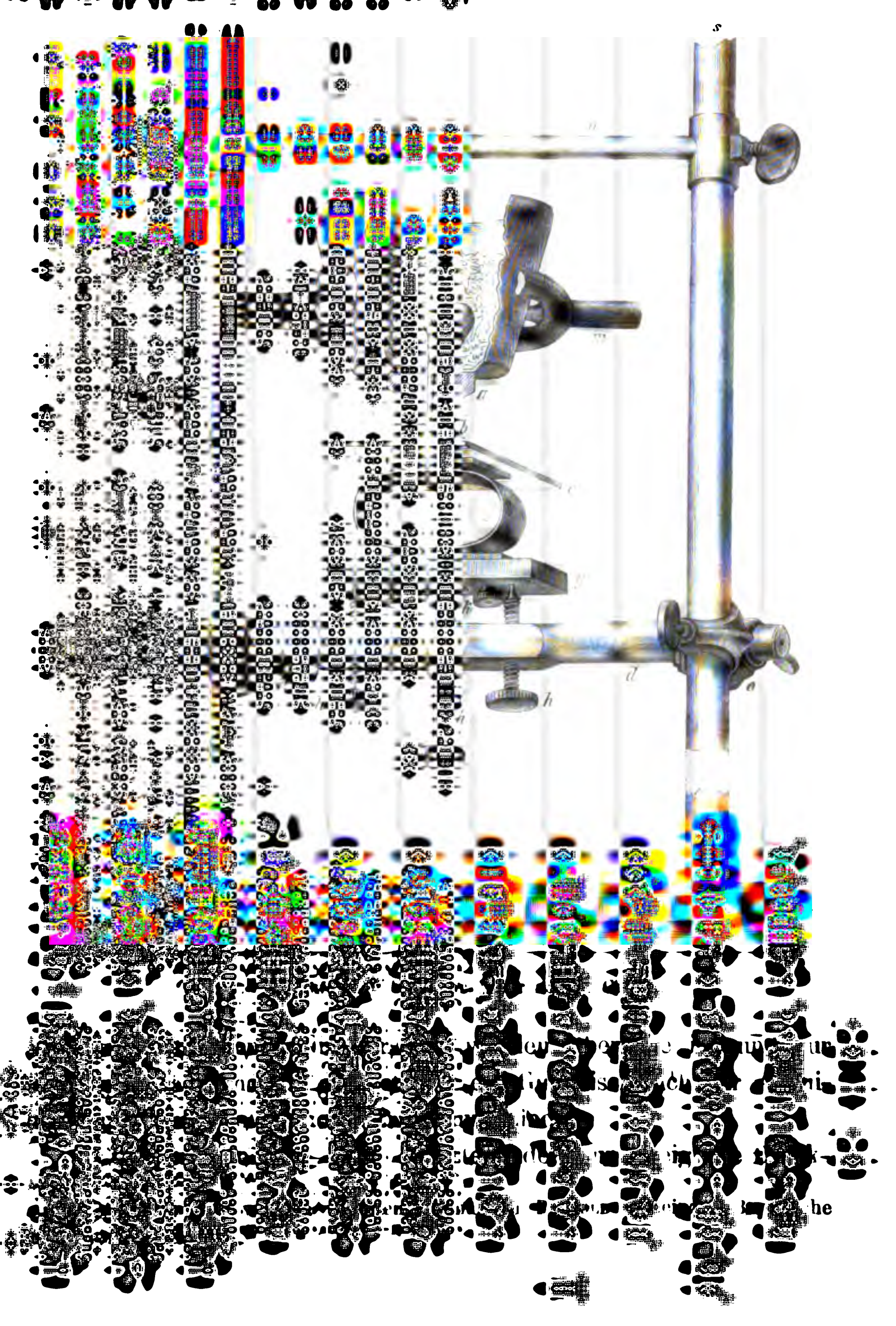
Erforderniss für die Bestimmung des von der Pflanze entwickelten Druckes ist, dass der messende Gegendruck schnell ansteigt, damit die Aequilibrirung bei nur geringfügigem Auseinanderweichen der Gipsflächen erreicht wird. Dieser Forderung kann ebensowohl durch Federn, als auch durch ein nach dem Princip der Briefwage gebautes Dynamometer genügt werden und wenn ein nach letzterem Princip construirter Apparat, den ich bei früherer Gelegenheit[1]) für Energiemessungen anwandte, in gewissen Fällen Vortheil gewährt, so ist doch für unsere Zwecke ein Federdynamometer vorzuziehen. In der That haben sich die in Fig. 3, 4 und 5 abgebildeten, aus breiteren Stahlstreifen geformten elliptischen Federn trefflich bewährt. Der Compressionsgrad dieser Federn wurde durch mikrometrische Bestimmung des Abstands der in den Figuren kenntlichen Nadelspitzen ermittelt.

Der Apparat, Fig. 3, welcher zur Ermittelung des Längs- oder Spitzendruckes diente — so mag der in Richtung der Längsachse wirkende Druck bezeichnet werden — soll Apparat *A* oder Druckfeder genannt werden. Zur Messung des Radialdruckes (Querdruckes) dienten zwei Apparate. Den in Fig. 4 abgebildeten nenne ich Apparat *B* oder Schraubklemme (resp. Schraubzwinge), den in Fig. 5

---

1) Pfeffer, Periodische Bewegungen 1875, p. 9.

… pparat[1]). Für Grashalme kam
… ometer in Verwendung, das in
… p. 9 abgebildet ist. Ander-



feder (Apparat *A*) und deren Verwendung speciell zur Messung des Spitzendruckes einer Wurzel.

Die Druckfeder wird von einem 14 mm dicken Eisenstab *d* getragen, der an jede der beiden Säulen des Stativs mittelst Doppelmuffe (*e*) unverrückbar fixirt ist. Die Messfeder *f* selbst kann ausgewechselt werden, da ihre Tragplatte *l* durch die Schräubchen *k* auf die massive Messingplatte *g* befestigt ist. Durch Hebung oder Senkung dieser Platte kann die Druckfeder gegen den Gipsverband bewegt, resp. von diesem entfernt werden. Zum Zwecke solcher Bewegung ruht die Platte *g* auf den drei Schrauben *h*, deren Muttern in dem abgeflachten und verbreiterten Theile des Tragstabes *d* liegen. Den Metallplättchen auf der entgegengesetzten (der oberen) Seite der Druckfeder ist die Glasplatte *c* mit Hilfe von etwas Gips aufgesetzt. Die obere der zur Ablesung dienenden Nadeln ist mittelst Schellack befestigt, während die untere Nadel durch die Schraube *i* in den gewünschten Abstand gebracht wird.

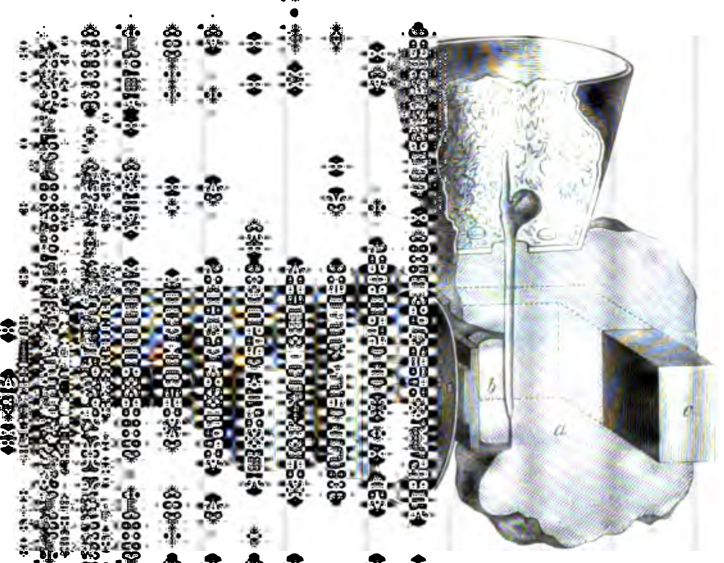
Der Topf *n* mit der in der beschriebenen Weise eingegipsten Wurzel wird in den massiven, mit 2 Schrauben am Stativ befestigten Ring *m* gepresst, nachdem die Gipskappe *b* durch ein Fädchen fixirt ist, das nach vollendeter Zusammenstellung durchschnitten wird. Mit Hilfe von etwas Gipsbrei wird dann der Gipsdeckel *b* so auf der Glasplatte *c* befestigt, dass die Spitze der Wurzel über die Mitte der Feder zu stehen kommt.

Nach dem Erstarren des Befestigungsgipses kann mit Hilfe der Schrauben *h* der gewünschte Druck gegen den Gipsdeckel hergestellt werden. Dieses gelingt mittelst der 3 Schrauben, wenn man für gleichstarke Fortbewegung jeder einzelnen sorgt, leicht und ohne eine beachtenswerthe Verschiebung der Centrirung der beiden Nadelspitzen, doch dürfte in Zukunft die Anbringung des in Fig. 4 verwandten Bewegungsmechanismus vorzuziehen sein.

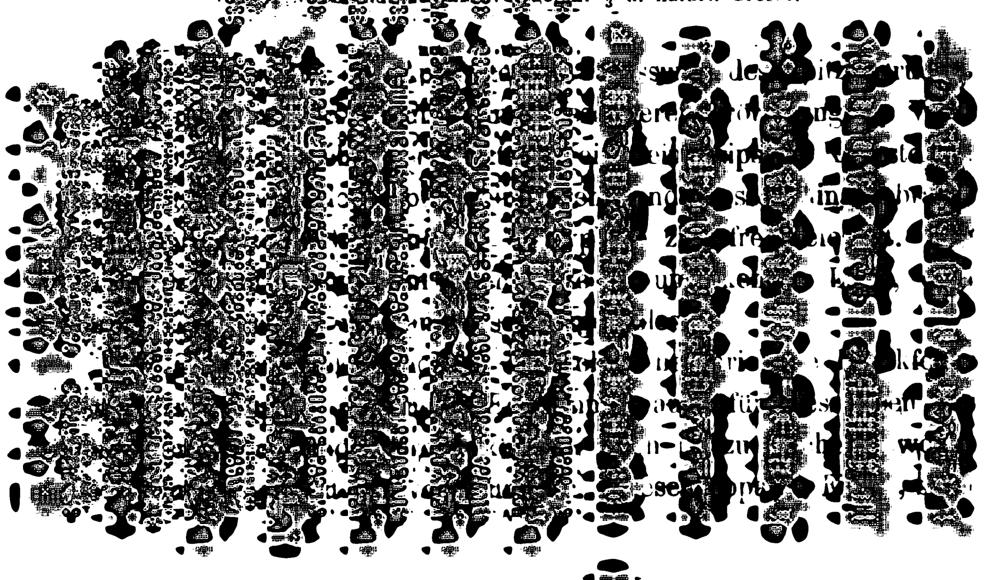
Die Sägespäne im Topf werden in üblicher Weise feucht, der Gips aber wird ziemlich nass erhalten. Dieses wird in schon angedeuteter Weise durch Umhüllen mit Fliesspapier und Wasserzufuhr durch einen Saugstreifen erreicht. Damit das Wasser bei zu reichlicher Zufuhr an einer bestimmten Stelle abtropft, bringe ich längs der Kanten der Glasplatte *c* einen schwach erhöhten Rand von Siegellack oder Paraffin an, der nur an einer Stelle eine Unterbrechung

[illegible] eifchens Fliesspapier das Ab- [illegible] e Einrichtungen sind in der [illegible]

[illegible] h von Stativ und Messapparat [illegible] Betracht kommenden Drucke [illegible] man für gewöhnlich durch [illegible] ausreichende und tadellose [illegible] esem eine weitere Widerlage [illegible] geben werden, der übrigens [illegible] n Stativsäulen eingespannt ist.



[illegible] $\frac{2}{3}$ d. natürl. Grösse.



im wesentlichen eine starke Schraubzwinge vor, deren Messingarme *c* 11 mm dick und 16 mm breit sind. Die Feder *d*, deren grösste Achse in diesem Falle nicht zu ansehnlich sein darf, ist, wie bei dem Apparat *A*, auf den Tisch *f* durch die Schrauben *g* befestigt. Durch die Führstangen *i* und die massive Schraube *h* ist für Vorwärts- und Rückwärtsbewegung dieses Tisches gesorgt. Die eine Nadelspitze ist fest, die andere *e* dagegen in einem durch Schraube beweglichen Säulchen befestigt. Um die Nadeln für Ablesungszwecke zu beleuchten ist hinter denselben, im Hauptschenkel der Klemme, ein Spalt angebracht.

Die Schraubklemme wird in der schon (p. 249) angegebenen Weise in den Gipsguss fixirt, der in der Figur 4 durchschnitten gezeichnet ist. Wenn die Messingtheile vor jedem Versuche neu lackirt werden,

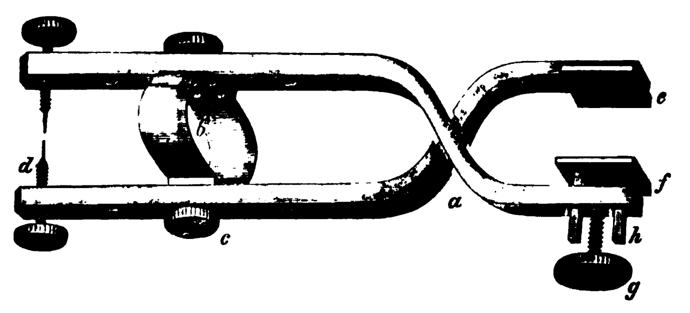


Fig. 5. Zangenapparat. Ungefähr ⅔ d. natürl. Grösse.

so ist eine Schädigung der Pflanzen durch Metallsalze ausgeschlossen. Die Befestigung des Deckels und die nachherige Herstellung von Druck gegen diesen Deckel wird nach den in a) angegebenen Principien ausgeführt. Der in beschriebener Weise an den Topf befestigte Gipsguss vermag eine noch höhere Belastung als die 320 g des Apparates zu tragen. Um aber nöthigenfalls den Apparat durch eine Klammer halten zu können, kann an den Schenkeltheil *c'* eine Handhabe angeschraubt werden.

Dieser Apparat ist natürlich auch für Stengel anwendbar und bei ausreichender Grösse und genügend solider Construction würde er auch zu Druckmessungen an Bäumen verwendbar sein.

c) Zangenapparat. — Dieser Apparat wurde benutzt bevor die Schraubklemme *B* construirt war, welche im Allgemeinen entschieden vorzuziehen ist.

Der Apparat (Fig. 5) ist eine ungleicharmige Zange. Die Druck-

feder *b* kann mittelst der Schrauben *c* zwischen den beiden langen Schenkeln in verschiedenem Abstand vom Drehpunkt angebracht werden. Zur mikrometrischen Ablesung dienen die durch Schrauben verstellbaren Nadelspitzen *d*.

Zur Druckmessung wird diese Zange analog wie die Schraubklemme (Fig. 4) gehandhabt, indem die Platte *e* und der sie tragende Schenkel (Fig. 5) in den Gipsguss fixirt wird, während die Platte *f* gegen den Gipsdeckel zu wirken hat. Wird diese Platte durch die Schraube *g* gegen den Gips bewegt, so kommt also durch Compression der Feder *b* ein Druck zu stande, der aus dem Abstand der durch Schraube beweglichen Nadelspitzen *d* controlirt wird. Da die Ausbiegungen in den Versuchen nur gering sind, so wird der Parallelismus der Zangenschenkel nur wenig geändert. Damit aber die Platte *f* stets gleichmässig angepresst bleibt, sind die Führstäbe *h* so eingerichtet, dass die auf der Spitze der Schraube *g* ruhende Platte *f* wohl ihre Winkelstellung gegen die Achse der Schraube verändern, eine Drehung aber um diese Achse nicht ausführen kann.

Behufs guter mikrometrischer Ablesung muss man für geeignete Beleuchtung der Nadelspitzen durch Spiegel- oder Lampenlicht sorgen.

Die Spannung der Feder dient als Maass für die entwickelte Druckkraft, die also durch das für gleiche Compression nöthige Gewicht bestimmt wird. Ist die Zusammendrückung nur gering, wie in der überwiegenden Zahl der Versuche, so wird Proportionalität zwischen spannendem Gewicht und Annäherung der Nadelspitzen gefunden, bei weitergehender Compression aber wird diese Annäherung allmählich etwas verlangsamt. Aber selbst dann erreichten, nach Aufhebung der Spannung, die Nadelspitzen in den aus gutem Stahl gefertigten Federn sofort wieder den ursprünglichen Abstand, sobald die Compression aufgehoben wurde.

Bei der Präcision der mikrometrischen Ablesung wird schon bei geringer Compressionsgrösse eine für unsere Zwecke genügende Genauigkeit erreicht. Ich benutzte eine verbesserte Form des in meiner Physiologie Bd. II, p. 85 abgebildeten Horizontalmikroskopes, das vielfach auch in physikalischen Instituten Eingang gefunden hat[1]). In den

1) Das Instrument wird von dem Mechaniker ALBRECHT in Tübingen angefertigt.

meisten Versuchen entsprach ein Theilstrich 0,0169 oder 0,0182 mm und bei guten Nadelspitzen beträgt der Ablesungsfehler weniger als die Hälfte eines Theilstrichs. Dieses Instrument ist auch bei horizontaler Stellung der zu beobachtenden Nadeln so gut anwendbar, dass ich die Beschreibung einer Hilfseinrichtung unterlassen darf, welche unter solchen Umständen theilweise in Anwendung kam.

Diese Methode bietet den grossen Vortheil, dass Uebertragungen und Reibungen im Messapparat vermieden sind und dass eine etwaige seitliche Ausbiegung an der Nadelspitze direct wahrgenommen wird. Solche Ausbiegungen sind übrigens bei geschickter Versuchsanstellung und bei Anwendung von genügend starken und breiten Federn so gering, dass aus denselben ein zu beachtender Fehler nicht entspringt. In dieser Hinsicht sind diese elliptischen Federn den Spiralfedern weit überlegen.

Auch ist die Schraubklemme Fig. 4 dem Zangenapparat Fig. 5 ganz wesentlich deshalb vorzuziehen, weil das Achsenlager (*a*) im Apparat Fig. 5 Reibung veranlasst. Die hierdurch veranlasste Hemmung kann, bei höherer Druckwirkung im Apparat, 20 bis 40 g entsprechen, ein Fehler der freilich bei richtigem Gange der Ablesungen im wesentlichen eliminirt wird. Dass in diesem Zangenapparate die Nadelspitzen das Auseinanderweichen des Gipses ungefähr doppelt vergrössert anzeigen, hat keine Bedeutung, da die mikrometrische Ablesung ohnehin genügend genau ist. Dieser und noch anderer Gründe halber verdient in der That die Schraubklemme derart den Vorzug, dass ich den Zangenapparat nicht mehr construiren würde.

Während eine Messung des Spitzendruckes wachsender Pflanzen bisher nicht versucht wurde, benutzte Ch. Darwin[1]) einen Zangenapparat in roher Form, eine Holzklammer, um Wurzeln auf ihren Querdruck zu prüfen, indem diese einfach in ein in den Holzschenkeln befindliches Loch gesteckt wurden. Da in diesen Versuchen die Klammer ziemlich weit auseinander getrieben wurde und die Wurzelspitze frei weiter wuchs, kam die mögliche maximale Druckleistung nicht zu Stande. Die Vernachlässigung der Grösse der wirksamen Fläche lässt zudem nicht ersehen, welcher Druck durch die Flächeneinheit entwickelt wurde. Uebrigens kann man aus einer photo-

1) Bewegungsvermögen d. Pflanzen 1881, p. 62.

graphischen Klammer einen einfachen Zangenapparat mit den zum Ablesen dienenden Nadelspitzen leicht herstellen.

Da bei einer Hebelvergrösserung in Folge von Reibungen, Uebertragungen u. s. w. gewisse Fehlerquellen gegeben sind, wurde die mikrometrische Messung um so mehr vorgezogen, als, bei Gewährung einer mindestens gleichen Genauigkeit in der Ablesung, die Apparate eine viel einfachere und und handlichere Construction zuliessen. Doch ist anzuerkennen, dass in Demonstrationsexperimenten die Apparate mit Hebelvergrösserung vortheilhafter sein können.

Eine Hebelvergrösserung habe ich übrigens in dem erwähnten Hebeldynamometer angewandt, das, gegenüber Federn, den Vortheil gewährt, durch einfaches Verschieben oder Auswechseln von Gewichten sehr verschiedenen Druckkräften accomodirbar zu sein, während für gleichen Zweck verschiedene Federn nothwendig sind.

In den Apparaten *A*, *B* und *C* kamen im ganzen 14 verschiedene Federn zur Verwendung. Die Annäherung der Nadelspitzen würde, auf 1000 g Belastung berechnet, für die stärkste Feder 0,13 mm, für die schwächste 12 mm betragen. In letzterem Falle genügen 1,43 g, um eine Annäherung der Nadelspitzen um 1 Theilstrich (à 0,017 mm) zu erzielen, während zu gleichem Erfolge die stärkste Feder mit 130 g belastet werden muss. Da also ½ Theilstrich dann 65 g entspricht, so ist der aus der Genauigkeit der Ablesung entspringende absolute Fehler in diesem Falle zwar ansehnlich, nicht aber der auf die Druckhöhe bezogene procentische Fehler, weil dieser Fehler ja nur für sehr hohe Leistungen in Betracht kommt.

Da zur Erreichung genügender Genauigkeit die Distanzänderung der Nadelspitzen nicht zu gering sein darf, anderseits aber das Auseinanderweichen der Gipsstücke thunlichst einzuschränken ist, pflege ich nach Zusammenstellung des Versuches durch die Schraubeinrichtungen einen solchen Druck herzustellen, dass das Auseinanderschieben des Gipses erst beginnt, nachdem die Pflanze eine hohe Energie gegen ihre Widerlage entwickelt hat. Ist man über den endlich zu Stande kommenden Druck einigermassen orientirt, so gelingt es auf diese Weise unschwer, die Spaltweite auf kleine Bruchtheile eines Millimeters einzuschränken. Zur Trennung der Contactflächen bedarf es, wie schon erwähnt, einer nur geringen Energie, wenn die Berührungsflächen mässige Grösse haben und wenn der Gips so reichlich

mit Wasser versorgt ist, dass seine Aussenfläche von dünner Wasserschicht überzogen ist.

Natürlich erfahren alle übrigen Theile der Apparate und Stative durch die wirksame Kraft eine entsprechende Ausbiegung. Und wenn dieses auf die durch die Feder bemessene Energie keinen Einfluss hat, so sind doch diese Ausbiegungen thunlichst zu vermeiden, durch welche das Auseinanderweichen der Gipsflächen vermehrt wird. In der durch Figur 3 (p. 251) repräsentirten Zusammenstellung war übrigens die Ausbiegung so gering, dass sie für einen Druck von 500 g in unseren Versuchen gar nicht bemerkt werden konnte. Denn das gesammte Auseinanderweichen von *n* und *d* der Figur betrug nur 0,03 bis 0,04 mm, wenn an Stelle der Wurzel eine Kraft von 5 kg wirkte. In der sehr massiv construirten Schraubklemme (Fig. 4) wurde durch eine solche Kraft eiu Auseinanderweichen von etwa 0,001 mm erzielt. In dem schwächer gebauten Zangenapparat (Fig. 5) brachte dagegen ein Druck von 2 kg eine Erweiterung des Gipsspaltes um 0,04 mm zuwege.

Thatsächlich sind die aus dem Apparat entspringenden Fehler bei gutem Experimentiren ohne praktische Bedeutung. Statt langer Discussion erwähne ich nur das summarische Resultat, welches die in Fig. 3 gezeichnete Zusammenstellung ergab, als sie ohne Einschluss einer Pflanze hergestellt und unter verschiedenen Bedingungen beobachtet wurde. Obgleich die Temperatur um 5° C. schwankte, Sägespäne und Gips weitgehend austrockneten und wieder befeuchtet wurden, ergaben die äusseren Ablesungen höchstens Differenzen von 0,5 Theilstrich und hierbei blieb es auch dann, als sogar das Stativ auf einen andern Tisch transportirt wurde.

Es ist übrigens einleuchtend, dass eine mässige Temperaturschwankung keinen wesentlichen Einfluss haben kann, da eine 100 mm lange Messingsäule durch 1° C. nur um 0,0017 mm verlängert wird. Im Allgemeinen war aber in meinen Versuchen die Temperaturschwankung auf 1,5° C. eingeschränkt[1]). Auch war zumeist für zitter-

---

1) Während des Winters wurde in einem durch Meidinger-Ofen Tag und Nacht geheizten Zimmer operirt. Vgl. Pfeffer, Zeitschrift f. Mikroskopie 1890, Bd. VII, p. 448. Leider ist dort die Constanz der Temp. auf ± 0,18° C. und 0,15° C. angegeben, während es 1,8° C. und 1,5° C. heissen sollte. Und zwar

freie Aufstellung gesorgt, obgleich diese (abgesehen von dem Acte der Ablesung) kein unbedingtes Erforderniss ist[1]).

Sehr zu beachten ist aber, dass die erstarrende Gipsmasse als Ganzes an Durchmesser und Volumen gewinnt. Denn wenn auch thatsächlich bei Vereinigung des gebrannten Gipses mit Wasser eine Verdichtung eintritt[2]), so ruft doch offenbar das Gegeneinanderstemmen der auskrystallisirenden Nadeln (vgl. p. 243) diese Vergrösserung hervor, welche natürlich ein entsprechendes capillares Einsaugen von Wasser zur Folge hat.

Wie die Hydratbildung erreicht diese Dimensionsänderung bald einen höchsten Werth, um dann allmählich auszuklingen. Für einen 70 mm langen und 30 mm dicken Gipscylinder ergaben mikrometrische Messungen, die 10 Minuten nach dem Gusse begannen, u. a. folgende Verlängerungen in Theilstrichen à 0,0182 mm: in den ersten 10 Minuten 6 Theilstriche, in den folgenden 1½ Stunden 3 Striche, in den weiteren 4 Stunden 2 Striche, in den folgenden 12 Stunden 1 Strich. Nach dieser Zeit wurde auch durch Austrocknen und Wiederbefeuchten eine merkliche Dimensionsänderung nicht hervorgerufen.

In Uebereinstimmung mit Obigem war in Gipsgüssen, wie sie in Fig. 3 und 4 abgebildet sind, nach 12 Stunden stets jede Volumänderung beendigt. Zuvor aber wirkt die sich ausdehnende Gipsmasse comprimirend auf die Feder und man muss sich wohl hüten, diesen Erfolg einer activen Thätigkeit der eingeschlossenen Pflanze zuzuschreiben. Für die Ermittlung der endlichen Druckentwicklung der Pflanzen, die erst nach einigen Tagen erreicht wird, ist diese Action des Gipses ohne Bedeutung, während sie bei der Ermittlung der Druckentwicklung in der ersten Zeit nach dem Eingipsen allerdings störend eingreift.

Diese Dimensionsänderung des erstarrenden Gipses ist natürlich

---

sollen diese Werthe die absolute Schwankung angeben, d. h. die Abweichungen vom Mittel betrugen 0,9 und 0,75° C.

1) Zu Tischplatten (auch als Gewächshausplatten) verwende ich mit Vortheil Xylolithplatten (von O. SENNIG & Co. in Potschappel bei Dresden). Die Platten werfen sich nicht wie Holz, ohne so hart und kalt zu sein wie Schiefer.

2) Ueber die Wärmetönung in diesem Vorgange vgl. OSTWALD, Lehrbuch d. allgem. Chemie II. Aufl. 1893, Bd. II, p. 270.

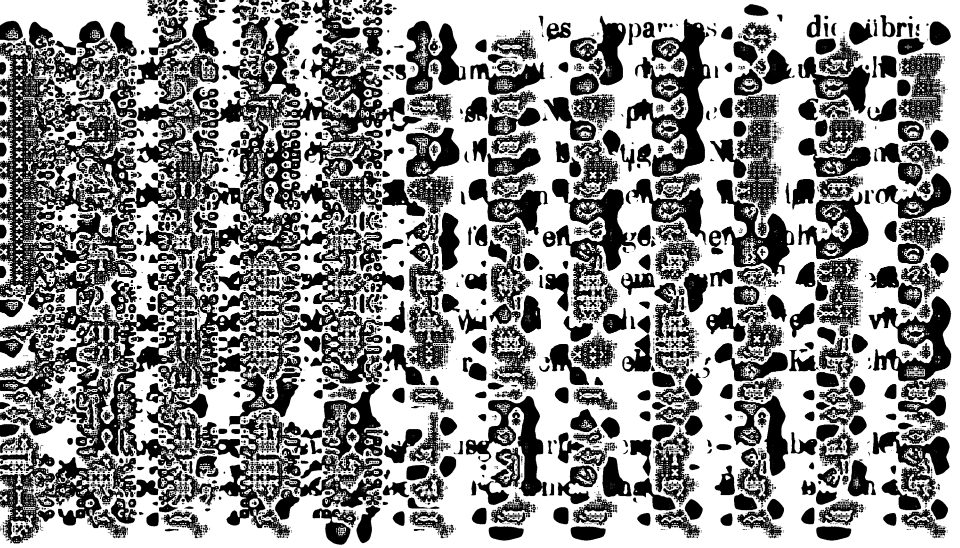
also auch gegen umschlossene Pflanzen-
die so angestrebte Verengerung des Kanals
chstens eine etwas bessere Anschmiegung
Schädigung der Pflanzentheile erzielt wird.
ich die sogleich nach den Erstarren aus
n Pflanzentheile wieder vollständig in ihre

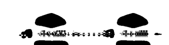
...ittelst eines Kautschuckschlauches.

...d die Gegenwirkung durch die elastische
...kschlauches geliefert, der also den nach

Verlängerung strebenden Organen in analoger Weise entgegenwirkt, wie eine umhüllende negativ gespannte Gewebemasse.

Wie aus der Figur 6 zu ersehen ist, sind die beiden Glasstückchen *a* und *b* durch das Kautschuckröhrchen *c* verbunden. In dieses unten geschlossene System ist die Wurzel eingeführt und dann der Zwischenraum sorgfältig mit sehr feinem Sand vollständig ausgefüllt worden. Darauf wurde der obere Theil





gegenüber der Kautschuckmethode so viele Vortheile, dass ich letztere fallen liess und nicht bestrebt war, die Technik derselben weiter auszubilden. Uebelstände ergaben sich u. a. daraus, dass die Spitze *a* leicht seitlich ausbiegt, dass der Kautschuck elastische Nachwirkung besitzt, dass der Sand keine ganz unverrückbare Widerlage bildet, dass nicht eine einzelne Querscheibe, sondern ein längeres Wurzelstück den wirksamen Druck erzeugt. Auch sind die so umschlossenen Wurzeln hinsichtlich der Versorgung mit Sauerstoff eher ungünstiger situirt als im Gipsverband.

Die obigen Methoden gestatten natürlich eine Anpassung an besondere Fälle und Ziele, wie u. a. fernerhin bei Gelegenheit der Behandlung der geotropischen Krümmungskraft der Grasknoten in einem concreten Falle sich ergeben wird. Auch sind natürlich in Obigem die Mittel für Energiemessungen nicht erschöpft, doch verzichte ich darauf auf anderweitige, theilweise sogar versuchsweise angewandte Methoden hinzuweisen.

Eine Energiebestimmung ist auch möglich, indem man die Pflanzen nicht gegen einen zunehmenden, sondern gegen einen constanten Widerstand wirken lässt, d. h. in dieser Weise die noch überwindbare und die nicht mehr überwindbare Last ermittelt. Nach diesem Princip hat, freilich zunächst in anderer Absicht, Krabbe[1]) gearbeitet, der ein Gewicht durch das Dickenwachsthum der Bäume heben liess, und auch Clark's[2]) Kraftmessungen basiren auf diesem Princip. Ist die Ermittlung der maximalen Druckleistung auf diesem Wege auch etwas umständlich, so kann die Methode doch in gegebenen Fällen den Vortheil gewähren, dass der wirksame Druck nicht von Volumschwankungen des Pflanzenkörpers abhängt, die den von einer gespannten Feder ausgehenden Druck ansehnlich modificiren können.

An die Ueberwältigung eines constanten Widerstandes knüpfen sich aber auch interessante Fragen über die regulatorische Arbeitsthätigkeit wachsender Pflanzen, welche, wie auch die angewandte Methode, späterhin behandelt werden sollen (Kap. VI).

---

1) Wachsthum d. Verdickungsringe u. d. jungen Holzzellen 1884, p. 23.
2) Flora 1875, p. 555.

III. Die Druckleistungen der Wurzeln.

A. Allgemeines über die Druckleistungen und die Druckhöhen.

In erster Linie sollen die Leistungen der Wurzeln behandelt werden, welche in der That vortreffliche Versuchsobjecte sind. Denn abgesehen davon, dass sie des Lichtes nicht bedürfen, haben sie durch ihre Lebensweise normalerweise vielfach mit Widerständen zu kämpfen und bekanntlich werden beim Wachsen durch zähen Boden oder beim Absprengen von Felsstücken ansehnliche Leistungen vollbracht. Da aber die biegsamen und plastischen Wurzeln leicht ausbiegen, also schon aus mechanischen Gründen Widerstände umgehen, kommt es zu höheren Druckwirkungen gegen eine Widerlage nur dann, wenn dieses Ausbiegen unmöglich gemacht ist. Dieses ist aber in unserem Gipsverband hergestellt und in diesem bringt es deshalb die Wurzel zu der höchstmöglichen Aussenleistung, die bei einem früher überwindbaren Widerstand nicht erreicht wird.

Speciell diesen maximalen Druckleistungen ist dieses Kapitel gewidmet, in welchem die Wurzeln in ihrer Beziehung zu der mechanischen Wirkung gegen die Widerlage als einheitlicher Körper behandelt werden. Die causale Aufhellung dieser Leistungen, ferner die Arbeitsleistung der fortwachsenden Wurzel, sowie überhaupt das weitere Reactionsvermögen gegen Widerstände bleibt den folgenden Kapiteln vorbehalten.

Zunächst folgt hier eine Zusammenstellung der auf Längs- und Querdruck bezüglichen Resultate, also ein Auszug aus den Versuchen, welche in den Belegen am Schlusse dieser Arbeit in Abtheilung I unter gleichen Nummern aufgeführt sind. Sämmtliche Experimente wurden mit der Gipsmethode ausgeführt, ausgenommen Versuch Nr. 7, welcher das Resultat einer Messung mittelst Kautschuckschlauch wiedergibt.

Tab. I bezieht sich auf den Längsdruck der namhaft gemachten Wurzeln und zwar wurde von Faba immer die grosssamige Form benutzt. In der Verticalcolumne *e* ist der empirisch ermittelte Gesammtdruck in Grammen verzeichnet, welcher in der unter *a* angeführten Zeit erreicht wurde. Durch Division der activen Fläche (*d*) in den Gesammtdruck (*e*) ergibt sich die Columne *f*, die pro 1 qmm wirksame Druckkraft. Unter *g* ist die Druckintensität in

Atmosphären aufgeführt, also in einem Ausdruck, der ohne Angabe einer Flächeneinheit unzweideutig und auch vortheilhaft ist, um z. B. die gewöhnlich in Atmosphären bemessene Betriebsintensität des Dampfdruckes zum Vergleich heranzuziehen.

Unter *b* ist die Entfernung des als wirksam betrachteten Querschnitts von der Wurzelspitze angeführt. Unter *c* steht der mittlere Durchmesser dieser Zone, deren Flächeninhalt unter *d* verzeichnet ist. Letzterer wurde durch vergrössertes Abzeichnen des Querschnitts und Wiegen des Papierausschnitts ermittelt und zur Controle ausserdem aus dem gefundenen Diameter berechnet.

In den auf Faba bezüglichen Versuchen 1—5 ist als wirksamer Querschnitt diejenige Zone genommen, in welcher die beiden Stücke des Gipsgusses zusammenstiessen, resp. in welcher ein kleiner Spalt durch das Fortschieben des Gipsdeckels gegen die Messfeder entstanden war (also in Fig. 3 p. 251 die Contactfläche zwischen *b* und *a*). In 1—4 hatte der Spitzentheil der Wurzel die normale conische Form, während in Versuch 5 dieser Spitzentheil durch Ausfüllen einer in den Gipsdeckel ausgebohrten Form cylindrische Gestalt gewonnen hatte.

In Versuch 6 bezieht sich die Horizontalreihe *A* auf die Dimensionen der direct auf die Messfeder wirkenden und gegen die Glasplatte abgeflachten Wurzelspitze, während den Druckberechnungen in der Horizontalreihe *B* diejenigen Maasse zu Grunde liegen, welche 4,8 mm rückwärts von der Spitze an der Stelle gefunden wurden, an welcher der durch Umgipsung fixirte Gipsdeckel ansetzte (vgl. p. 248), eine Stelle an welcher die Wurzel etwas Spielraum für eine geringe kropfige Anschwellung gefunden hatte.

In Versuch 7, dem Versuche mit Kautschuckschlauch, basirt die Horizontalreihe *A* auf dem kleinsten, die Reihe *B* auf dem grössten Querschnitt, welchen die Wurzel innerhalb der Kautschuckhülle besass (vgl. Fig. 6 p. 260).

In den Versuchen 8—11 mit Mais und Vicia sativa hatte sich in die Spaltfläche des Gipsverbandes hinein eine merkliche allseitige, kropfige Erweiterung gebildet. Der dieser entsprechende grösste Durchmesser liegt den bezüglichen Horizontalreihen *B* zu Grunde, während in den Reihen *A* die Querschnittsdimensionen des unmittelbar anstossenden, in Gips befindlichen Wurzeltheils benutzt sind.

Tabelle I.

Längsdruck durch Wurzeln.

Nr.	Versuchsdauer a	Wirksame Zone: Entfernung von Spitze b	Wirksame Zone: Durchmesser c	Wirksame Zone: Fläche d	Gesammtdruck e	Druck pr. 1 qmm f	Druck in Atmosphären g
				Faba vulgaris.			
1	70 Std.	6,2 mm	2,1 mm	3,4 qmm	257,5 g	72,8 g	7,04 Atm.
2	72 »	5 »	2,2 »	3,7 »	294,3 »	79,5 »	7,70 »
3	36 »	4 »	2,0 »	3,2 »	352,7 »	110,2 »	10,67 »
4	192 »	3,5 »	1,8 »	2,6 »	260,6 »	100,2 »	9,70 »
5	120 »	4,2 »	2,0 »	3,1 »	272,0 »	87,7 »	8,49 »
6 A	94 »	0 »	1,2 »	1,13 »	226,0 »	200,0 »	19,36 »
6 B		4,8 »	1,6 »	2,01 »	226,0 »	107,9 »	10,44 »
7 A	58 »		2,4 »	3,46 »	250 »	72,2 »	6,98 »
7 B			3,0 »	4,71 »	250 »	53,1 »	5,16 »
				Zea mais.			
8 A	94 »	3,0 mm	1,2 mm	1,23 qmm	158 g	129,2 g	12,51 Atm.
8 B		3,2 »	1,4 »	1,54 »	158 »	102,6 »	9,93 »
9 A	71 »	2,6 »	1,2 »	1,13 »	291,1 »	257,7 »	24,94 »
9 B		2,6 »	1,8 »	2,52 »	291,1 »	115,5 »	11,18 »
10 A	34 »	2,3 »	1,4 »	1,54 »	197,1 »	128,0 »	12,39 »
10 B		2,3 »	1,6 »	2,0 »	107,1 »	98,5 »	9,53 »
				Vicia sativa.			
11 A	94 »	2,2 mm	0,6 mm	0,31 qmm	42,6 g	137,7 g	13,33 Atm.
11 B		2,2 »	0,8 »	0,5 »	42,6 »	85,3 »	8,26 »
				Aesculus hippocastanum.			
12	117 »	3,2 mm	2,5 mm	4,9 qmm	336,8 g	68,7 g	6,65 Atm.

In Tab. II ist der Querdruck durch Wurzeln aufgeführt. Sämmtliche Versuche sind im Gipsverband angestellt, ausgenommen Nr. 20, in welchem die Wurzel zwischen 2 parallelen, ebenen Thonplatten wirkte.

Die Verticalreihen *a*, *e*, *f*, *g* haben dieselbe Bedeutung wie in Tab. I. In der Columne *d* ist für den unter dem Gipsdeckel liegenden Wurzeltheil (also zusammenfallend mit der Spaltfläche des Gipsverbandes) die grösste Fläche des Medianschnitts verzeichnet, dessen Grösse in Quadratmillimetern wieder durch Papierwägung ermittelt wurde. Da *c* die Länge der bezüglichen Strecke angibt, so erhält

man als Quotient von *c* in *d* den mittleren Durchmesser des Medianschnitts. Die Bezeichnung 0—8 in Versuch 13 sagt also, dass der 8 mm lange Spitzentheil der Wurzel (wie in Fig. 4 p. 253) gegen den Gipsdeckel wirkte, während in 7—15,7 mm (Versuch 17) ausgedrückt wird, dass der Gipsdeckel 7 mm entfernt von der Wurzelspitze begann und sich bis 15,7 mm erstreckte. In Columne *b* ist durch »eingegipst« angezeigt, dass der Spitzentheil der Wurzel durch den Gipsverband volle Widerlage fand, während »frei« aussagt, dass sich der Spitzentheil ungehemmt weiter entwickeln konnte (Versuch 18). In Versuch 20 konnte zudem die Wurzel zwischen den Thonplatten sich seitlich ausdehnen und wurde dieserhalb bandförmig. Sofern »eingegipst« in *b* eingetragen ist, wirkte entweder die Wurzelspitze selbst gegen den Gipsdeckel (Versuch 13, 14, 15, 16), wie in Fig. 4, oder (Versuch 17, 19) der 7, resp. 8 mm lange Spitzentheil (siehe Columne *c*) war in der unbeweglichen Gipsmasse fixirt, es wurde also, wie schon bemerkt, die Druckleistung einer rückwärts von der Spitze liegenden Strecke gemessen. Hierbei konnte sich also die Wurzel nicht verlängern, wohl aber in Versuch 18 und 20, und in Nr. 18 ist demgemäss mit 7,5 mm nur die Länge der freien Wurzelspitze zu Beginn des Versuchs verzeichnet.

In Versuch 19 war der Gipsdeckel so weit zurückgedrängt worden, dass sich in dem Spalt unter dem Gipsdeckel Nebenwurzeln entwickeln konnten. Die Summe der Medianschnitte dieser und des bezüglichen Stückes der Hauptwurzel liegt den Berechnungen in der Horizontalreihe *B* zu Grunde, während für die Horizontalreihe *A* die Annahme gemacht ist, dass nach 118stündiger Versuchsdauer die Nebenwurzeln noch nicht vorhanden waren.

Aus den Tabellen I und II ist sofort zu ersehen, dass die Wurzeln befähigt sind, bei allseitiger Widerlage eine Druckintensität bis zu mehr als 10 Atmosphären zu entwickeln, dass demgemäss auch mit der Grösse der wirksamen Fläche absolut hohe mechanische Aussenleistungen zu Stande kommen. Wie die gemessenen Drucke nach der Längs- und Querrichtung lehren, erzeugen die eingeschlossenen Wurzeln einen allseitigen Druck, welcher freilich nach den beiden gemessenen Componenten sich nicht gleich schnell entwickeln und auch nicht gleiche Höhe erreichen muss.

Tabelle II.

Querdruck durch Wurzeln.

Faba vulgaris.

Nr.	Versuchs-dauer a	Wurzel-spitze b	Wirksame Zone: Länge und Lage c	Wirksame Zone: Median-schnitt d	Gesammt-druck e	Druck pr. 1 qmm f	Druck in Atmo-sphären g
13	167 Std.	eingegipst	0—8 mm	29 qmm	1830 g	63,1 g	6,11 Atm.
14	120 »	»	0—5,5 »	10,5 »	500 »	47,6 »	4,61 »
15	168 »	»	0—5 »	9,5 »	599,6 »	63,1 »	6,11 »
16	144 »	»	0—6,2 »	12,2 »	542,0 »	44,4 »	4,30 »
17	164 »	»	7—15,7 »	15,8 »	897,3 »	56,8 »	5,50 »
18	237 »	frei = 7,5	7,5—18,2 »	17,1 »	689,2 »	40,3 »	3,90 »
19 A	118 »	eingegipst	8,0—21,0 »	24,0 »	877,0 »	36,5 »	3,53 »
19 B	310 »	»	8,0—21,0 »	49,0 »	1511 »	30,8 »	2,98 »
20	210 »	frei		43,0 »	959,2 »	22,3 »	2,16 »
			Zea maïs.				
21	118 Std.	eingegipst	0—11,2 mm	11,0 qmm	749,3 g	68,1 g	6,59 Atm.

Die nach aussen gerichtete Druckwirkung beginnt sogleich, sobald eine wachsende Wurzel gegen eine Widerlage stösst. Ist dann ein Ausbiegen unmöglich, so steigt der anfangs schwache Druck zuerst schneller, späterhin langsamer, um sich asymptotisch dem maximalen Grenzwerth zu nähern. Ueber diesen zeitlichen Verlauf wird des Näheren in Kap. IV gehandelt; hier sei nur erwähnt, dass der Gang des Anschwellens nicht nur nach äusseren Verhältnissen, sondern auch specifisch und individuell different ausfällt. Im Allgemeinen geht die Druckentwicklung schneller in der Längsrichtung, als in der Querrichtung von statten, ja bei schnell wachsenden Wurzeln kann der Längsdruck unter den normalen Versuchsbedingungen in 1½—2 Tagen dem Grenzwerth schon sehr genähert sein (vgl. z. B. Versuch 3 in Tab. I). Ganz vollständig ist dieser Grenzwerth in unseren Versuchen nicht erreicht, die somit die mögliche Leistung um etwas, wenn auch zumeist um einen geringen Betrag, zu gering angeben.

Um die maximale mechanische Leistung ausüben zu können, muss natürlich die genügende Widerlage geboten, also ein Zurückweichen und Ausweichen ausgeschlossen sein. Zur Erreichung dieses Zieles bedarf es aber einer allseitigen Einschliessung der Wurzel,

da diese andernfalls, vermöge ihrer bekannten biegsamen und plastischen Eigenschaft, ausbiegt und ausweicht, sobald ein mässiger Druck hergestellt ist. Deshalb bringt auch eine freie Wurzelspitze einen nur geringen Druck gegen eine Platte zu Stande, da sie bald ausbiegt und längs der Platte fortgleitend das Hinderniss umgeht. Schon aus diesen mechanischen Gründen kommt es in der Wurzel immer nur nach Bedürfniss zur Entwicklung höherer Energie gegen die Aussenwelt und die höchste Leistungsfähigkeit wird nicht angespannt, wenn schon bei geringerem Drucke das Hinderniss beseitigt oder durchbrochen wird.

Eine solche vollständige Widerlage, die weder ein Ausweichen, noch ein Herausschieben gestattet, ist eben mit dem Gipsverband in unseren Versuchen hergestellt, sofern in diesen der durch Zurückweichen des Deckels entstehende Spalt eine nur geringfügige Weite erreicht.

Ist irgendwo der Anschluss unvollständig, so wird diese Lücke durch entsprechendes locales Wachsen ausgefüllt, denn die Wurzel verhält sich in dieser Hinsicht analog wie ein wachsender Kürbis, der, wie den Chinesen[1]) seit lange bekannt ist, Flaschen und andere Formen gänzlich auszufüllen vermag. Diese allseitige Ausfüllung wird dadurch gesichert, dass die Wurzel (und auch andere Pflanzentheile) nicht allein das normal angestrebte Wachsen, so weit es mechanisch möglich ist, ausführt, sondern dass mit der mechanischen Hemmung auch correlative Wirkungen eintreten, als deren Erfolg sich in der wachsenden Region die Wachsthumsthätigkeit in einer jeden überhaupt möglichen Richtung in erhöhtem Grade geltend macht. Dieses documentirt sich sofort darin, dass bei Verwendung einer geeigneten Gipsform der Spitzentheil der Wurzel, bei Hemmung des Längenwachsthums, durch Ausfüllung der Form in wenigen Tagen das doppelte derjenigen Dicke erreichen kann, welche er normalerweise angenommen haben würde. Ein evidentes Beispiel solcher correlativen Wachsthumsbeschleunigung liefert auch der äusserste Spitzentheil der Wurzel, der aus seiner langsamen Längenzunahme in ein sehr schnelles Wachsthum übergeht, wenn in der übrigen Wurzel das Längenwachsthum mechanisch gehemmt wird (Kap. VI). Als eine weitere Corre-

---

1) DE CANDOLLE, Physiolog. végétale. 1832, Bd. III, p. 1310.

lation der Wachsthumshemmung ist ferner die beschleunigte Bildung von Seitenwurzeln zu erwähnen, während zugleich die zu Längenwachsthum befähigte Strecke erheblich, theilweise bis auf die halbe normale Länge verkürzt wird. (Vgl. Kap. VI.)

Das normale und correlative Wachsen erzielt also, natürlich in gewissen Grenzen, ein allseitiges Anschmiegen und ein Ausfüllen der Form. Wenn dieses auch durch die in der Pflanze regulatorisch thätige Wachsthumsthätigkeit erreicht wird, so ist der endliche Erfolg doch vergleichbar dem Einpressen einer plastischen Masse und so mag es erlaubt sein, von »plastischem Wachsen« zu reden.

Jedes eingeleitete Wachsthumsstreben übt aber beim Auftreffen auf einen Widerstand Druck aus und so wird mit dem Wachsen auch die mechanische Reaction gegen die Widerlage regulirt. Denn ist z. B. die Aufhebung des Längenwachsthums Bedingung dafür, dass eine Gipsform durch das correlativ gesteigerte Dickenwachsthum ausgefüllt wird, so ist also an die gleiche mechanische Bedingung auch das Zustandekommen des Querdrucks gekettet. Dieser muss aber deshalb nicht auf die Intensität des Längsdruckes steigen, vielmehr kann die maximale Druckleistung nach den beiden Richtungen sehr wohl weitgehend verschieden sein, da die Ausgiebigkeit der Energieentwicklung nach dieser oder jener Richtung von der Thätigkeit der Pflanze regulirt wird. Es ist deshalb keine allgemeine Nothwendigkeit, dass die mechanische Hemmung des Längenwachsthums zur Steigerung des Querdrucks führen muss oder umgekehrt. Speciell in den Wurzeln scheint in der Längsrichtung eine etwas ansehnlichere Druckintensität als in der Querrichtung entwickelt zu werden.

Die endliche Druckhöhe ist natürlich nicht von der Schnelligkeit der Druckentwicklung abhängig. Uebrigens geht in unseren Wurzeln die Entwicklung des Längsdruckes etwas schneller von statten als die des Querdruckes.

In Folge des plastischen Wachsens vermag sich eine Wurzelspitze durch ein ziemlich enges Loch im Gipsverband durchzuarbeiten, um dann frei fortzuwachsen oder sich abzuflachen, wenn die Widerlage solches bedingt. Aber auch die subapicalen wachsthumsfähigen Partien einer Wurzel wachsen gegen die keinen oder einen unzureichenden Widerstand bietenden Orte und zwar zunächst durch Wucherung des Rindenparenchyms. Demgemäss macht sich auch

solches Wachsen in den Spalt hinein geltend, welchen ein Gipsverband nach genügendem Auseinanderweichen der Theile bietet, so dass also bei Messungen des Längsdruckes eine ringförmige Krause, bei Messungen des Querdruckes an den beiden opponirten Spaltlinien zwei flügelförmige Wucherungen gebildet werden.

Dieses Auswachsen, das natürlich mit der Zeit bis zu einem gewissen Grade zunimmt, fällt mit der genügenden Einengung des Spaltes sehr gering aus. In dem Versuch 4 der Tabelle I (p. 264) hatten sich die beiden Gipsstücke am Schlusse des Versuches um 0,07 mm von einander entfernt und während dieser 8tägigen Versuchsdauer hatte die Wurzel von Faba gegen den Spalt hin nur um 0,05 mm an Durchmesser gewonnen, so dass eine Anschwellung an dieser Stelle kaum merklich war. Dagegen war solche Anschwellung in dem unter Nr. 1 verzeichneten dreitägigen Versuche sehr merklich, in welchem sich der Spalt auf 0,5 mm erweitert und der Durchmesser in der Krause um 0,2 mm zugenommen hatte. Die nur 36stündige Dauer des Versuchs Nr. 3 brachte es wieder mit sich, dass diese Erweiterung des Durchmessers der Wurzel von Faba gegen den Spalt hin nur 0,05 mm betrug, obgleich dieser Spalt schliesslich auf 0,55 mm erweitert war.

In noch höherem Grade ist die Wurzel von Zea maïs zur Production einer solchen Spaltwucherung geneigt. Die Grösse dieser Krausenbildung ist aus den Versuchen 8, 9 und 10 in Tab. I (p. 264) zu ersehen. In der Horizontalreihe *B* sind jedesmal der mittlere Durchmesser (in der Verticalreihe *c*) und die Querschnittsfläche der Krause (Columne *d*), in der Horizontalreihe *A* aber sind die entsprechenden Maasse für die acropetal anschliessende, im Gips steckende und also nicht erweiterte Wurzelpartie verzeichnet. Diese Differenz des Durchmessers beträgt in Versuch 8, trotz der geringen Spaltweite von 0,06 mm, nach 4 Tagen 0,2 mm. In dem dreitägigen Versuche 9 steigt der Unterschied bei einer Spaltweite von 0,3 mm auf 0,6 mm, während er in dem 34stündigen Versuch 10 nur 0,2 mm beträgt, obgleich der Spalt auf 0,4 mm auseinandergewichen war.

Zu analogen Erfahrungen in Bezug auf das Zurücktreten des Auswachsens mit der Verkleinerung des Spaltes führten auch die auf die Bestimmung des Querdruckes zielenden Experimente. In diesen war übrigens das Klaffen der Gipsstücke immer nur gering-

fügig, mit Ausnahme von Versuch 19 (Tab. II, p. 266), in welchem die Erweiterung des Spaltes auf 0,4 mm sogar das Auswachsen von Nebenwurzeln in den Spaltraum zur Folge hatte.

Eine thunlichste Einengung dieser Deformation liegt aber im Interesse unserer Druckversuche. Denn mit der Bildung solcher Auswüchse wird der wirksame Querschnitt erweitert und bei weitgehendem Eindringen in den Spalt könnte unter Umständen eine zu beachtende Keilwirkung zu Stande kommen. Betrachten wir aber den durch die Anschwellung gelegten grössten Querschnitt als die wirksame Flächengrösse, so wird die darauf basirte Berechnung der in der Flächeneinheit wirksamen Energie jedenfalls keine zu hohen Werthe liefern. In dieser Weise aber ist die Intensität der Aussenleistung für Längs- und Querdruck berechnet worden, die nachstehend noch des weiteren für sich besprochen werden sollen.

Die Energie einzelner Zellelemente muss aber jedenfalls höher als der so gefundene Mittelwerth des als homogen behandelten Querschnitts ausfallen. Denn einmal wird, wie wir sehen werden, der Druck durch osmotische Energie erzeugt, geht also nur vom Zellinnern aus, während die von Zellwand und Intercellularen eingenommene Fläche inactiv ist. Ferner dürften ungleichwerthige Zellen auch wohl in der Druckentwicklung häufig ungleich sein und die Gegenwart passiver Elemente vermindert nicht nur die real wirksame Fläche, sondern kann auch durch ihre Gegenwirkung, also bei Eintritt negativer Spannung, die nach aussen zur Geltung kommende Energie um einen entsprechenden Betrag herabdrücken.

An dieser Stelle gehen wir indess noch nicht ein auf die Energiequellen und die wirksamen Elemente, betrachten vielmehr, wie es ja auch für die Ausseneffecte erlaubt ist, die Wurzel als ein Ganzes, das gegen äussere Widerstände nach Maassgabe der treibenden Gesammtenergie und der Gestalt, resp. der Angriffsweise, entsprechende mechanische Effecte erzielt.

B. Längsdruck.

Wie durch einen dünnen und biegsamen Bleidraht nur eine geringe Pression ausgeübt werden kann, bewirkt auch die auf eine Platte auftreffende freie Wurzel nur einen geringen Druck, da sie vermöge ihrer biegsamen und plastischen Eigenschaften sich seitlich

krümmt und, indem sie fortwächst, über die Platte in der von SACHS[1]) und von DETLEFSEN[2]) geschilderten Weise fortgleitet.

Um eine Vorstellung über diese Druckwirkung zu gewinnen, wurde die durch die Figur 3 (p. 251) repräsentirte Zusammenstellung benutzt, jedoch wurde der Gipsdeckel *b* weggelassen, so dass also der Spitzentheil der Wurzel frei war. Ferner wurde die Glasplatte *c* durch eine Gipsplatte ersetzt. Bei der Zusammenstellung wurde dafür gesorgt, dass der in sehr feuchter Luft befindliche freie Wurzeltheil nach sehr geringem Zuwachs auf die Gipsplatte traf, und um den Druck genügend genau zu messen, kam eine sehr schwache Feder (*f*) zur Verwendung. Die beiden in dieser Weise mit Vicia faba ausgeführten Versuche sind in den Belegen unter Nr. 22 mitgetheilt und zwar war im Experimente *A* der freie Spitzentheil 6 mm, in dem Experimente *B* 23 mm lang.

In beiden Fällen steigt der von der senkrecht auftreffenden Wurzel ausgeübte Druck bis auf einen gewissen Maximalwerth, um dann mit dem Beginn des Ausbiegens zu sinken. In *A* wurde das Maximum nach 3½ Stunden mit 13 g, in *B* nach 1 Stunde 40 Min. mit 10,5 g Druck erreicht. Nunmehr ging mit Beginn der spitzwinkeligen Stellung der Wurzel der Druck im Verlaufe von 3½ bis 5 Stunden auf 1,5 bis 2,2 g zurück und erhielt sich annähernd auf dieser Höhe, während die fortwachsende Wurzel über die Platte, unter Beibehaltung der spitzwinkeligen Angriffsrichtung, fortglitt. Es würde also überhaupt nur zu einem Drucke von etwa 2 g gekommen sein, wenn man die Wurzel von Anfang an in einem solchen spitzen Winkel gegen die Gipsplatte gelenkt hätte. Dagegen muss die Druckleistung mit Verkürzung des freien Wurzeltheils steigen, da ja bei minimaler Länge der freien Spitze die maximale mechanische Aussenleistung zu Stande kommt.

In Einklang mit diesen Resultaten stehen die Versuche, welche seit JOHNSON (1830) angestellt wurden, um die Activität der geotropisch abwärts strebenden Wurzel zu erweisen. So fand SACHS[3]), dass die Wurzel von Faba durch ihre geotropische Krümmungskraft

1) Arbeiten d. bot. Instituts in Würzburg 1873, Bd. I, p. 448.
2) DETLEFSEN, ebenda 1882, Bd. II, p. 633.
3) Vgl. PFEFFER, Physiologie Bd. II, p. 320.

ein Gewicht von 1 g zu heben vermochte und bei senkrechtem Auftreffen der Wurzel derselben Pflanze kam in Versuchen Wiesner's[1]) ein Druck bis zu 1,4 g zu Stande.

Da auch beim Wachsen in plastischem Thon die auf eine feste Widerlage treffenden Wurzeln immerhin noch leicht ausbiegen, so ist es verständlich, dass N. J. C. Müller[2]) in derartigen Versuchen eine nur mässige Druckentwicklung beobachtete. Dieser liess 80 Maiskörner in plastischen Thon eingebettet zwischen zwei Glasplatten keimen und beobachtete, dass die Keimlinge die obere Glasplatte noch entgegen einer Belastung von 375 g, nicht aber von 500 g zu heben vermochten. Demgemäss beträgt die Leistung einer einzelnen Wurzel weniger als 6,25 g, also nur einen geringen Bruchtheil des facultativen Maximaldruckes, der in unseren Versuchen mit Maiswurzeln (Tab. I, p. 264) zwischen 158 und 291 g gefunden wurde.

Während in unseren Versuchen der gegen die Messfeder gerichtete Druck genügend genau gemessen wird, erschweren verschiedene Verhältnisse eine exacte Ermittlung derjenigen Druckenergie, welche in der Flächeneinheit des activen Querschnitts entwickelt wurde. Allerdings wenn die Garantie vorläge, dass die Wurzel überall an den Gipsverband unverrückbar fixirt war und dass Verschiebungen innerhalb der Gewebe ausgeschlossen waren, könnte nur die an den Spalt des Gipsverbandes stossende Querzone sich soweit verlängern, als es die Spannung der entgegenwirkenden Feder zulässt und auf die Action dieser Zone würde somit der bemessene absolute Druck zu beziehen sein.

Diese Voraussetzungen treffen indess nicht unbedingt zu. Vielmehr wurde schon früher (p. 247) erwähnt, dass die Gipskappe leicht vom Spitzentheil abgezogen werden kann, dass diese also innerhalb der Gipsform zu gleiten vermag. Deshalb kann dieser Spitzentheil vorwärts gestossen werden, wenn die rückwärts anschliessenden Wurzelpartien einen entsprechenden Druck entwickeln und es bleibt somit zunächst fraglich, in wie weit eine Druckleistung der Spitze

1) Bewegungsvermögen d. Pflanzen 1881, p. 143.
2) Bot. Zeitung 1871, p. 730.

oder einer subapicalen Querscheibe auf solchem Fortstossen oder auf activer Thätigkeit in den bezüglichen Zonen beruht. Ist die Zone aber ganz oder theilweise passiv, so fällt die in Bezug auf diese Zone berechnete Druckintensität zu hoch aus, sobald der fragliche Querschnitt einen geringeren Flächeninhalt besitzt, als diejenige Zone, welche comprimirend und vorwärts stossend wirkt. Eine solche Druckübertragung in der gleichsam wie ein elastischer Körper sich verhaltenden Wurzel vermag auch die conische Form der Wurzelspitze nicht zu verhindern. Doch bleibt unbekannt, welcher Bruchtheil der comprimirend wirkenden Energie durch Reibungswiderstände an der Gipshülle oder durch andere Ursachen äquilibrirt wird.

Jedenfalls fällt aber die für die Flächeneinheit berechnete Energieentwicklung nicht zu hoch aus, wenn die der Rechnung zu Grunde gelegte Querschnittsfläche gleich gross oder grösser ist, als der Flächeninhalt eines jeden Querschnitts, der activ pressend in Betracht kommen könnte.

Dieses ist aber bei Faba erreicht, wenn, wie in unseren meisten Versuchen, die dem Gipsspalt entsprechende Querzone 4—5 mm von der Wurzelspitze entfernt liegt (vgl. Fig. 3 p. 251). Dann ist die basipetal anschliessende Wurzelpartie, wie directe Versuche lehrten, nach 1 bis 2 Tagen derart an den Gips fixirt, dass die in Betracht kommenden Druckkräfte eine Verschiebung nicht mehr erzielen. Zudem ist nach 2 bis 3 Tagen nur ein 5—6 mm langer Spitzentheil der Wurzel wachsthumsfähig, während doch die an Wachsthumsfähigkeit gekettete Druckwirkung nach dieser Zeit noch langsam weiter steigt. Ferner nimmt die Wurzel 3—4 mm hinter der Spitze so allmählich an Dicke zu, dass eine schon geringfügige Anschwellung nach dem Gipsspalt hin ausreicht, um eine Querschnittsfläche herzustellen, wie sie die Wurzel erst wieder in einer 5 oder mehr mm vom Spalt entfernten Region erreicht. Dieses trifft ebenso in dem Versuch 5 (Tab. I p. 264) zu, in welchem durch Herstellen eines entsprechendes Kanals in den Gipsdeckel die ganze Wurzelspitze sich cylindrisch geformt hatte und ungefähr gleichen Durchmesser wie die Krause besass, deren Querschnittsfläche dieselbe war, wie in einer etwa 12 mm weiter rückwärts liegenden Zone.

Die Wurzel von Zea maïs geht noch schneller als die von Faba

in eine annähernd cylindrische Form über, so dass bei jener die Querschnittsfläche der Krause ansehnlicher war, als die des Querschnitts einer 7 oder auch einer 20 mm vom Gipsspalt entfernten Zone.

Nach obigen Erwägungen war es geboten den Gipsspalt nicht zu nahe an die Wurzelspitze, aber auch nicht so entfernt zu legen, dass er in eine in Dauergewebe übergehende Strecke fiel. In unseren nach diesen Gesichtspunkten geleiteten Versuchen hat also der Querschnitt durch die Krause einen grösseren Flächeninhalt als der Querschnitt irgend einer anderen Zone, welche für die gemessene Action in Betracht kommen könnte. Folglich liefert die auf Grund dieses Querschnitts berechnete Druckintensität jedenfalls einen Werth, der als Durchschnitt pro Flächeneinheit mindestens erreicht werden muss, der aber sehr wohl in bestimmten Partien des als homogen betrachteten Querschnitts und ebenso in den in der Gipskappe steckenden Partien des Spitzentheils der Wurzel erheblich überschritten werden kann.

Wenn in der That das Gewebe der conischen Wurzelspitze die von ihm ausgehende Druckintensität activ entwickelt, dann muss diese ansehnlicher sein als ferner von der Spitze. Denn in Versuch 6 *A*, in welchem die durch die Gipshülle tretende Wurzelspitze von Faba direct gegen den Messapparat wirkte (vgl. p. 247), berechnet sich die Druckintensität zu 19,4 Atmosphären, wenn wir den Druck auf die Querschnittsfläche der abgeflachten Wurzelspitze beziehen, während dieser Druck sich nur auf 10,4 Atmosphären stellt, wenn die active Fläche des 4,8 mm von der Spitze entfernten Querschnitts der Wurzel betrachtet wird.

Die nackten Versuchsresultate lassen hier nicht erkennen, ob die Spitze durch die subapicalen dickeren Wurzeltheile nur passiv, wie eine Nagelspitze durch das auf den Kopf drückende Gewicht gegen die Widerlage getrieben wird, oder ob sie die gegen diese letztere ausgeübte Druckenergie activ entwickelt. Im erstern Falle müsste das passive Gewebe der Wurzelspitze, analog wie ein elastischer Körper, eine entsprechende Compression erfahren, während eine solche in letzterem Falle wegfiele, indem die Wurzelspitze den auf sie drückenden Geweben mit gleichem activen Gegendruck entgegentritt.

Aus anderweitigen Erfahrungen und Erwägungen (vgl. Kap. VI) geht aber in der That hervor, dass in den verschiedenen Querschnittszonen der sich verjüngenden Wurzelspitze die absolute Höhe des entwickelten Aussendruckes nicht genau, aber doch annähernd dieselbe ist, dass also die auf die Flächeneinheit bezogene Aussenwirkung mit Abnahme der Querschnittsfläche zunimmt. Die nach der Spitze zunehmende Turgorkraft der Zellen befähigt diese in der That zu intensiverer Aussenleistung, welche durch Uebertragung des zuvor die Zellwand spannenden Turgordrucks auf die äussere Widerlage erzielt wird. Dass aber die äusserste Wurzelspitze, wenn das Längenwachsthum in der übrigen Wurzel mechanisch gehemmt ist, sehr schnell zu wachsen beginnt, also in sehr energische Thätigkeit tritt, wurde schon beiläufig erwähnt und wird in Kap. VI näher erörtert werden.

Die Constanz des Products aus Querschnittsfläche und Druckintensität ist natürlich nicht mathematisch genau zu nehmen. Vielmehr erfahren zweifellos gelegentlich oder dauernd einzelne Gewebzonen eine gewisse passive Compression, die (in zarten Geweben) durch Entspannung der Haut zur Wendung eines Theils der Turgorkraft nach aussen und so zur Herstellung des entsprechenden Gegendruckes führt. Auch sind die Zellen desselben Querschnitts sicher nicht immer zu gleicher Energieentwicklung befähigt, wirken also nöthigenfalls in dem eben angedeuteten Sinn gegeneinander. Dazu ermöglicht das plastische Wachsen der Gewebe und Zellen nicht nur das Ausfüllen aller Lücken, sondern auch ein Verschieben der Elemente gegeneinander, nöthigenfalls also auch ein wirkliches gleitendes Wachsthum. Aber auch schon ein geringes Hervorwölben in einer activ thätigen Querplatte würde genügen, um im Inneren der Gewebe, ähnlich wie in einer plastischen Masse, eine Druckfortpflanzung selbst dann zu vermitteln, wenn die Epidermis an die sie umgebende Widerlage unverrückbar fixirt ist. Zugleich gibt der Mangel von Gleiten an der Gipsfläche noch keine Garantie dafür, dass ein Fortschreiten activer Compressionsthätigkeit im Inneren vermieden ist.

Indess ist jedes Gleiten im Inneren, wie jede active Druckentwicklung durch wachsende Organe, an Wachsthum gekettet und da der Querschnitt fixirter und nicht mehr wachsender Wurzelstrecken den Quer-

schnitt der Krause am Spalte des Gipsverbandes nicht übertrifft, so liefert die auf Grund dieses Querschnitts berechnete mittlere Druckintensität sicher keinen zu hohen, vielleicht aber einen zu niederen Werth. Letzteres müsste u. a. auch der Fall sein, wenn eine gleichgrosse im Gips steckende Querschnittzone einen höheren Gesammtdruck entwickelt, der (auch wenn plastisches und gleitendes Wachsen ausgedehnt mithelfen sollten) der unvermeidlichen Reibungen und inneren Widerstände halber, doch nicht seinem vollen Betrage nach für das Auseinandertreiben des Gipsverbandes wirksam werden könnte.

Dagegen kommt in der mit dem Spalt zusammenfallenden Querzone der Wurzel die entwickelte Energie ihrem vollen Betrage nach zur Wirkung gegen die Messfeder. Dazu sichert das bis zu den möglichen Grenzen thätige Wachsthum die Verlängerung dieser Zone, so dass dieserhalb die Erweiterung des Spaltes oder eine Compression in der Wurzel einen Einfluss auf die endlich entwickelte Druckenergie nicht ausüben.

In Erwägung der gesammten obwaltenden Verhältnisse lehren unsere Experimente also zweifellos, dass die Wurzeln gegen eine vollständige Widerlage eine hohe Druckintensität zu entwickeln vermögen. Die maximalen Druckleistungen einzelner Zellen werden aber, wie gesagt, durch unsere Mittelwerthe nicht angezeigt. Die berechneten mittleren Druckintensitäten sind ferner zu gering ausgefallen, da wir Homogenität des wirksamen Querschnitts annehmen, obgleich für die osmotische Energie nur das Lumen der Zelle entscheidend ist. Wenn demgemäss das von Zellwand und Intercellularräumen eingenommene Areal etwa $\frac{1}{4}$ der Fläche ausmachte, müsste dem entsprechend die mittlere Druckintensität erhöht werden. In Versuch 1 (Tab. I, p. 264) würde dann z. B. die active Querschnittsfläche ungefähr 2,7 qmm messen und die auf 1 qmm bezogene Druckintensität würde von 72,8 g auf 95,4 g zu erhöhen sein.

Da aber verschiedene, z. Th. schon angedeutete Umstände ebenfalls Einfluss auf die Bestimmung der realen Druckintensität haben, so unterlasse ich ein Eingehen auf diese und andere Correctionen, die übrigens sämmtlich zu dem Resultate führen, dass die mittlere Druckintensität des Querschnitts oder mindestens einzelner Elemente, höher sein muss, als die von uns angeführten Werthe. Unter solchen Umständen muss auch dahin gestellt bleiben, ob die zwischen 7 und

10,7 Atm. befundenen Leistungen der Wurzeln von Faba auf individuelle Differenzen hinweisen oder ob diese Druckunterschiede sich aus anderen Ursachen ergeben. Auch will ich unentschieden lassen, ob, wie es nach den Versuchen scheint, die Wurzel von Mais eine höhere, die von Aesculus eine geringere mittlere Druckintensität als die von Faba entwickelt.

Ein gewisser Fehler ist auch immer mit der Ermittlung der Querschnittsfläche verknüpft. Da ich aber stets bestrebt war, die grösste Fläche des Querschnitts durch die Krause u. s. w. anzunehmen, so ist die Garantie geboten, dass dieserhalb die berechneten Druckintensitäten eher zu gering, als zu hoch ausgefallen sind. Welch erheblichen Einfluss die Verschiebung der Dimension der wirksamen Fläche hat, mögen die Versuche 8—10 mit Mais (Tab. I, p. 264) veranschaulichen, in welchen unter *B* der grösste Durchmesser der Krause, unter *A* der anschliessenden im Gips steckenden Querzone verzeichnet ist. Die Intensität der Druckenergie würde sich also wesentlich höher stellen, wenn, wie es sogar wahrscheinlich ist, nicht gerade der grösste Durchmesser der etwas in den Gipsspalt gewölbten Krause der Rechnung zu Grunde zu legen ist. Dass eine Keilwirkung der Krause für das Resultat nicht in Betracht zu ziehen ist, mag unerörtert bleiben, da zu gleichem Resultat auch diejenigen Druckversuche führten, in welchen eine Krausenbildung nicht in merklicher Weise vorlag.

Diesen Verhältnissen gegenüber kommen die aus dem Messapparat selbst resultirenden Fehler kaum in Betracht. Denn einem Ablesungsfehler von $\frac{1}{2}$ Theilstrich des Mikrometers entspricht in den meisten Versuchen mit Faba ein Druck von etwa 7 g, also eine Grösse, die auf den Werth der berechneten Druckintensität nur wenig Einfluss hat.

Der mit Hilfe des Kautschuckschlauchs gefundene geringere Druck bei Faba kann hier unerörtert bleiben, da diese Methode, wie schon betont (p. 260), weniger exact ist und zudem ganz fraglich lässt, auf welche Zone der gefundene Druck zu beziehen ist. Thatsächlich fiel der absolute Druck so hoch aus als in den Gipsversuchen und dieses würde auch für die Intensität zutreffen, wenn der Rechnung ein der Spitze näherer kleinerer Querschnitt zu Grunde gelegt worden wäre.

Zweifellos sind verschiedene Wurzeln zur Ausübung ungleich hoher Druckintensität befähigt. Doch ist eine genaue vergleichende Messung, nach dem schon Gesagten, keineswegs ganz leicht und lag auch nicht in unserer Absicht. Die Frage gewinnt überhaupt erst ein höheres Interesse, wenn sie in Rücksicht auf die biologischen Eigenheiten der Wurzeln (und analog anderer Pflanzentheile) betrachtet wird, denn für Ueberwindung oder Umgehung von Widerständen kommen neben der mechanischen Energie auch andere Eigenschaften in Betracht. In einer solchen Beleuchtung wird der Gegenstand in einem späteren Kapitel (VIII) eine theilweise Erörterung finden, hier aber dürften einige Bemerkungen in Bezug auf den Spitzendruck am Platze sein.

Falls die gefundenen Werthe (Tab. I, p. 264) die realen Druckverhältnisse widerspiegeln, ist die dünnere Wurzel von Mais der dickeren von Faba und diese der noch stärkeren Wurzel von Aesculus in der Druckintensität (nicht in dem absoluten Druck) überlegen, während die dünnste der untersuchten Wurzeln, die von Vicia sativa, die Druckintensität der Maiswurzel nicht zu übertreffen scheint. Auch ist keineswegs zu erwarten, dass allgemein die absolute Druckleistung langsamer abnimmt, als der Querschnitt und es ist wohl möglich, dass z. B. die dünne Wurzel von Lemna minor, welche normal nicht gegen nennenswerthe Widerstände zu arbeiten hat, nur zu relativ geringer Druckintensität befähigt ist, wie dieses auch für die noch dünneren Fäden von Spirogyra zuzutreffen scheint (Kap. X).

Unter Anderem kann auch die conische Form der Wurzelspitze für die Druckwirkung der Spitze Bedeutung gewinnen, da die Energie absolut gesteigert wird, wenn die Gleitung im Gipsverband es zulässt, dass der in einem rückwärts liegenden grösseren Querschnitt entwickelte absolute Druck mehr oder weniger auf die Spitze übertragen wird (vgl. übrigens p. 275 über die annähernde Constanz des Productes aus Druck und Querschnitt).

Für das erfolgreiche Ueberwinden von Widerständen sind aber nicht allein Spitzendruck und die angedeuteten, sondern noch anderweitige Momente mit entscheidend. Es möge hier genügen an die später (Kap. VIII) zu besprechende spaltende Wirkung, durch welche der Spitze die Bahn gebrochen wird und ferner an den nach Form des Objectes, Qualität des Mediums u. s. w. veränder-

lichen Reibungswiderstand zu erinnern. Hinsichtlich des letzteren sind, ceteris paribus, die dünneren Pflanzentheile im Nachtheil, da die Fläche des Querschnitts und mit dieser die treibende Energie im quadratischen, der Umfang aber und mit diesem die Reibung im einfachen Verhältniss zum Radius steht. Dieserhalb werden bekanntlich sehr kleine Partikel in der Luft leicht schwebend erhalten und es muss speciellen Untersuchungen die Entscheidung überlassen werden, ob etwa bei dünnen Pilzfäden u. s. w., die offenbar theilweise zur Ueberwindung ansehnlicher Widerstände befähigt sind, der erwähnte Nachtheil durch höhere Energieentwicklung oder andere Einrichtungen ausgeglichen wird. Neben allen auf Herabdrückung der Reibung zielenden Eigenschaften fallen auch lösende Wirkungen ins Gewicht, die bekanntlich schon die Secrete der Wurzel und noch mehr die Secrete derjenigen Pilze ausüben, welche sich ihren Weg durch vegetabilische und animalische Häute bahnen.

Nach alledem dürfte die biologisch bedeutungsvolle Leistungsfähigkeit der Pflanze unter Umständen besser als durch Druckmessungen nach dem Verhalten gegen Medien zu beurtheilen sein, die je nach dem Widerstande ein Durchbrechen gestatten oder verwehren und die derart gewählt werden können, dass chemisch wirkende Secrete bedeutungslos sind. Studien solcher Art lagen jedoch zur Zeit nicht in meiner Absicht und ich begnüge mich hier mit dem Hinweis auf einige beiläufige Versuche, denen ich indess eine entscheidende Beweiskraft nicht beimesse.

In dem Vordringen, resp. Nichtvordringen in plastischem Thone verschiedener Consistenz scheint die dickere Wurzel von Faba den dünneren Wurzeln von Vicia sativa und Brassica Napus und noch mehr den Fäden von Spirogyra überlegen zu sein. Dem entsprechen auch Versuche mit Würfeln aus möglichst homogener, wasserdurchtränkter Celloidinmasse (vgl. p. 246), in welche zur ersten Aufnahme der Wurzeln kurze Canäle gebohrt waren. Leider hat dieses durchsichtige Celloidin verschiedene Nachtheile; von anderen durchsichtigen Medien sind aber Gelatine und Agar in brauchbarer Qualität nicht genügend consistent, wenigstens nicht für die mechanische Hemmung des Wachsthums von Wurzeln.

Für gewisse Zwecke kann wohl auch zur Beurtheilung das Verhalten gegen ungleich starken Stanniol benutzt werden und in solchen

Versuchen ist ein Ausbiegen der Wurzeln u. s. w. ausgeschlossen, wenn man diese durch einen entsprechenden Gipskanal gegen den abschliessenden Stanniol wirken lässt. Ferner lässt sich dem Gipsguss eine verschiedene Consistenz geben, und in einem sehr wasserreichen Gipsguss vermögen sich thatsächlich Wurzeln und Wurzelhaare mehr oder weniger mechanisch einzubohren.

C. Querdruck.

Uebt eine Wurzel allseitig denselben Radialdruck gegen eine Widerlage aus, so wird letztere in derselben Weise wie durch einen entsprechenden Wasserdruck in Anspruch genommen, d. h. der Gesammtdruck wächst mit der Fläche des median halbirenden Längsschnitts, entspricht also dem Product aus Durchmesser und Länge des umhüllenden Verbandes. Mit solcher Energie wirkt demgemäss der Deckel des Gipsverbandes gegen die Messfeder (Fig. 4 p. 253) und da bekanntlich die Tangentialspannung in der Hülle im umgekehrten Verhältniss zum Durchmesser steht, so muss mit der Dicke der Wurzel der Gipsverband entsprechend verstärkt werden, um genügende Widerstandskraft zu gewinnen. Als vergleichendes Maass für die Druckintensität dient uns aber naturgemäss der Quotient aus der gemessenen absoluten Energie und dem Medianschnitt, d. h. der von 1 qmm des letzteren entwickelte Druck.

Auf diese Weise erhalten wir natürlich wieder nur einen Mittelwerth und wenn wahrscheinlich ist, dass in Richtung der Radien eines Querschnitts (abgesehen von entstehenden Nebenwurzeln) annähernd gleiche Energie besteht, so sind doch Differenzen in verschiedenen Querschnitten nicht nur möglich, sondern sogar wahrscheinlich. Dagegen ist es für die Druckintensität ohne Bedeutung, wenn nur die peripheren Gewebe activ sind, sowie ja auch derselbe Wasserdruck gegen die Aussenwand fortbesteht, wenn durch Einschieben eines starken Cylinders die Wassermasse auf eine Mantelschicht reducirt wird. Bedingung für volle Energieentwicklung ist natürlich, dass der inactive Innencylinder (wie z. B. das Holz der Bäume) eine solide Widerlage bildet, denn bei einem Ausweichen kommt allgemein kein hoher Druck zu Stande. Selbstverständlich wird durch unsere Apparate die volle Energie der activen Zellen nicht gemessen, wenn ein Theil dieser Energie (wie z. B. durch die

Rinde der Bäume) durch negativ gespannte Gewebemassen äquilibrirt wird, gerade so wie unter solchen Umständen der nach aussen wirkende Längsdruck in entsprechendem Maasse vermindert wird. Aus diesen und anderen Gründen, von denen nur an das relativ langsamere Dickenwachsthum erinnert sein mag, wird die Ermittlung des Querdruckes im Allgemeinen ungenauer ausfallen, als die Bestimmung des Längsdruckes.

Betrachten wir nach diesen Vorbemerkungen auf Tab. II (p. 266) zunächst die unter Nr. 13—16 bezüglich der Wurzel von Faba und unter Nr. 21 bezüglich der Wurzel von Mais zusammengestellten Versuche, so begegnen wir Druckintensitäten von 4,3 bis 6,6 Atmosphären, während für den Längsdruck derselben Wurzeln 7—11,2 Atmosphären gefunden wurden. Doch möchte ich hieraus nicht folgern, dass die Intensität des Querdruckes überhaupt geringer ist. Schon das verhältnissmässig langsamere Anschwellen des letzteren lässt es zweifelhaft erscheinen, ob nach 6½ Tagen — der längsten Versuchszeit — die maximale Druckhöhe erreicht war, da es unsicher ist, ob in dieser Zeit das Bestreben nach secundärem Dickenwachsthum sich mit voller Energie geltend machte. Jedenfalls vermag weiterhin der Gesammtdruck noch zuzunehmen, da öfters Gipscylinder 2—3 Wochen lang den Druck der allseitig umschlossenen Wurzel aushielten, um dann erst Sprengung zu erfahren. Möglich also, dass mit der Zeit der Querdruck ansehnlicher ausfällt als der Längsdruck und vielleicht sich zu gleicher Intensität erhebt wie in Baumstämmen. Uebrigens wurde für Keimstengel ein bestimmter Unterschied zwischen Längs- und Querdruck nicht gefunden (Kap. IX).

Selbst wenn die Druckintensität die in unseren Versuchen verzeichneten Werthe nicht überschreitet, fällt mit Zunahme der wirksamen Fläche der Gesammtdruck recht ansehnlich aus. Dieser steigt in Versuch 13 für den 8 mm langen Spitzentheil der Wurzel auf 1,83 kg und ein 10 cm dickes und 100 cm langes Wurzelstück würde bei einer Druckintensität von 6 Atmosphären einen Gesammtdruck von rund 6000 kg gegen die Widerlage entwickeln.

Es ist deshalb nicht auffällig, dass z. B. ein Gipscylinder nach 14 Tagen gesprengt wurde, als in dessen Mitte sich die 40 mm lange Keimwurzel von Vicia faba befand, deren Medianschnitt 90 qmm

betrug. Denn bei einer Intensität von 60 g pro qmm kam schon ein Gesammtdruck von 5,4 kg zuwege, der nach dem Gesagten aber wahrscheinlichst allmählich erheblich, ja vielleicht bis auf das Doppelte gesteigert wurde. In diesem Versuche handelte es sich um schon recht harten Gips, denn ein weicher Gipsguss wird unter den besagten Verhältnissen in den ersten Tagen gesprengt. Uebrigens ist zu beachten, dass in dem Gipsverband bald Nebenwurzeln erscheinen, deren gegen die Gipswand wirkende Spitze in dem Gesammtdruck mit ins Gewicht fällt.

In den bisher berücksichtigten Versuchen wirkte der 5—11,2 mm lange Spitzentheil der Wurzel (vgl. Verticalreihe *c* der Tabelle II) gegen den Gipsdeckel und den Messapparat. In Versuch 17 war dagegen der 7 mm lange Spitzentheil eingegipst und die Energieentwicklung des anschliessenden 8,7 mm langen Spitzentheils wurde gemessen. Nach dem gewonnenen Resultate (= 5,5 Atm. Druck) erreicht in der benutzten Versuchszeit die Druckintensität in dem subapicalen und apicalen Theile der Wurzel gleiche Höhe. Auf den geringeren Intensitätswerth (3,5 Atm.) in Versuch 19A ist kein Werth zu legen, da in diesem Falle der Gipsdeckel zu ansehnlich abgedrängt wurde und die so ermöglichte Entstehung von Nebenwurzeln weitere Complicationen einführte.

Wird aber ein wachsthumsfähiger Theil der Wurzel nicht eingegipst, so ist eine gewisse gegenseitige Beinflussung von Längs- und Querdruck möglich und für bestimmte Fälle nothwendig. So wurde schon besprochen (p. 268), dass bei mechanischer Hemmung des Längenwachsthums der Spitzentheil der Wurzel ein gefördertes Dickenwachsthum erfährt, das ihn zum Anschmiegen und zum Wirken gegen Formen bringt, deren Durchmesser andernfalls dieser Wurzeltheil nicht erreicht haben würde.

Schon diese Erwägungen und die noch zu besprechenden (Kap. VII), theilweise auch schon angedeuteten Erfolge, lassen keinen Zweifel, dass es sich nicht allein um rein mechanische Effecte, sondern auch um auf Reizvermittlung basirte Correlationen handelt. Dieserhalb ist es auch möglich, dass eine Wurzel es nicht zur vollen Druckenergie bringt, wenn irgend ein Theil sich in Freiheit befindet, doch ist natürlich nicht in allen Fällen eine solche Beeinflussung nothwendig.

Auf die zwei bezüglich des Druckes in dieser Richtung angestellten Versuche möchte ich indess kein entscheidendes Gewicht legen. In dem Versuch 18 wurde die 7,5 mm lange Wurzelspitze frei gelassen und wuchs im Laufe von 10 Tagen zu einem ganz ansehnlichen Wurzelsystem heran (vgl. die Belege), während in dieser Zeit der Querdruck des anschliessenden in den Gipsverband gebrachten Wurzeltheils auf 3,9 Atmosphären anstieg. Diese Intensität erreichte sogar nur 2,2 Atmosphären in Versuch 20, in welchem der zwischen zwei parallele Thonplatten eingeengte Wurzeltheil während der 10tägigen Versuchsdauer eine abgeplattete Form angenommen hatte.

Weitere Erfahrungen werden lehren müssen, ob thatsächlich die Druckentwicklung für die Flächeneinheit nicht so hoch ansteigt, wenn zwischen zwei Platten die frei bleibenden Flächen Dickenwachsthum ausführen können. Die gleiche Frage gilt auch für den Fall, dass dem einzigen Verbindungsweg zwischen dem ausgezweigten Wurzelsystem und der Basis der Wurzel das Dickenwachsthum mechanisch unmöglich gemacht ist. In diesem Falle dürfte aus allgemeinen biologischen Rücksichten zu erwarten sein, dass der eingezwängte Theil es endlich zu ansehnlicher mechanischer Reaction bringt.

Die genügende Genauigkeit ist mit unseren Versuchsmethoden für diese und ähnliche Fragen schon zu erreichen. Speciell die Angaben des Messapparates sind jedenfalls genau genug, denn selbst ein Fehler von 30 g fällt bei Druckleistungen von mehr als 1000 g nicht mehr schwer ins Gewicht. Bei Anwendung starker und breitbandiger Federn ist auch ohne Belang der Schubdruck, welchen die noch nach Längenwachsthum strebenden Wurzeltheile ausüben. Ebenso darf ich u. a. den relativ geringen Fehler übergehen, der daraus entspringt, dass an der Grenze des im Dickenwachsthum gehemmten und ungehemmten Theiles eine Einbuchtung entsteht und aus dieser Constellation eine gewisse, senkrecht gegen den Gipsdeckel gerichtete Componente resultirt.

IV. Zeitlicher Verlauf der Druckentwicklung in Wurzeln.

Ein näherer Verfolg des Verlaufs der Drucksteigerung war nicht beabsichtigt, doch lässt sich aus den Experimenten für Wurzeln und ebenso übereinstimmend für Keimstengel und Grasknoten das Hauptsächlichste des Ganges entnehmen. Die wachsenden Organe beginnen nämlich sogleich mit dem Auftreffen auf eine Widerlage einen Druck gegen diese auszuüben, dessen zunächst schnelleres Ansteigen sich allmählich verlangsamt, um endlich auszuklingen, so dass schliesslich die Druckhöhe so gut wie constant wird.

Im Näheren muss unbestimmt bleiben, ob gegen eine unverrückbare Widerlage die Druckschwellung sogleich mit dem vollen Betrage einsetzt oder zunächst eine gewisse Beschleunigung bis zu einem Maximum erfährt; ob etwa die Druckcurve sich für gewisse Zeit nahezu horizontal hält oder bald abzufallen beginnt; ob ferner die Curve secundäre Maxima und Minima bietet, was, wenn auch in engen Grenzen, wahrscheinlich ist, da Wachsthum und Gewebespannung periodische Schwankungen aufzuweisen haben. Auch ist noch fraglich, ob etwa bei Fortdauer der mechanischen Wachsthumshemmung, also bei vergeblichem Ankämpfen gegen die einengende Widerlage, die Druckleistung gesund bleibender Organe sich constant erhält oder endlich bis zu einem gewissen Grade zurückgeht, ein Rückgang, der in gegebenen Fällen als ein Correlationserfolg eintreten dürfte. Sind die Organe bei Darbietung der Widerlage nicht schon in vollem Wachsthum begriffen, wird letzteres vielmehr erst, wie bei geotropischer Krümmung der Grasknoten, durch einen Reiz inducirt, so ergiebt sich als unmittelbare Consequenz aus der zeitlichen Entwicklung der Reizkrümmung, dass die Druckentwicklung gegen die Widerlage durch ein Maximum gehen muss.

Wird ein gewisser Gegendruck hergestellt, z. B. indem der Gipsdeckel durch Anspannen der Messfeder mit bestimmter Energie gegen den fixirten Gipsklotz gepresst wird (vgl. Fig. 3 und 4), so beginnt ein Abheben des Gipsdeckels natürlich erst dann, wenn die Druckenergie diese Gegenwirkung äquilibrirte und überschritt. Bis dahin war also keine Verlängerung des nach Wachsthum strebenden

Organs möglich und der mit der Compression schnell ansteigende Druck der Feder bringt es mit sich, dass der eingeengte Pflanzentheil auch fernerhin nahezu unverändert die Länge der Gipsform bewahrt.

Gelingt es aber nach gewisser Drucksteigerung die Widerlage zu durchbrechen, so wächst die Wurzel u. s. w. weiter und hat natürlich eine entsprechende Arbeit zu leisten, wenn sie auf ihrem Wege einen Widerstand zu überwinden hat, ein Fall, den wir noch (Kap. VI) zu betrachten haben.

In unseren auf die endliche Leistung berechneten Versuchen wurde aus guten Gründen zu Beginn ein Gegendruck hergestellt. Von der Energieentwicklung der Wurzel erhalten wir also erst mit weiter fortschreitender Compression der Feder Kenntniss. Aus dem bis dahin erreichten Druckwerthe und der verflossenen Zeit ist aber nur ein Mittelwerth berechenbar, während der weitere Verlauf der Druckentwicklung so weit näher verfolgt werden kann, als die geringe absolute Compression der Feder gestattet.

In der tabellarischen Zusammenstellung der Belege (Abth. I) sind die auf 1 Stunde berechneten Druckzunahmen in der »Druckzunahme pr. 1 Stunde« signirten Verticalreihe derart angeführt, dass die davorstehende Klammer Druckhöhe, resp. Druckdifferenz und Zeitintervall markirt, aus welchen der Mittelwerth für 1 Stunde berechnet wurde. In Versuch Nr. 2 war z. B. das Experiment um 7½ Morgens fertig zusammengestellt worden. Bis 12 Morgens hatte sich, nach Abhebung des Gipsdeckels, ein Druck von 66,5 g entwickelt und dieser Druck stieg von 12 Uhr bis 2 Uhr Nachmittags auf 93,3 g, also in 2 Stunden um 26,8 g. In dieser, und zum Theil in noch mehr verkürzter Form, sind auch die übrigen Tabellen zusammengestellt, die also nicht sämmtliche Ablesungen wiedergeben, in denen ferner nur der aus der Federcompression berechnete Druckwerth angeführt ist. Nur in Versuch 1 ist ausserdem die Distanz der Nadelspitzen in Theilstrichen der Mikrometerscala hinzugefügt.

Aus diesen Stundenwerthen ist die besprochene Regel der Druckanschwellung allgemein zu ersehen. In Bezug auf den Längsdruck der Wurzel von Vicia faba betrug z. B. diese stündliche Zunahme in Versuch 2 für die ersten 3½ Stunden 14,78 g, für die folgenden

2 Stunden 13,4 g, für die folgenden 4 Stunden 11,65 g und sank nach 2½ bis 3 Tagen auf 0,54 g.

Aus weiteren Versuchen ist zu entnehmen, dass die Druckschwellung in der ersten Zeit auch langsamer als in Versuch 2 fortschreiten kann, doch wird natürlich dieser Mittelwerth um so mehr deprimirt, je weiter in ihm schon die Zeit verlangsamter Druckzunahme aufgenommen ist. In diesem Sinne ist auch der auf die ersten 23 Stunden bezügliche Mittelwerth 6,28 g in Versuch 4 zu verstehen, in welchem schliesslich vom 5. zum 6. Tage die stündliche Zunahme auf 0,05 g gesunken war.

Aus unseren Experimenten ist nur zu entnehmen, dass die Curve der Druckentwicklung keine grösseren Oscillationen aufzuweisen hat, denn kleinere Schwankungen konnten und sollten in den Experimenten nicht gemessen werden. Und wenn z. B. in Versuch 1 die stündliche Zunahme bei Beginn des Experimentes etwas geringer erscheint (13,5 gegen 15,3 g), so ist dieses schon deshalb nichtssagend, weil hier zunächst einige Zeit verstreichen musste, ehe die fortwachsende Wurzelspitze den verlängerten Canal des Gipsdeckels durchwachsen hatte. Zudem sind die mit dem Eingipsen und dem Zusammenstellen des Experimentes verknüpften Eingriffe wohl geeignet, den Gang der Druckentwicklung in der Wurzel zu beeinflussen. Dieses gilt in noch höherem Grade für die Versuche im Kautschuckschlauch, so dass der unregelmässigen Druckzunahme in Versuch 7 ein Werth nicht beigemessen werden kann.

Die Gipsmethode ist aber — wenigstens in der von uns angewandten Weise — für näheren Verfolg der Druckentwicklung zu Beginn des Experimentes deshalb nicht geeignet, weil der Gipsguss mit der Wasseraufnahme an Volumen gewinnt und deshalb eine Compression der Feder erzielt, resp. steigert (vgl. p. 259). Dieser Vorgang ist nach 12 Stunden beendet und somit für die Messung des Enddruckes ohne Bedeutung. Dagegen muss sich die durch die Gipsmasse erzielte Federspannung gegen die Wurzel richten, sofern der Gipsdeckel (Fig. 3) nicht auf die übrige Gipsmasse (*a*) gestützt ist. Die so erzielte Resultante ist aber nicht so einfach, dass aus der Bestimmung der Dimensionsänderung des Gipses sich ohne weiteres die active Leistung der Wurzel ableiten lässt.

Den sofortigen Beginn der Druckwirkung mit dem Auftreffen

lehren evident die schon besprochenen Versuche (p. 271 und Belege Versuch 22), in welchen die an der Basis fixirte Wurzel mit der freien Spitze auf die Platte des Messapparates traf. Bei Anwendung einer schwachen Feder war mit der Druckentwicklung ein nicht unerheblicher Längenzuwachs verknüpft und schon hieraus erklärt es sich, dass die Druckzunahme langsamer verlief, nämlich 3,82 g resp. 6,2 g in der Stunde betrug.

Ebenso wie das Wachsthum bietet die Druckentwicklung specifische Differenzen und wird von äusseren Verhältnissen beeinflusst, welche übrigens, wie speciell die Temperatur, in unseren Experimenten ziemlich constant waren. Doch darf man nicht erwarten, dass die Druckentwicklung und die normale Wachsthumsschnelligkeit in einem proportionalen Verhältniss stehen. Denn mit der mechanischen Hemmung ist der normale Zuwachs thatsächlich aufgehoben, also ein neuer Zustand geschaffen, in welchem die Pflanze so reagirt, dass durch Flächenwachsthum der Zellhaut die zuvor auf die Spannung der letzteren verwandte osmotische Energie gegen die Widerlage gelenkt wird. Gleiches geschieht auch bei künstlicher Compression, doch ist nicht zu vergessen, dass mit solchen Eingriffen besondere Verhältnisse oder doch gewisse transitorische Störungen geschaffen werden können.

In denjenigen Versuchen, in welchen eine künstliche Drucksteigerung zur Anwendung kam, habe ich wohl beobachtet, dass die active Druckschwellung sogleich weiter ging, ohne indess den Gang letzterer näher auf Störungen u. s. w. zu prüfen. Diese active Schwellung wird selbstverständlich mit der Druckhöhe verlangsamt. Wenn man aber aus dieser activen Schwellung und der in kurzer Zeit vollzogenen künstlichen Drucksteigerung den stündlichen Mittelwerth berechnet, so wird dieser natürlich, je nach der in Rechnung zu ziehenden Zeit und Drucksteigerung, grösser oder kleiner ausfallen, als der vor der Drucksteigerung gefundene Stundenwerth.

Dem entsprechen auch die bei Ermittlung des Querdrucks in der Wurzel von Vicia faba gefundenen Resultate. In Versuch 13 (Abth. I) wurde z. B. am 14. Januar 8 Morgens der Druck künstlich um 201 g gesteigert und erfuhr in den folgenden 24 Stunden eine active Zunahme um 57 g. Die stündliche Druckzunahme beträgt somit 10,75 g und ist ansehnlicher als jeder vorausgegangene Stundenwerth (4,07 und

4,36 g). Dagegen fällt z. B. in Versuch 14 dieser vorausgegangene Werth ansehnlicher aus, als der nach der Drucksteigerung aus der 24stündigen Belastungszeit berechnete.

Bei ungestörter Entwicklung bietet übrigens, wie aus den Versuchstabellen folgt, die Druckzunahme in transversaler und longitudinaler Richtung denselben Gang. Durchschnittlich geht aber, wie auch das Wachsen, die Druckzunahme in transversaler Richtung langsamer von statten.

V. Die Mechanik der Aussenleistung durch Wurzeln.

A. Vorbemerkungen.

Während es vielfach gelang gewisse Theile einer vitalen Reaction, insbesondere die mechanischen Mittel der Ausführung aufzuklären, liegt noch in keinem Falle eine lückenlose Einsicht in die ganze Kette von Processen vor, die von einem Anstosse ab zu der mechanischen Ausführung und somit zum endlichen Erfolge führen. In gleicher Lage befinden wir uns in Hinsicht auf die Fähigkeit wachsender Pflanzen, gegen äussere Widerstände je nach Bedürfniss, also in selbstregulatorischer Weise, ein grösseres oder geringeres Maass mechanischer Energie zur Wirkung zu bringen. Die nächsten, zur mechanischen Ausführung der Reaction führenden Mittel aber vermochten wir völlig aufzudecken und den diesbezüglichen Studien ist dieses Kapitel gewidmet, während wir allgemeinere Betrachtungen über diese selbstregulatorische Reaction auf später verschieben. Auch halten wir uns hier speciell an die maximale Leistung gegen eine unverrückbare Widerlage, da sich aus den so gewonnenen Erfahrungen die Verhältnisse bei äusserer Arbeitsleistung durch eine fortwachsende Pflanze leicht ergeben.

Durch welche Mittel überhaupt die Pflanzen mechanische Leistungen gegen entgegentretende Widerstände zu vollbringen vermögen, ist in meinen »Studien zur Energetik 1892« dargelegt, auf welche ich demgemäss hier verweisen muss (besonders p. 213—240). An dieser Stelle ist gezeigt, wie in zartwandigen Zellen und Geweben, also auch in den Wurzelspitzen, als hinreichende Kraftquelle für höhere

Aussenwirkung nur die osmotische Energie zur Verfügung steht. Diese osmotische Energie, oder was dasselbe sagt die Turgorkraft[1]), wird normalerweise durch die entsprechende Spannung der Zellhaut äquilibrirt, und nur so weit für diese Spannung die Turgorkraft nicht in Anspruch genommen ist, vermag sie gegen eine andere Widerlage zu wirken.

Eine solche Uebertragung der osmotischen Energie wird auch bei Compression der Zellen durch eine umschliessende Widerlage erreicht, indem eben, dem ausgeübten Drucke entsprechend, die Zellwand mehr und mehr und endlich gänzlich entspannt wird. Bei noch weiter fortgesetzter Compression giebt das zartwandige Gewebe nur deshalb nicht wie ein turgorloses Gewerbe nach, weil mit dem Wasseraustritt die Lösung in den Zellen concentrirter und desshalb osmotisch leistungsfähiger wird.

Eine wachsende Zelle oder Pflanze, in welcher die Turgorkraft ebenfalls in jedem Zeitdifferential durch die Spannung der Wandungen äquilibrirt ist, hat beim Auftreffen auf Widerstand diese Uebertragung der osmotischen Energie, also die nöthige Entspannung der Zellhaut, selbstthätig zu besorgen. Das geschieht, indem die Zellhaut weiter in die Fläche wächst, wenn auch die feste Widerlage eine Vergrösserung des äusseren Umfangs nicht gestattet. Je weiter also die so vermittelte Entspannung fortschreitet, um so mehr osmotische Energie wird als Druck gegen den vorgefundenen Widerstand gewandt, ein Druck, der mit völliger Entspannung der Haut sein Maximum erreicht, da er ja höchstens der jeweils gebotenen osmotischen Energie gleichkommen kann. So lange aber noch ein Theil der osmotischen Energie auf Spannung der Haut verwandt ist, kann der maximale Grenzwerth nicht erreicht werden.

Die Entspannung der Haut, d. h. das hierzu führende Wachsen, liefert also nicht die Druckkraft, sondern dient nur dazu, die gebotene osmotische Energie gegen eine äussere Widerlage, also gegen einen anderen Angriffspunkt zu lenken. Zu solcher Druckentwicklung gegen einen gebotenen Widerstand bedarf es keiner Erhöhung der Turgor-

1) Wegen der geringen Cohäsion im Protoplasmakörper fällt die Turgorkraft so gut wie allein auf osmotische Energie. Vgl. Pfeffer, Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen 1890, p. 151 u. 329.

kraft und thatsächlich tritt eine solche bei gewissen Pflanzen nicht ein. In anderen Pflanzen dagegen setzt sich die Reaction gegen eine Widerlage aus Hautentspannung und Turgorsteigerung zusammen. Wird damit die potentielle Fähigkeit für Druckleistung natürlich erhöht, so muss deshalb doch nicht die in einer anderen Pflanze normal vorhandene osmotische Energie übertroffen sein, und schon dieserhalb leuchtet ein, dass die relativ höchste Aussenleistung nicht nothwendig an eine Turgorsteigerung geknüpft ist.

Die Turgorschwellung ist also ein zwar vielfach mitwirkendes, aber nicht nothwendiges Glied der Reaction. Ein in wachsenden Organen nothwendiges Glied ist aber die Hautentspannung, die durch bleibende Verlängerung, also durch das Flächenwachsthum der Zellwand erreicht wird. Die Thatsache dieser Entspannung genügt zur Charakterisirung des nächsten Mittels für die Realisirung der Aussenleistung, für deren Erzielung und Erfolg es ja überhaupt gleichgiltig ist, auf welche Weise die Entspannung erreicht wird. Diese allerdings für den Rückverfolg der Glieder der Reactionskette, sowie für die Wachsthumsmechanik bedeutungsvolle Frage werden wir demgemäss nicht in diesem Kapitel, sondern erst später behandeln. Analog haben wir hier nur mit der Constanz oder der Veränderung der Turgorkraft als Thatsache zu rechnen, da allein die Höhe der Turgorkraft die disponible Energie bestimmt und es in alleiniger Rücksicht auf diese nicht in Betracht kommt, welche Stoffe wirksam sind und durch welche Mittel dieselben in der Pflanze erzeugt oder gewonnen werden.

Natürlich kann auch durch alleinige Turgorsteigerung ein Druck gegen eine Widerlage erreicht werden, welche der nach Ausdehnung strebenden Zelle entgegentritt. Ausschliesslich in dieser Weise reagiren jedoch wachsende Pflanzen gegen einen Widerstand nicht und bei gänzlichem Mangel des Wachsens ist eine Arbeitsleistung auf weitere Strecke ausgeschlossen. Denn durch die zunehmende Spannung der elastisch gedehnten Haut wird die Turgorkraft äquilibrirt, und bei den Elasticitätsverhältnissen der meisten ausgewachsenen Zellwände wird so die Verlängerung in enge Grenzen gewiesen. Nur wo sehr ansehnliche elastische Verlängerungen oder besondere geeignete Constellationen geboten sind, können demgemäss durch eine Turgorschwankung so weitgehende Bewegungen erzielt werden,

wie sie für die Staubfäden der Cynareen, für Mimosa pudica u. s. w. bekannt sind[1]). Auch wenn einmal, ohne Mithilfe von Wachsthum, die alleinige Verminderung des Elasticitätscoefficienten der Haut eine Verlängerung veranlassen sollte, so ist diese doch in enge Grenzen gebannt.

Bei Beseitigung des von einer Widerlage ausgehenden Druckes — gleichviel ob dieser durch Activität der Pflanze oder durch Compression hergestellt wird — kommt wiederum die volle osmotische Energie gegen die Zellwand zur Wirkung, die dem entsprechend gedehnt und gespannt wird. War in der Reaction gegen das Hinderniss eine Turgorsteigerung eingetreten, so haben die Zellwände nunmehr so lange einem höheren osmotischen Druck entgegenzuwirken, bis dieser wiederum auf das frühere Maass zurückregulirt ist.

Unsere Erwägungen konnten und durften auf eine einzelne Zelle basirt werden, da für Gewebe im Princip Gleiches gilt. Auch in einem Gewebe ist die nach aussen gerichtete Druckwirkung einer einzelnen Zelle an die Darbietung einer geeigneten Widerlage durch die umgebenden Zellen gekettet und die Aussenleistung eines Gewebes ergibt sich als Resultante aus der gesammten osmotischen Energie und dem negativ zu nehmenden Gesammtwiderstand der Zellwandungen, also als eine Differenz, die ebenso ausfiele, wenn die Zellwände in geeigneter Weise in eine einheitliche Hülle zusammengezogen wären, welche dem entsprechenden Innendruck entgegenzuwirken hat. Die Existenz negativ gespannter Gewebe drückt natürlich die Druckwirkung activer Gewebe um ein der Spannungsenergie äquivalentes Maass herab. Wenn aber durch Ausgleichung dieser negativen Spannung die mechanische Aussenleistung um diesen Energiewerth gesteigert wird, so ist doch wiederum Wachsthum das Mittel für die Eliminirung jener negativen Spannung, und der mechanische Effect ist kein anderer, als wenn die eigenen Zellwände eines ungespannten Zellcomplexes eine äquivalente Entspannung erfahren.

Gelegentlich kommen wir noch auf die Bedeutung von Spannungsverhältnissen für Aussenleistungen zu sprechen. Hier genügt es daran zu erinnern, dass im Spitzentheil der Wurzel Gewebe-

1) Vgl. Pfeffer, Studien zur Energetik 1892, p. 234.

spannung kaum existirt[1]), dass ferner zu den hohen Druckleistungen auch das nicht oder kaum differenzirte Spitzengewebe befähigt ist, dass ferner grössere, ein Ausweichen gestattende Räume zwischen diesen jugendlichen Zellen nicht vorhanden sind.

In zartwandigen Geweben, also auch in den Wurzelspitzen ist aus bekannten und schon besprochenen Gründen eine hohe Druckenergie nur durch die Turgorkraft erreichbar und so lange durch diese die Wandungen gespannt werden, ist es überhaupt unmöglich, dass die Zellwände eine Druckwirkung durch actives Ausdehnungsstreben erzielen[2]). Eine solche Action, in welcher also die Wandungen mit eigener Energie, wie ein quellender Holzspan, gegen die Widerlage pressen würden, kann demgemäss in dem zartwandigem Spitzentheil der Wurzel keine nennenswerthe Bedeutung erlangen.

Nach diesen Vorbemerkungen sollen nun zunächst die Studien über die Turgorverhältnisse, dann die über die Hautentspannung mitgetheilt werden. Nach beiden Seiten wurde am ausgedehntesten die Wurzel von Vicia faba untersucht. In dieser ist die Reaction gegen Widerstände von einer ansehnlichen Turgorschwellung begleitet, welche dagegen der Wurzel von Zea mais abgeht. Doch scheint in den meisten Wurzeln eine mehr oder weniger auffällige Turgorsteigerung eingetreten, wenigstens wurde eine solche bei den übrigen untersuchten Keimpflanzen gefunden, nämlich in der Keimwurzel von Vicia sativa, Lupinus albus, Helianthus annuus, Ricinus communis, Polygonum tataricum, Brassica napus, Sinapis alba. Analoges ergaben, wie hier im voraus bemerkt werden mag, die wachsenden Theile der Stengel einiger Keimpflanzen, während in Chara, Nitella, Spirogyra keine Turgorschwellung eintritt. Dasselbe ist der Fall bei mechanischer Hemmung der geotropischen Wachsthumskrümmung von Triticum vulgare und spelta, während die nach Verlängerung strebende Unterseite des Knotens von Hordeum vulgare wiederum ein Ansteigen des Turgors erfährt.

---

1) SACHS, Arbeit. d. bot. Instituts in Würzburg 1873, Bd. I, p. 435.

2) Vgl. PFEFFER, Energetik 1892, p. 215, 224.

B. Turgorverhältnisse.

1. Methodisches.

Die Turgorhöhe wurde zumeist nach der üblichen Methode, d. h. nach der eben merklich werdenden plasmolytischen Abhebung beurtheilt, die im Allgemeinen etwas besser hervortritt, wenn man die Wandungen färbt, indem man der Kalisalpeter-Lösung etwas Congoroth zufügt (der Farbstoff scheidet sich leicht wieder aus). Längere Längsschnitte aus der Wurzel wurden mit der Salpeterlösung injicirt und nach 20 bis 30 Min. (in dieser Zeit ist stets der Endzustand erreicht) wurde dann untersucht, bis zu welcher Entfernung von der Wurzelspitze in einer grösseren Zahl von Zellen Plasmolyse bemerkbar war. Zur Präcisiren der höchsten und niedersten Turgorwerthe dienten um 0,5 Volumprocent[1]) (diese sind stets gemeint) verschiedene Lösungen von Kalisalpeter, während ausserdem theilweise nur für die um 1 Proc. differirenden Lösungen der Abstand der beginnenden Plasmolyse von der Wurzelspitze ermittelt wurde. Diese Genauigkeit ist ausreichend, da thatsächlich benachbarte Zellen derselben Gewebschicht Differenzen bis 0,5 Proc. Salpeter aufweisen. Uebrigens beziehen sich meine Angaben, sofern nichts Anderes bemerkt ist, stets auf die mittleren Zelllagen des Rindenparenchyms.

Zur Controle wurde ausserdem die »Verkürzungsmethode« benutzt, welche darauf basirt, dass mit der eben erreichten Aufhebung des Turgors die fernere elastische Verkürzung aufhört, da Salpeterlösung solcher und selbst doppelt so hoher Concentration durch ihre Wirkung auf die imbibirte Zellwand, auch in den Wurzeln, keine merkliche Verkürzung hervorrufen. Zur Ermöglichung dieser Methode ist natürlich eine genügend genaue Messung der realisirten elastischen Verkürzung Voraussetzung.

Die Messung geschah mikrometrisch an fixen Marken, also nach

1) Es hat hier keinen Vortheil, Lösungen nach Aequivalentwerthen anzuwenden, da es sich nur um die Kenntniss der osmotischen Druckhöhe handelt, die übersichtlicher durch die gewöhnlichen procentischen Lösungen ausgedrückt wird.

einer Methode, die ich seit langer Zeit[1]) mit grossem Vortheil für verschiedene Zwecke anwandte und die thatsächlich mannigfachster Verwendung fähig ist. Als sehr geeignet für Herstellung von gut haltbaren Marken hat sich die sog. unauslöschbare schwarze Tusche[2]) (von Bormann) bewährt. Mit dieser in geschickter Weise aufgetragene Pünktchen bieten fast stets irgend eine markirte Ecke oder Kante, die mittelst einer flüchtigen Skizze in späteren Messungen unzweifelhaft wieder zu erkennen ist. In solcher Weise wurden an der Wurzelspitze 4 oder 3 verschiedene Strecken markirt, deren jede annähernd 1—1,2 mm lang war. In den meisten Fällen entsprechen einer solchen Strecke, bei einem Mikrometerwerth von 0,013 mm, 80—100 Theilstriche, so dass (bei einem Messungsfehler von 0,5 bis höchstens 1 Theilstrich) eine Genauigkeit von etwa 1 Proc. erreicht wurde.

Gewöhnlich operirte ich mit abgeschnittenen Wurzeln, die markirt, zumeist partiell mit Wasser injicirt und dann, nach Messung des Markenabstandes, in die Salpeterlösung gebracht wurden. Jetzt und bei fernerem Wechsel der Lösung genügten erfahrungsgemäss 25 bis 30 Min., um selbst die dicken Wurzeln von Faba in den jeweiligen Gleichgewichtszustand überzuführen. Ergab sich dann z. B. bei Uebertragung je einer Wurzel aus der 3proc. in eine 2- resp. eine 4proc. Lösung eine Verlängerung resp. keine Dimensionsänderung, so lag der osmotische Werth in der gemessenen Zone zwischen 2 und 3 Proc. Salpeter. Ob dieser Werth näher an 2 oder an 3 Proc. heranreicht, darüber orientirt einigermassen die relative Dimensionsänderung, welche allerdings nicht gerade proportional der Turgorkraft ist. Durch Anwendung von Lösungen mit 0,5proc. Concentrationsdifferenz wurde, wo es darauf ankam, eine weitere Präcision des osmotischen Werthes erzielt.

Die analoge Behandlung erfuhren die eingegipsten Wurzeln,

---

1) Physiologische Untersuchungen 1873, p. 27. Periodische Bewegungen 1875, p. 15 u. s. w. — Hier ist auch schon der Vortheil hervorgehoben, dass bei mässiger Krümmung und bei Messung kurzer Strecken die Differenz von Sehne und Bogen verschwindend gering wird.

2) Damit lebende Wurzeln beim Auftragen distincter Striche nicht leiden, sind feine Striche mit nicht zu concentrirter Tuschflüssigkeit aufzutragen und ist dann die Wurzel kurz in Wasser zu tauchen.

deren partielle Injection mit Wasser schon vor dem Entgipsen geschah und die theilweise (jedoch ohne Aenderung des Resultats) zur Aequilibrirung des osmotischen Ueberdrucks direct aus dem Gipse in eine 2 proc. Salpeterlösung kamen.

Zu den Messungen diente theilweise das gewöhnliche, theilweise das horizontale Messmikroskop (p. 255). In letzterem Falle befanden sich Wurzel und Lösung in kleinen Cüvetten, im ersteren Falle wurde die Wurzel mittelst eines Gummiringes auf einem Objectträger festgehalten. Die beiden Marken müssen natürlich stets genau in die Gesichtsfeldebene fallen, doch ist es bei geschicktem Operiren unschwer möglich, diese Bedingung zu realisiren und doch die Messung schnell durchzuführen.

Nach dem Einsetzen in ein neues Medium ist meist schon in 20 Min. die constante Länge erreicht, welche sich dann für die nächste Zeit erhält, abgesehen von dem Falle, dass Wasser oder verdünnte Lösungen Zuwachs gestatten[1]). Dazu gehen die Wurzeln beim Zurückbringen in das Ausgangsmedium auf die frühere Länge zurück, selbst wenn sie inzwischen ½ oder ¾ Stunde in einer plasmolysirenden Salpeterlösung verweilt haben. Demgemäss wird in der gemessenen Zone durch diese Operationen in Bezug auf die Turgordehnung keine Veränderung herbeigeführt und zugleich liegt in diesen Experimenten der Beweis, dass, wie es ebenfalls die empirischen Erfahrungen an Faba etc. lehren, eine als Reaction gegen eine Widerlage entwickelte Turgorschwellung sich genugsam erhält, um auch der plasmolytischen Messung zugänglich zu sein[2]).

Da die Verkürzung genau mit dem isotonischen Zustand vollendet ist, während für Erzielung der Abhebung des Protoplamakörpers, also für Erreichung des Index in der plasmolytischen Methode, eine weitere osmotische Wirkung nöthig ist, muss diese Methode im Allgemeinen höhere Salpeterwerthe liefern, wie es thatsächlich auch zutrifft. Zu beachten ist aber auch, dass die Verkürzungsmethode für ein aus

1) Nach längerer Zeit kann allmählich in Salzlösungen durch Aufnahme und Accomodation eine gewisse Verlängerung zu Stande kommen. Vgl. z. B. ASKENASY, Ber. bot. Ges. 1890, p. 66.

2) Es ist wohl zu beachten, dass sich durchaus nicht alle inducirten Turgoränderungen erhalten müssen. Vgl. hierüber PFEFFER, Physiologie Bd. II, p. 240, 269 und Energetik 1892, pag. 228.

ungleichwerthigen Zellen aufgebautes Gewebe die höchsten Turgorwerthe kennzeichnet, da Constanz der Länge erst nach Aufhebung der Turgorspannung in allen einzelnen Zellen erreicht wird. Ferner gestattet die Verkürzungsmethode eine Bestimmung der Turgorkraft im Urmeristem noch dann, wenn die Plasmolyse versagt.

Dagegen ist die Verkürzungsmethode nur bei genügender Turgordehnung anwendbar. Denn wenn die Bestimmung des Grenzwerthes an sich unabhängig von der Amplitude der Verkürzung ist, so muss diese doch einen Werth erreichen, der eine genügend genaue Messung gestattet. Das ist in der Wurzel in dem ausgewachsenen Theile nicht mehr der Fall, und da nach dem Eingipsen, z. B. bei Faba die wachsthumsfähige Strecke auf 6 mm verkürzt wird, so ist die hier besprochene Methode auch nur auf diesen Spitzentheil anwendbar, während sie in der normalen Wurzel bis auf 14 mm von der Spitze ausgedehnt werden kann.

2. Die Turgorregulation.

Wie schon bemerkt, wurden die Turgorverhältnisse am eingehendsten in der Keimwurzel von Vicia faba, nächstdem an der Wurzel von Zea mais untersucht, von welchen in Gipsverband die erstere eine erhebliche, die letztere aber keine Turgorsteigerung erfährt.

Diese Turgorverhältnisse sind für die Keimwurzel von Vicia faba auf Grund der gewonnenen Mittelwerthe graphisch dargestellt in Fig. 7, in welcher die Abscissen die Entfernung von der äussersten Wurzelspitze (incl. Haube) in mm, die Ordinaten die Salpeterwerthe in Volumprocenten angeben. Die Curven *a* und *a'* beziehen sich auf die plasmolytischen Ermittelungen im mittleren Rindenparenchym, und zwar entspricht *a* den normal in Sägespänen erwachsenen, *a'* den 24 bis 72 Stunden lang eingegipsten Wurzeln, in welchen die Turgorschwellung ihr Maximum erreichte. Durch *c* ist der nach 6stündigem Eingipsen erreichte Turgorzustand versinnlicht. Die Curven *b* und *b'* sind auf Grund der Resultate der Verkürzungsmethode construirt, und zwar gibt *b* den normalen, *b'* den nach 2- bis 3tägigem Eingipsen maximalen Turgor an.

Aus der Curve *a* ist sofort zu ersehen, dass in normalen Wurzeln der Turgor nach Vollendung des Längenwachsthums sich con-

stant auf 2,5 Proc. (so sei kurz gesagt) erhält, dann aber vom Beginn der Längsstreckung, also etwa 10 mm von der Spitze ab, langsam, späterhin schneller steigt und 2 bis 3 mm von der Spitze 4 Proc., den Maximalwerth, erreicht. Nach vollendeter Turgorschwellung ist dieser Maximalwerth etwas über 5 Proc. gestiegen und der Turgor behält diesen Werth bis etwa 6 mm von der Spitze, dann fällt die Curve *a'* allmählich und erreicht ungefähr 20 mm von der Wurzelspitze den Normalturgor ausgewachsener Theile. — In anderer Ausdrucksweise kann man auch sagen, dass der Normalturgor basipetal verschoben ist, der Turgorwerth 4 Proc. z. B. von 2 mm auf 10 mm von der Wurzelspitze hinweg rückte.

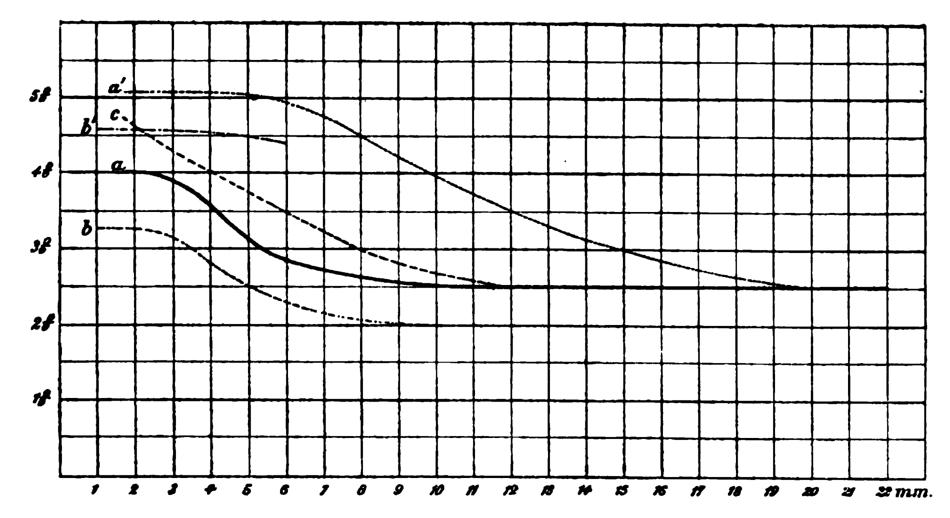


Fig. 7. Graphische Darstellung der Turgorverhältnisse in der Wurzel von Vicia faba vor und nach dem Eingipsen. — Die plasmolytisch ermittelten Curven *a* und *a'* sind als Mittelwerth aus je 6 Wurzeln, die nach der Verkürzungsmethode construirten Curven *b* und *b'* als Mittelwerth aus je 4 Wurzeln gewonnen. Die Curve *c* gibt den Turgorbefund einer einzelnen Wurzel nach 6stündigem Eingipsen.

Es ergiebt sich also die beachtenswerthe Thatsache, dass die Turgorschwellung auch Wurzelstrecken ergreift, deren Längenwachsthum zur Zeit des Eingipsens vollständig vollendet war. Die grösste Steigerung aber, etwas mehr als 2 Proc., liegt 5 bis 7 mm von der Spitze, d. h. annähernd in der Region, welche sich zur Zeit des Eingipsens in der stärksten Längsstreckung befand. Bei Beurtheilung der acropetal bis auf 1 Proc. abnehmenden Turgordifferenz ist zu beachten, dass im Spitzentheil schon der Normalturgor hoch ist und

schliesslich eine Steigerungsfähigkeit über einen gewissen absoluten Werth nicht erwartet werden kann.

Die mit der Verkürzungsmethode gewonnenen Resultate liefern eine wesentlich analog verlaufende Curve, welche aber ungefähr um 0,5 Proc. tiefer liegt. Aus der schon (p. 295) gegebenen Erklärung dieser Differenz geht auch hervor, dass diese Curven *b* und *b'* den reellen isosmotischen Werthen näher kommen müssen, als die Curven *a* und *a'*. Da die Verkürzungsmethode den höchsten vorhandenen Turgorzustand markirt, so ist aus Obigem das mit den plasmolytischen Erfahrungen übereinstimmende Resultat zu entnehmen, dass die Turgorkraft des Rindenparenchyms in anderen Elementarorganen unserer Wurzel nicht wesentlich übertroffen wird.

Die Curven *b* und *b'* endigen 1 mm vor der Wurzelspitze, d. h. in der Mitte der Marken, welche den 0,5 bis 1,5 mm von der Spitze entfernten Wurzeltheil umfassten. Da nun in dieser Zone auch der Scheitelpunkt des Wurzelkörpers eingeschlossen war, so kommt folglich in den freien und eingegipsten Wurzeln dem Urmeristem derselbe Turgor zu, wie den basipetal anschliessenden Zonen. Diese Erweiterung ist von einiger Bedeutung, weil der Turgorwerth des Urmeristems in der Wurzel von Faba auf plasmolytischem Wege nicht bestimmbar war.

Die Reaction der Keimwurzel von Zea Mais ist von keiner Turgorschwellung begleitet und demgemäss gelten die Curven in Fig. 8 in gleicher Weise für freie und eingegipste Wurzeln. In beiden haben, abweichend von Faba, einzelne Gewebecomplexe eine erhebliche Turgordifferenz aufzuweisen, wie aus der graphischen Darstellung zu ersehen ist, in welcher *a* sich auf die plasmolytisch gefundenen Werthe des mittleren Rindenparenchyms, *a'* sich auf das Füllgewebe des Centralcylinders bezieht. Der Unterschied zwischen beiden geht bis 1 Proc. Salpeter, scheint aber in älteren Wurzeltheilen mehr und mehr abzunehmen und muss natürlich mit der Gewebedifferenzirung im vordersten Spitzentheil der Wurzel schwinden. Nach den nur beiläufigen Beobachtungen in anderen Gewebecomplexen scheint die Turgorcurve der jungen Phloemelemente durchschnittlich etwas höher, die der gefässbildenden Zellen niedriger zu liegen als die Curve *a'*.

Da, wie hervorgehoben, die Verkürzungsmethode etwas kürzere Ordinaten liefern muss, so folgt aus der nach dieser Methode ge-

wonnenen Curve *b*, dass der höchste Turgorwerth einzelner Elemente im Spitzentheil nicht viel, weiter rückwärts aber nicht unerheblich über dem durch die Curven *a* und *a'* repräsentirten osmotischen Werthe liegt. Eine weitere Discussion ist aber um so weniger am Platze, als die Curven überhaupt nur Annäherungswerthe

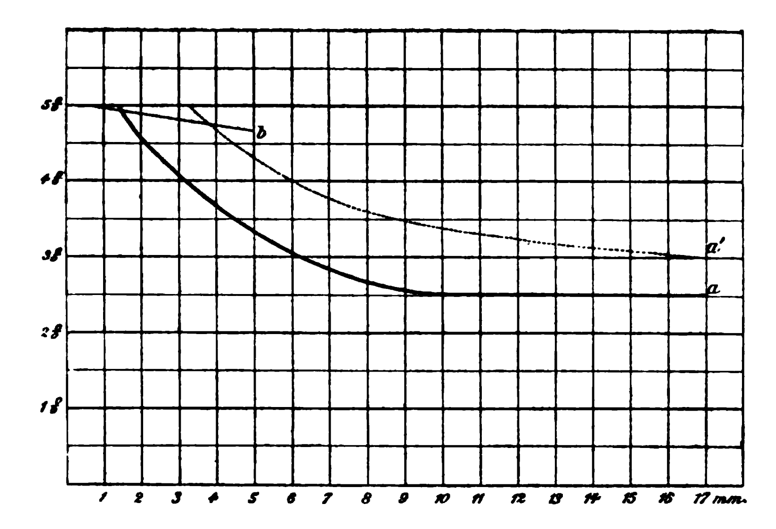


Fig. 8. Graphische Darstellung des Turgors in der Wurzel von Zea mais (Cinquantinomais). *a* und *a'* geben den plasmolytisch ermittelten Mittelwerth aus je 5 eingepipsten und freien Wurzeln an. Die Curve *b* ist nach 4 freien und 4 eingegipsten Wurzeln ermittelt worden.

vorstellen und mittelst der Verkürzungsmethode nur der 5 mm lange Spitzentheil untersucht wurde, da nach dem Eingipsen die Methode sogar nur auf den 3 mm langen (noch wachsthumsfähigen) Spitzentheil anwendbar war. Ebenso unterlasse ich eine weitere Vergleichung der Curven, die übrigens sämmtlich für den Turgor annähernde Constanz in den älteren Theilen und Ansteigen in der normal wachsthumsfähigen Region bis zu dem im Scheitelpunkt liegenden Maximum ergaben.

Die Summe der in einem Wurzeltheil disponiblen osmotischen Energie entspricht natürlich dem Mittelwerthe, nicht den Extremen der Turgorkraft. Mit Rücksicht darauf, dass gegen das Urmeristem hin die Turgordifferenzen der Zellen schwinden, lässt sich aus den Curven *a* resp. *a'* und besonders auch *b* resp. *b'* der Fig. 7 und 8 entnehmen, dass wenigstens in dem vorderen Spitzentheil der Wurzel von Mais die mittlere osmotische Intensität mindestens eine Höhe besitzt, wie sie

in Faba erst durch die Turgorschwellung erreicht wird. Durch letztere wird also erst in der Wurzelspitze von Faba die Möglichkeit geschaffen, gegen eine Widerlage eine gleiche Druckintensität zu entwickeln wie die Maiswurzel, und nach den empirischen Erfahrungen scheint Mais eher mehr zu leisten als Faba. Mit 5 Proc. Salpeter ist aber eine für die gefundenen Druckwerthe genügende osmotische Energie geboten, da diese für 5 Proc. Kalisalpeter ungefähr 18 Atmosphären beträgt[1]).

Die individuellen Differenzen und die ganze Methode bringen es mit sich, dass in den Einzelversuchen die Abweichungen von den in den Curven dargestellten Mittelwerthen nicht unerheblich sind, z. B. für Faba etwa bis $\pm$ 0,25 Proc. Salpeter betragen[2]). Dieserhalb bleibt aber doch die Thatsache fest begründet, dass die mechanische Wachsthumshemmung in der Wurzel von Faba eine erhebliche Turgorsteigerung veranlasst, die nach 48 Stunden annähernd den Maximalwerth erreicht. — Eine solche, nicht näher untersuchte Turgorsteigerung erfahren auch die Zellen der Wurzelhaube, deren geringe Länge es mit sich bringt, dass die Curve sehr schnell von der Spitze bis zum Maximum im Urmeristem ansteigt.

Noch ansehnlicher, bis $\pm$ 0,4 Proc. Salpeter, fielen die Differenzen in den Einzelversuchen des von uns benutzten Cinquantino-Mais aus. Doch da diese Oscillationen in gleicher Weise bei freien und eingegipsten Wurzeln gefunden wurden, so ist aus den Versuchen wenigstens zu folgern, dass sich in dieser Wurzel nach dem Eingipsen keine nennenswerthe Turgorschwellung ausbildet. Sollte eine solche indess in geringem Grade zu Stande kommen, so ist dieses doch für die Hauptfrage um so mehr unwesentlich, als auch beim Vergleich von anderen Pflanzenarten eine specifisch verschiedene und bis auf Null herabgehende Turgorzunahme gefunden wurde.

Voraussichtlich werden in concreten Fällen auch die verschiedenen Zellen desselben Organes erhebliche Unterschiede in der Turgorschwellung bieten. Für die Wurzel von Faba trifft dieses nicht zu, wenigstens nicht für die Rinde und für das Füllgewebe (Mark) des

---

1) Pfeffer, Studien zur Energetik 1892, p. 227 Anmerkung.

2) Ein Vergleich zweier Wurzeln kann also für die Turgorschwellung eine Differenz bis zu 2,5 Proc. Salpeter ergeben.

Centralcylinders. Beide haben vor und nach dem Eingipsen unter sich gleichen Turgor, ebenso die Epidermiszellen, deren osmotischer Werth in beiden Fällen um etwa 0,3 Proc. Salpeter hinter dem Rindenparenchym zurückbleibt. Uebrigens werden in dieser, wie in anderen Wurzeln, in benachbarten Zellen desselben Gewebes gelegentlich Turgordifferenzen bis zu 0,5 Proc. Salpeter gefunden und dadurch wird, selbst bei stets gleichem Operiren, eine ganz genaue Construction der Turgorcurve unmöglich. In den von uns benutzten Maiswurzeln waren solche Differenzen eher grösser und aus dem erheblich ungleichen Turgorwerth benachbarter Gewebe und Zellen entspringen noch weitere Schwierigkeiten. Uebrigens scheint nach den an dieser und an anderen Wurzeln gewonnenen Erfahrungen der Turgor der Epidermiszellen durchschnittlich etwas geringer zu sein als der des Rindenparenchyms.

Einen merklichen Einfluss auf die Turgorverhältnisse hatte es aber nicht, ob die Wurzeln 20 oder 60 mm lang waren, ob sie bei 17 oder 25° C., ob sie in Erde oder in Sägespänen cultivirt worden waren. Und da derselbe Turgor auch dann gefunden wurde, wenn ein Gemisch von gleichen Theilen Sägespänen und Gipspulver (ungebrannt) den Culturboden gebildet hatte, so ist damit noch besonders bewiesen, dass nicht der Gips, sondern nur der mechanische Widerstand die eventuell eintretende Turgorsteigerung bedingt. — Die Seitenwurzeln verhalten sich wesentlich wie die Hauptwurzeln und in der Bildungsstätte jener hat sich demgemäss eine entsprechende Turgorveränderung zu vollziehen.

Nach 48stündigem Eingipsen ist die Turgorschwellung in der Wurzel von Faba wesentlich beendet, wenigstens konnte bei Ausdehnung der Versuche auf 6 und auf 16 Tage eine merkliche Zunahme des Turgors (auf plasmolytischem Wege) nicht constatirt werden. Sollte bei weiterer Ausdehnung der Versuchsdauer ein Turgorabfall eintreten, so würde, ausser an Absterbungserscheinungen, an die schon in Bezug auf die Druckleistungen angedeuteten Correlationserfolge zu denken sein.

Da aber nach 48 Stunden die von den Wurzeln der Vicia faba ausgehende Drucksteigerung noch zunimmt (vgl. p. 284), so muss von da ab — die Turgorschwellung als beendet vorausgesetzt — die Ursache der Steigerung wesentlich in der länger fortdauernden Hautentspannung zu

suchen sein, ein Schluss, der auch durch anderweitige Erfahrungen gestützt wird. Anderseits muss die Hautentspannung sogleich mit der Darbietung der Widerlage beginnen, da gegen eine solche auch die Maiswurzel, trotz des Mangels einer Turgorschwellung, sofort zu drücken beginnt. Ob in Faba, was wahrscheinlich ist, ebenso die Turgorschwellung sogleich beginnt und wie diese im Näheren verläuft, habe ich nicht untersucht. Doch lässt z. B. die Turgorcurve *c* in Fig. 7 erkennen, dass sich die Turgorzunahme zunächst schnell entwickelt und es kann kein Zweifel sein, dass sie schliesslich langsam ausklingt, also nach 48 Stunden wohl noch nicht absolut beendet ist.

Nach Beseitigung der mechanischen Widerlage geht der gesteigerte Turgor nicht nur in den nunmehr wachsenden, sondern auch in den bereits ausgewachsenen Regionen auf die der freien Wurzel zukommende Höhe zurück. Als Wurzeln von Faba nach 48- und 72stündigem Eingipsen aus dem Gipsverband befreit wurden, wuchs nur der 6 mm lange Spitzentheil, dieser aber energisch weiter. Jedoch auch in den rückwärts anschliessenden Zellen, in welchen der Turgor erheblich gesteigert war (vgl. Fig. 7), war dieser nach 24 Stunden nahezu, nach 48 Stunden vollständig auf 2,5 Proc. Salpeter, also auf den Werth gesunken, welcher ausgewachsenen Zonen zukommt, und das auch in denjenigen Zellen, welchen durch das Eingipsen eine subnormale Grösse aufgedrängt worden war. (Vgl. Kap. VII.)

Die Reactionsthätigkeiten gegen Hemmnisse, also auch die Hautentspannung und die Constanz resp. die Anschwellung des Turgors, werden eben von inneren Regulationen gelenkt, und diesen inneren Reizverkettungen ist es ebenso zu verdanken, dass der Turgor in wachsenden Zellen auf entsprechender Höhe erhalten wird. (Näheres Kap. VI.) Den allgemein specifisch verschiedenen Fähigkeiten ist es zuzuschreiben, dass die Reaction gegen Widerstände nicht ganz identisch in allen Pflanzenorganen abläuft. Wenn aber häufig, und so auch speciell in vielen Wurzeln, eine Turgorsteigerung mithilft, so muss ein solcher Zuwachs an disponibler Energie als eine ganz zweckentsprechende Anpassung erscheinen.

Wie schon bemerkt ergaben, ausser Mais, alle untersuchten Wurzeln eine Turgorschwellung, deren einfache Constatirung mir aber

genügte. Ueber die Höhe dieser Steigerung vermag ich deshalb nicht so exacte Angaben zu machen wie für Faba, doch scheint diese bezüglich der Turgorzunahme von keiner der geprüften Wurzeln übertroffen, von den meisten aber nicht erreicht zu werden. Annähernd gleiche Höhe mag diese Turgorschwellung bei Lupinus albus, vielleicht auch bei Vicia sativa erreichen. Dagegen dürfte der maximale Steigerungswerth für Helianthus annuus, Polygonum fagopyrum, Brassica Napus, Sinapis alba, Ricinus communis geringer ausfallen und möglicherweise übersteigt die Zunahme in der Wurzel der letztgenannten Pflanzen nicht wesentlich 0,5 Proc. Salpeter.

Die specifischen Eigenheiten und Reactionsfähigkeiten bringen es mit sich, dass die osmotische Energie in den Pflanzen, den verschiedenen Zwecken entsprechend, regulirt und nutzbar gemacht wird. Die Constanz des Turgors in einer wachsenden und an Volumen zunehmenden Zelle fordert ebenso eine regulatorisch geleitete Production osmotisch wirksamer Stoffe, wie die Constanz des Turgors bei mechanischer Wachsthumshemmung. Denn bei dieser muss eben jene Productionsthätigkeit sogleich auf Null zurückgehen, und die Realisirung dieser Forderung nur in gewissen, jedoch nicht in allen Fällen kennzeichnet die differenten Resultate sofort als die Folgen specifisch verschiedener Reactionsfähigkeiten. Wie in der Wurzel von Mais, unterbleibt eine Turgorschwellung in Chara, Nitella, Spirogyra, ferner in den Halmknoten von Triticum vulgare und spelta, wenn die in diesen geotropisch inducirte Wachsthumsbestrebung mechanisch gehemmt wird, während unter gleichen Bedingungen in der am schnellsten wachsenden Unterseite im Knoten von Hordeum vulgare eine Turgorsteigerung auftritt.

Turgorschwankungen sind aber bekanntlich nicht nothwendig an Wachsthumsthätigkeit gekettet. Denn ohne solche vollzieht sich u. a. die Senkung und Rückregulation des Turgors, durch welche die Reizbewegungen von Mimosa ausgeführt werden und ebenso sind u. a. die geotropischen und heliotropischen Krümmungen in den Gelenken der Blätter von Phaseolus mit einem Turgorwechsel verknüpft[1]).

1) Vgl. PFEFFER, Physiologie Bd. II, p. 323.

Fallen aber Turgorsteigerung und Wachsthumshemmung zeitlich und räumlich zusammen, so ist doch keineswegs eine gleichzeitige Eliminirung der Turgorspannung der Zellhaut, wie sie in unseren Experimenten eintrat, eine nothwendige Voraussetzung. Thatsächlich wird sogar in gewissen Pflanzen bei Zunahme der Hautspannung durch mechanischen Zug eine Turgorsteigerung Hand in Hand mit einer Retardirung des Wachsens beobachtet[1]).

Nach unzureichenden Versuchen scheint in den Wurzeln von Faba eine Turgorsteigerung um 1 bis 1,5 Proc. Salpeter auch dann einzutreten, wenn ihr Wachsthum durch Aufenthalt bei 35° bis 39° C. verlangsamt wird. Solche Versuchsbedingungen, in welchen u. a. die Athmungsthätigkeit erheblich gesteigert wird, sind natürlich anders zu beurtheilen, als die Wachsthumshemmungen durch Entziehung von Sauerstoff oder durch niedere Temperatur. Doch dürften auch unter derartigen Verhältnissen in concreten Fällen biologisch bedeutungsvolle Turgorvariationen getroffen werden[2]).

Bedeutungsvoll für die Anpassung an gewisse Lebensweisen sind auch die durch Salzlösungen veranlassten Turgorregulationen. Zu solchen sind offenbar alle Pflanzen, jedoch in einem sehr verschiedenen Grade befähigt und durch ESCHENHAGEN's[3]) Untersuchungen ist bekannt, dass es hierbei sich keineswegs allein um eine äquilibrirende Salzaufnahme handelt, sondern dass in concreten Fällen die Salzlösung nur die Veranlassung für die entsprechende regulatorische Production der osmotisch wirkenden Stoffe ist.

Diese Hinweise mögen genügen, um in das Gedächtniss zu rufen, dass die Pflanze normalerweise während ihres ganzen Lebens und auch in der Reaction gegen äussere Eingriffe und Verhältnisse den

---

1) Vgl. PFEFFER, Energetik 1892, p. 245 und die demnächst erscheinende Arbeit HEGLER's.

2) Vielleicht hat auch in manchen Fällen, wie in den Blattgelenken von Mimosa pudica, das Chloroformiren eine gewisse Turgorzunahme zur Folge. Vgl. PFEFFER, Physiologische Unters. 1873, p. 65.

3) ESCHENHAGEN, Einfluss von Lösungen auf das Wachsthum von Schimmelpilzen 1889. — Speciell für Wurzelaccommodation siehe WIELER, Berichte der botanischen Gesellschaft 1887, p. 376; WORTMANN, Botanische Zeitung 1889, p. 280; STANGE, Botanische Zeitung 1892, p. 295. Auf Algen beziehen sich die Arbeiten von OLTMANNS, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1891, p. 196 und RICHTER, Flora 1892, p. 4.

Turgescenzzustand ihrer Zellen regulatorisch zu lenken hat, dass demgemäss auch der Turgor je nach Entwicklungsphasen und Bedingungen veränderlich sein und von einem Normalturgor immer nur in Bezug auf bestimmte Entwicklungsstadien und Culturbedingungen die Rede sein kann.

3. Anschliessende Beobachtungen und Bemerkungen.

Im Anschluss an unsere Versuche mögen hier einige Bemerkungen Platz finden, die theilweise die Methodik, theilweise Nutzanwendungen auf Fragen betreffen, welche nicht das nächste Ziel unserer Studien waren.

Es wurde schon hervorgehoben, dass und warum die isosmotischen Werthe durch die plasmolytische Methode etwas zu hoch und höher als durch die Verkürzungsmethode gefunden werden müssen (p. 295). Weil aber zur Markirung der Plasmolyse stets eine gewisse absolute Abhebung des Plasmakörpers, also ein entsprechender absoluter Ueberschuss des Salzes nöthig ist, so muss der procentische Fehler im Allgemeinen mit der Kleinheit der Zellen zunehmen. Doch ist der so begangene Fehler in Wurzeln und anderen Objecten nicht derart, dass allein dadurch das Ansteigen der Turgorcurve nach dem kleinzelligeren Scheitel veranlasst wird, ein Gang, den ja in diesem Hauptzuge auch die Verkürzungsmethode ergibt, welcher der eben erwähnte Fehler nicht anhaftet. Wenn der Abstand beider Curven nach der Wurzelspitze hin nicht allgemein zunimmt (vgl. übrigens Fig. 7), so kann das bei der etwas complexen Constellation nicht Wunder nehmen.

In beiden Methoden wird der als Maass benutzte Grenzwerth erst erreicht, nachdem die elastische Flächendehnung der Zellhaut ausgeglichen, das Volumen der Zelle also demgemäss verkleinert ist. Im umgekehrten Verhältniss zum Volumen aber steigt der osmotische Druck, der eben von der Zahl der Salzmoleküle in der Volumeinheit abhängt[1]. Nun ist aber, wie bei Compression eines Gases, das Product aus Volumen und Druck (für welchen wir

---

1) Vgl. PFEFFER, Energetik 1892, p. 228 und 246. Hier ist auch hervorgehoben, dass diesen und anderen Fehlerquellen in den plasmolytischen Versuchen bisher keine Rechnung getragen zu werden pflegte.

auch die Molekülzahl in der Volumeinheit setzen können) eine Constante und hierdurch ergibt sich bei Kenntniss der Volumabnahme durch Wasseraustritt sofort, um wie viel der osmotische Werth der plasmolysirenden Lösung höher ist als die osmotische Energie, welche in der expandirten, turgescenten Zelle wirksam war. Diese osmotische Energie ist also nur halb so hoch als der plasmolytisch gefundene Werth, wenn die Zelle auf die Hälfte ihres Volumens zurückgeht, ein Rückgang, welcher bei Plasmolyse der Staubfäden von Cynareen sogar übertroffen wird.

Aber auch in Wurzeln ist die Zellhaut in der wachsthumsfähigen Region ziemlich weitgehend elastisch gedehnt, so dass bei Plasmolyse die Länge gewöhnlich um mehr als 10 Proc., der Querdurchmesser in einem geringeren Grade vermindert wird. Setzen wir diese Volumänderung nur zu 10 Proc. an, so würde doch für eine Zelle, in welcher im turgescenten Zustand ein 5 Proc. Salpeter entsprechender osmotischer Druck bestand, die osmotische Leistung, bei Aufhebung der Turgordehnung der Wand, auf 5,55 Proc. Salpeter gestiegen sein und für 3 Proc. würde sich eine Steigerung auf 3,33 Proc. ergeben. Diese Differenz wird natürlich bei geringer elastischer Dehnung, wie solche zumeist in den Zellen besteht, verschwindend gering.

Mit unseren Methoden messen wir also nicht die osmotische Energie in der turgescenten, sondern in einer bis zur Aufhebung der Turgordehnung der Wand comprimirten Zelle (resp. Zellcomplex). In diesem Zustand befinden sich in Folge der realisirten Entspannung die gegen den Gipsverband pressenden Wurzeln, welche demgemäss beim Befreien sich unter Volumzunahme verlängern, bei Plasmolyse aber wieder auf das dem Gefängniss entsprechende Volumen zurückgehen. Auf dieses Volumen aber ist die in der eingegipsten Wurzel vorhandene Turgorkraft zu beziehen, welche demgemäss durch unsere Methoden voll bemessen wird. Dagegen gibt diese Methode die osmotische Energie für die zum Vergleich zu wählende normale turgescente Wurzel zu hoch an und hiernach würde also die Eliminirung dieser Fehler die Differenz der Curven *a* und *a'* in Fig. 7 (pag. 297) nur steigern. Als Schluss aus diesen und anderen Erwägungen ergibt sich also stets nur, dass die construirten Curven zwar den realen Verhältnissen nicht in aller Exactheit entsprechen, dass indess über eine

sehr erhebliche Turgorsteigerung in Faba u. s. w. kein Zweifel bestehen kann.

Die Turgorschwellung vollzieht sich auch im Urmeristem der Wurzel, wo sie freilich in der Wurzel von Faba nur mittelst der Verkürzungsmethode bestimmt werden konnte (pag. 298). Im Urmeristem mancher anderer Pflanzen ist aber die plasmolytische Abhebung des Protoplasmakörpers ohne Tödtung möglich, so z. B. in der Wurzel von Zea mais und in den Sprossen von Polygonum Sieboldi, ebenso im Vegetationspunkt der Keimstengel von Vicia faba, und für letzteren wurde auf diesem Wege eine Turgorzunahme im Urmeristem als Folge des Eingipsens constatirt (Kap. IX).

Uebrigens ist für verschiedene Objecte ein schnelles Absterben bei plasmolytischen Eingriffen bekannt, und solche Empfindlichkeit kommt auch im hohen Grade dem Urmeristem in der Wurzel von Vicia faba zu. Thatsächlich kam es in einzelnen Fällen in dem Urmeristem dieser Wurzel durch Salpeter zu deutlicher Plasmolyse, die aber bald, in Verband mit Absterbungserscheinungen, rückgängig wurde. Immerhin verdienen diese Erscheinungen um so mehr eine nähere Untersuchung, als die Erfahrungen mit der Verkürzungsmethode lehren, dass ohne eine Schädigung die osmotische Energie im Urmeristem durch Kalisalpeter äquilibrirt werden kann. Möglich dass hier in einer gewissen Adhäsion zwischen Protoplast und Zellhaut, resp. in den mit der Trennung beider verknüpften Eingriffen die Ursache des Schädigens begründet ist.

Zwar fehlen im Urmeristem unserer Wurzeln kleine Vacuolen nicht, doch sei nachdrücklich daran erinnert, dass nicht an deren Existenz die Turgordehnung der Haut gekettet ist, wie es WENT und ebenso WORTMANN[1]) unbegreiflicher Weise annahmen, ein Irrthum, der consequenterweise zu dem falschen Schlusse führen musste, dass sich die Turgorcurve nach einem vacuolenfreien Urmeristem rapid senke. Uebrigens ergeben ebensowohl die Plasmolyse als auch die Verkürzungsmethode die ansehnliche Turgorkraft im Urmeristem.

Die Hauptzüge der durch Fig. 7 und 8 dargestellten Turgorvertheilung, d. h. eine annähernde Constanz nach vollendetem Längen-

---

1) Bot. Zeitung 1889, p. 263. — Gerügt ist dieser Fehler bei PFEFFER, Stud. zur Kenntniss d. Plasmahaut u. d. Vacuolen 1890, p. 297, u. Stud. z. Energetik 1892, p. 246.

wachsthum, und ein allmähliches Ansteigen bis zum Urmeristem kommt allen untersuchten Wurzeln und in einer analogen Weise auch den Keimstengeln einiger Pflanzen zu (Kap. IX). Die Curve für die Intensität des Turgors fällt also keineswegs mit der Curve der Wachsthumsschnelligkeit zusammen, die für die Wurzel von Faba 5—7 mm von der Spitze entfernt ihren Culminationspunkt erreicht[1]).

Nach Wortmann[2]) soll freilich in Keimstengeln die Turgorcurve in den ausgewachsenen Theilen und von diesen ab bis zu dem Streckungsmaximum horizontal verlaufen, um von da ab erst langsamer, dann schnell gegen den jüngsten Spitzentheil hin zu fallen. Diese letztere Annahme gründet sich augenscheinlich allein auf die ganz unrichtige Voraussetzung, dass im vacuolenfreien Urmeristem keine Turgorkraft bestehe, denn empirisch ist nur für die an das Wachsthumsmaximum anstossende Gewebezone eine Turgorabnahme um etwa 1 Proc. Rohrzucker notirt[3]). Das entspricht aber nur 0,197 Proc. Kalisalpeter, also einem relativ geringen Turgorunterschied, wie er in benachbarten Zellen desselben Gewebes in diesen Objecten gewöhnlich gefunden wird (vgl. p. 300).

Thatsächlich finde ich aber z. B. für die Turgorcurve der Keimstengel von Vicia faba und Phaseolus multiflorus — zwei Pflanzen, die auch Wortmann untersuchte — einen im Princip ähnlichen Verlauf wie für die Wurzeln, und wenn mit der Verlängerung der wachsenden Region die Turgorzunahme auf eine längere Abscissenachse fällt, so ist doch die Differenz zwischen Scheitelpunkt (4—5 Proc. Salpeter) und ausgewachsener Region (2,5 Proc. Salpeter) ebenso gross wie in der Wurzel von Faba. Es handelt sich also nicht um geringe, sondern um sehr erhebliche Differenzen, die vollwerthig

---

1) Vgl. Sachs, Arbeiten aus dem botan. Institut in Würzburg 1873, Bd. I, pag. 424.

2) Botan. Zeitung 1889, p. 251. — de Vries (Mechanische Ursachen der Zellstreckung 1877, p. 50) fand eine Turgorzunahme nach den jüngeren Geweben hin, verglich aber nur Sprosstheile mit schon ausgesprochener Gewebedifferenzirung.

3) Es ist eine unrichtige Annahme Wortmann's (l. c. p. 250), dass durch Anwendung von Rohrzucker eine grössere Genauigkeit erreichbar sei. Denn die Schwierigkeiten hinsichtlich der Bestimmung des Grenzwerthes bleiben bei jeder isotonischen Lösung dieselben, die Concentration der Salpeterlösung aber kann man ohne jede Mühe mit einer grösseren Genauigkeit herstellen, als für solche Zwecke nöthig ist.

weiterbestehen, wenn in der Curve kleinere secundäre Maxima und Minima aufgedeckt werden sollten. Die Existenz solcher halte ich für sehr möglich, behaupte auch nicht, dass stets die Turgorkraft einen Maximalwerth im wachsenden Scheitel erreicht. In Cladophora ist z. B. kein auffallender Turgorunterschied zwischen der Scheitelzelle und den älteren Segmenten zu finden und ähnlich scheint es auch bei Chara zu sein.

Bei Anwendung der Verkürzungsmethode wurde auch die in der markirten Zone bestehende Turgordehnung nebenbei bekannt und einige Bemerkungen über diese dürften deshalb hier angebracht sein.

Wie schon durch SACHS[1]) und für Mais näher durch ASKENASY[2]) bekannt ist, besteht in der wachsenden Zone der Keimwurzeln eine sehr ansehnliche Turgordehnung, deren plasmolytische Aufhebung in unseren Versuchen bei Faba eine Verkürzung zwischen 10 und 20 Proc., bei Mais eine solche zwischen 14 und 24 Proc. herbeiführte. Mit dem Längenwachsthum aber nimmt die elastische Dehnbarkeit im hohen Grade ab, so dass die Aufhebung der Turgordehnung in den ausgewachsenen Wurzelpartieen nur eine Verkürzung um 0,5—1,5 Proc. veranlasst. Hier stossen wir also auf gewöhnliche Verhältnisse, während der Zellhaut in der Wachsthumszone eine besonders hohe elastische Dehnbarkeit zukommt, die freilich in einzelnen Objecten, wie z. B. in den Staubfäden der Cynareen, noch weit übertroffen wird[3]).

Ob, wie es ASKENASY[4]) für Mais angibt, die Turgordehnung gegen den Scheitel der Wurzel allgemein etwas abnimmt, muss ich dahin gestellt sein lassen. Meine ziemlich zahlreichen, allerdings ohne Rücksicht auf diese Frage, an der Wurzel von Faba ausgeführten Messungen lassen eine derartige Abnahme nicht erkennen, denn ebenso oft wurde in oder hinter dem Wachsthumsmaximum die grösste Turgorverkürzung beobachtet.

Nun nimmt aber die Turgorenergie spitzenwärts zu, und damit

---

1) Arbeiten a. d. bot. Institut in Würzburg 1873, Bd. I, p. 396.

2) Berichte der bot. Gesellschaft 1890, p. 69.

3) Vgl. PFEFFER, Physiologie Bd. II, p. 10.

4) l. c., p. 69.

trotzdem die Dehngrösse dieselbe bleibt, bedarf es einer entsprechenden Compensation. Ich wage nicht zu entscheiden, ob diese einfach durch entsprechende Zunahme des wirksamen Querschnitts der Wandmasse oder durch Mithilfe von Qualitätsdifferenzen der Haut erreicht wird. Eine sichere Beurtheilung ist auch keineswegs so leicht, da verschiedene Verhältnisse, wie z. B. die geringe Grösse der Zellen, der Einfluss des Gewebeverbandes u. s. w. mit in Betracht zu ziehen sind[1]).

Soviel ist aber gewiss, dass die maximale Turgorenergie nicht mit der Zone der maximalen Streckung zusammenfällt. Ebenso besteht kein Zusammenhang zwischen Dehngrösse und der Zuwachsschnelligkeit in Wurzeln, und dasselbe ist nach Wortmann[2]) auch in Stengeln der Fall. Die Frage nach solcher Coincidenz verliert aber überhaupt mit dem in dieser Arbeit zu führenden Nachweis an Bedeutung, dass eine hohe Turgordehnung keine Bedingung für das Flächenwachsthum der Haut ist. Auch lehren Versuche, in welchen durch Hemmung des Wachsens in der übrigen Wurzel der äusserste Spitzentheil zu einem ungemein schnellen Wachsthum angeregt wurde, in sehr schlagender Weise, dass andere Momente für die Wachsthumsregulation entscheidend sind.

Im Gipsverband rückt das Dauergewebe spitzenwärts vor, so dass nach 2—3 Tagen die noch wachsthumfähige Zone auf die halbe normale Länge, d. h. in der Wurzel von Faba auf 5—6 mm, in der von Mais auf 3—4 mm verkürzt ist. Nur in dieser wachsthumsfähig gebliebenen Zone wird hohe elastische Dehnbarkeit bewahrt und deshalb musste die Turgorbestimmung mittelst der Verkürzungsmethode auf diese Zone eingeschränkt werden. Doch nimmt die Grösse der Turgordehnung etwas ab, denn die plasmolytische Verkürzung war nach 48stündigem Eingipsen in der Wurzel von Faba von 10—20 Proc. auf 8—13 Proc. (20 Versuche), bei Mais von 14—24 Proc. auf 8—17 Proc. zurückgegangen. Mit Rücksicht auf die erheblich gesteigerte Turgorkraft muss die Reduction in Faba sogar noch ansehnlicher sein, als sie die Versuche erscheinen lassen.

Wenn auch in der wachsthumsfähigen Zone der eingegipsten

---

1) Vgl. Pfeffer, Energetik 1892, p. 246; auch Pflanzenphysiologie Bd. II, p. 17.
2) Bot. Zeitung 1889, p. 234.

Wurzeln eine Wandverdickung nicht gerade auffällt, so muss ich doch dahin gestellt sein lassen, ob eine solche im Resultate betheiligt ist oder ob dieses sich als alleinige Folge einer modificirten Elasticität der Haut ergibt. Die Herstellung einer genügenden Widerstandsfähigkeit erscheint aber da ganz zweckentsprechend, wo in Folge der Turgorsteigerung die Zellwände der wieder befreiten Wurzeln zunächst einer höheren osmotischen Energie entgegenzuwirken haben.

C. Die Entspannung der Zellhaut.

Wird eine Wurzel so eingegipst, dass aus der Gipsplatte eine Längskante hervorsieht und bald nach dem Erstarren des Gipsgusses der Einwirkung einer 6—7 procentigen Salpeterlösung ausgesetzt, so tritt in Folge der Aufhebung der Turgordehnung eine elastische Verkürzung ein, welche fast allein den wachsenden Spitzentheil betrifft. Nach vollendeter Plasmolyse erscheint die Spitze der Wurzel von Faba 0,9—1,8 mm, die von Mais fast ebenso ansehnlich von dem bisherigen Contactpunkt zurückgezogen.

Ganz anders, wenn die Wurzel in dem nach dem Muster von Fig. 2 (p. 241) dargestellten Gipsverband 2—3 Tage verweilte und inzwischen einen allseitigen, hohen Druck gegen diese Widerlage entwickelte. Durch vollkommene Plasmolyse ist nunmehr eine bemerkbare Abhebung des Wurzelkörpers von der Gipsform nicht mehr zu erzielen. Gegen diese Form aber wird die befreite turgescente Wurzel um 0,4—0,9 mm verlängert und dieselbe Länge nimmt auch die im plasmolytischen Zustand aus dem Gipsverband befreite und dann in Wasser gebrachte Wurzel an. Erneuerte Plasmolyse führt die auf die eine oder die andere Weise behandelte Wurzel wieder auf die Dimension der Gipsform zurück, die allseitige Anpressung an diese war also nicht etwa ein mechanisches Hemmniss für die Realisirung einer angestrebten Verkürzung.

Nach der vollen Reaction gegen die Widerlage waren also die Zellwände ganz entspannt, denn jedwelche elastische Turgordehnung würde in einer Verkürzung bei Aufhebung der Turgorkraft zum Ausdruck kommen. Für Erzielung eines wahrnehmbaren Effectes sind die elastischen Eigenschaften immer noch ausreichend, wie schon aus der Behandlung dieses Gegenstandes (p. 309) und ebenso aus

der Längenzunahme der aus der Gipshülle entnommenen turgescenten Wurzeln hervorgeht. Da aber die Zellhaut vor dem Eingipsen den vollen Turgordruck zu äquilibriren hatte und bekanntlich erheblich elastisch verlängert war, so ist demgemäss die Entspannung herbeigeführt, indem die Zellwände in der Gipshülle in entsprechendem Maasse in die Fläche wuchsen und so es schliesslich dahin brachten, dass die turgorlos gedachte Wurzel die vollen Dimensionen der Gipsform erreichte. Nunmehr wirkt die ganze Turgorenergie gegen die Gipswand, ebenso wie gegen eine Glaswand der volle Druck des Wassers wirkt, wenn dieses von der Glaswand durch einen angepressten, spannungslosen Kautschuckschlauch getrennt wird, der beim Aufheben des hydrostatischen Druckes seine Form bewahrt, sich aber innerhalb der Glasform verkürzt, wenn er elastisch in Anspruch genommen war und natürlich in entsprechendem Grade den gegen die Glaswand wirksamen Wasserdruck herabminderte.

Mit Obigem ist die Entspannungs- und Wachsthumsfrage der Hauptsache nach in zweifelloser Weise erledigt. Um aber die zu Grunde liegenden Grössen noch exacter kennen zu lernen, habe ich auch mikrometrische Messungen ausgeführt.

Unter verschiedenen misslungenen Versuchen hatten in einigen Fällen die aufgesetzten Tuschmarken das Eingipsen und Entgipsen ohne jeden Schaden überdauert, so dass vergleichende Messungen mit aller Exactheit ausgeführt werden konnten (vgl. p. 293). Die so mit Wurzeln von Vicia faba (30—40 mm lang) gewonnenen Resultate sind in Tab. III und IV zusammengestellt, von denen sich letztere auf eine während 48 Stunden, Tab. III auf zwei (a und b) während 50 Stunden eingegipste Wurzeln bezieht.

In der Horizontalreihe: »Lage der Marken« ist die Entfernung der Messpunkte von der Wurzelspitze in mm, in der Differenz der Zahlen 0,2—5,66 mm u. s. w. also zugleich die Länge der gemessenen Strecke an der turgescenten Wurzel vor dem Eingipsen angezeigt. Die Anwendung einer schwächeren Vergrösserung in Tab. III (1 Strich = 0,043 mm) bringt es mit sich, dass diese Strecke in Tab. III kürzer ist als in Tab. IV, in welcher ein Theilstrich = 0,013 mm entspricht.

Nach 54 resp. 56 Stunden wurden die dem Hüllgips entnommenen Gipsplatten (vgl. Fig. 2 p. 241) zunächst kurz mit 2,5 proc.

Salpeterlösung injicirt, darauf wurde die Wurzel isolirt und sogleich in 6 proc. Salpeterlösung gebracht, welche sich in kleinen Cuvetten befand. Die nach 25 und ebenso nach 30 Min., also nach vollständiger Plasmolyse, abgelesenen Markendistanzen finden sich in der dritten Horizontalreihe verzeichnet, während die Horizontalreihe »vor Eingipsen« die Messungen vor dem Eingipsen in Theilstrichen des Mikrometers wiedergibt. Die vierte Horizontalreihe »in Wasser« gibt den Markenabstand nach wiedererreichter Turgescenz an. In Tab. III ist ferner der nach Wiederherstellung der Plasmolyse gefundene Werth in der vorletzten Horizontalreihe verzeichnet. Unter »Verkürzung in Proc.« ist der in 6 proc. Salpeter und in Wasser gefundene Längenunterschied in Bezug auf die in Wasser gemessene Länge procentisch aufgeführt.

Tabelle III.

Keimwurzel von Vicia faba.

Lage der Marken	*a*			*b*	
	0,2—5,66 mm	5,66—10,69 mm	10,69—15,14 mm	0,17—5,16 mm	5,16—9,55 mm
Vor Eingipsen	127 Str.	117 Str.	103,5 Str.	116 Str.	102 Str.
Nach 54 Std. entgipst und in 6% Kalisalpeter	126 »	116 »	103,5 »	116 »	102,5 »
In Wasser	143 »	122 »	104,0 »	136 »	106,5 »
In 6% Salpeter	126 »	116 »	103,5 »	116,5 »	102 »
Verkürzung in Proc.	11,9 Proc.	4,9 Proc.	0,48 Proc.	14,7 Proc.	3,9 Proc.

1 Theilstrich (Str.) = 0,013 mm.

Tabelle IV.

Keimwurzel von Vicia faba.

Lage der Marken	0,6—1,7 mm	1,7—2,7 mm	3,4—4,6 mm
Vor Eingipsen	82 Str.	77,5 Str.	89 Str.
Nach 56 Std. entgipst und in 6% Salpeter	81 »	77,0 »	89 »
In Wasser	92 »	87,5 »	100,5 »
Verkürzung in Proc.	12,1 Proc.	12,6 Proc.	11,4 Proc.

1 Strich = 0,013 mm.

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, dass in der Versuchszeit eine völlige (Tab. III *b*, Tab. IV 2. und 3. Verticalreihe) oder doch nahezu vollständige (Tab. III *a* und Tab. IV erste Verticalreihe)

Entspannung erreicht war. Denn die Plasmolyse ruft keine Verkürzung hervor, d. h. die Zellwände sind auf die der Gipsform entsprechende Länge herangewachsen und demgemäss ergibt sich nach dem Eingipsen für die turgorlose Wurzel dieselbe oder fast dieselbe Markendistanz wie für die turgescente Wurzel vor dem Eingipsen. Die Herstellung des turgescenten Zustandes beweist aber, dass in der entgipsten Wurzel hohe elastische Dehnbarkeit besteht, dass also bei unvollständiger Entspannung im Gipsverband eine Verkürzung durch Plasmolyse hätte eintreten müssen. Auf einen ganz geringen Rest der bezüglichen Zellhautspannung deutet der schon erwähnte kleine Rückgang auf 1 Theilstrich hin (127 Th. auf 126; 82 auf 81), ein Rückgang, der freilich so gering ist, dass er möglicherweise Messungsfehlern entstammt.

Mit dem Uebergang in Dauergewebe wird natürlich die Verkürzung gering und das trifft schon in der von 5,66 bis 10,69 mm reichenden Strecke (Tab. III *a*) zu, da in der eingegipsten Wurzel die zum Längenwachsthum befähigte Zone auf etwa 6 mm eingeengt wird.

Zu gleichem Resultate führte folgende Methode, in welcher die häufige Verwischung der Marken vermieden war. Die Wurzel wurde derart zwischen Glasplatten in eine Gipsplatte gebracht (p. 242), dass eine schmale Längsleiste frei blieb oder nur von sehr dünner Gipsmasse bedeckt war. Auch in letzterem Falle gelingt es, nach Herausnahme der Gipsplatte aus dem Hüllgips, durch sanftes Reiben mit einem nassen Läppchen eine Längslinie bis nahe an die Wurzelspitze so frei zu legen, dass die Wurzel in der Gipshülle völlig fixirt bleibt, also keine Verlängerung ausführen kann[1]. Nachdem diesem freien Längsstreifen Tuschmarken aufgesetzt waren, wurden vor und nach dem Befreien aus dem Gipsverband die nöthigen Operationen ausgeführt.

In solcher Weise sind die in Tab. V zusammengestellten Resultate mit Keimwurzeln von Vicia faba (25—40 mm lang) gewonnen. In jeder der Verticalreihen *a*—*g* sind die an je einer Wurzel ausgeführten Behandlungen aufgeführt. Am Kopfe ist die Dauer des

1) So vorbereitete Objecte dienten auch zu den im Eingang dieses Capitels beschriebenen Versuchen.

Tabelle V.

Keimwurzel von Vicia faba.

	Zeitdauer des Eingipsens	*a* 44 Std.	*b* 48 Std.	*c* 72 Std.	*d* 48 Std.	*e* 46 Std.	*f* 24 Std.	*g* 24 Std.
Im Gipsverband	Lage der Marken	1,7—4,8 mm	1,6—5,3 mm	0,6—4,6 mm	0,5—4,9 mm	0,6—5,3 mm	1,1—4,7 mm	2,0—6,1 mm
	In Wasser	70 Str.	82,5 Str.	88,0 Str.			80,0 Str.	91,5 Str.
	In 2,5% Salpeter	70 »			96,0 Str.	103 Str.		
	In 6—8% Salpeter		81,5 »	88,0 »	94,0 »	102 »	77,0 »	88,5 »
Entgipst	In 2,5% Salpeter	72 »						
	In 6—8% Salpeter	68,5 »	82,0 »	88,0 »	94,0 »	101,0 »	76,0 »	88,0 »
	In 2,5% Salpeter				101,5 »	107,5 »	82,0 »	97,0 »
	In Wasser	79,5 »	94,0 »	95,5 »			90 »	107,0 »
	In 6—8% Salpeter	69,5 »	82,0 »	89,0 »	94,5 »	101,5 »	77 »	89,0 »
	In Wasser				105,5 »	114,0 »		
Verkürzung in Proc.		12,6 Proc.	12,8 Proc.	6,8 Proc.	10,4 Proc.	11,4 Proc.	15,6 Proc.	16,8 Proc.

1 Strich = 0,045 mm. — In den Versuchen *a*, *b*, *c*, *e*, *g* kam 8 proc., in den Versuchen *d*, *f* kam 6 proc. Lösung von Kalisalpeter zur Anwendung.

Eingipsens vermerkt. Dann folgen die innerhalb des Gipsverbandes vorgenommenen Operationen, unter welchen auch die auf diese Zwangslage bezügliche Lage der Messmarken, von der Wurzelspitze ab gerechnet, verzeichnet ist. Die nächsten Horizontalreihen geben die Markendistanz für die Messung »in Wasser« oder »in 2,5 Proc. Salpeter« in Theilstrichen (à 0,045 mm) an. Der nach völliger Plasmolyse gefundene Werth steht in der Reihe »6—8 Proc. Salpeter«.

Nun folgte das Entgipsen ohne Wechsel der Lösung und die einige Zeit darauf ausgeführte Messung ist in der bezüglichen Reihe »In 6—8 Proc. Salpeter« aufgeführt. Nur in Versuch *a* wurde in einer 2,5procentigen Lösung entgipst und dann erst der volle plasmolytische Zustand hergestellt. Die Objecte sind dann, wie aus der Signatur der Horizontalreihen ersichtlich ist, theilweise in Wasser gebracht und später nochmals mit 6—8 Proc. Salpeter behandelt, oder es wurde eine Behandlung mit 2,5 Proc. Salpeter eingeschaltet und theilweise die volle Turgescenz erst hergestellt, nachdem inzwischen nochmals volle Plasmolyse herbeigeführt worden war. In der letzten Horizontalreihe steht wiederum die in derselben Weise wie in Tab. III und IV berechnete procentische Verkürzung.

In analoger Weise ist die Tab. VI eingerichtet, welche sich auf 4 Maiswurzeln (*a*, *b*, *c*, *d*, 25—35 mm lang) bezieht und einer weiteren Erklärung nicht bedarf.

Tabelle VI.

Keimwurzel von Zea mais.

	Zeitdauer des Eingipsens	*a* 46 Std.	*b* 47 Std.	*c* 47 Std.	*d* 49 Std.
Im Gips	Lage der Marken	0,7—5,0 mm	0,4—3,4 mm	1,0—4,6 mm	1,5—3,9 mm
	In Wasser	95,5 Str.	65,5 Str.	81,0 Str.	55,0 Str.
	In 10% Salpeter	94,5 »	64,0 »	78,0 »	54,0 »
Entgipst	In 10% Salpeter	94,0 »	63,0 »	78,0 »	54,0 »
	In Wasser	105,0 »	74,5 »	92,0 »	60,5 »
In 10% Salpeter		94,5 »	64,0 »	79,0 »	
Verkürzung in Proc.		10,5 Proc.	18,3 Proc.	15,3 Proc.	10,7 Proc.

Zur Einstellung reicht, wie früher (p. 295) hervorgehoben, ein halbstündiger Aufenthalt in dem neuen Medium aus, doch wurde in

allen Versuchen der Tab. III bis VI durch zwei aufeinanderfolgende Messungen, nach 25 und nach 35 Minuten, die Herstellung der vollen Plasmolyse sicher gestellt. Dass diese durch 6proc. Salpeterlösung vollständig erreicht war, wurde ausserdem noch controlirt. Der Aufenthalt im Wasser wurde im Allgemeinen nur auf 20 Min. ausgedehnt, um den sonst unvermeidlichen Zuwachs zu vermeiden, der in unseren Versuchen, wie die nachfolgende Plasmolyse lehrt, ganz fehlte, oder doch auf ein Minimum eingeschränkt war. Sollte deshalb gelegentlich der höchste Turgescenzzustand bis zum Zeitpunkt der Messung nicht ganz vollständig erreicht worden sein, so ist dieses doch für unsere Schlussfolgerungen ohne jede Bedeutung, da dadurch nur die in der letzten Horizontalreihe verzeichneten Verkürzungswerthe etwas zu gering ausfallen.

Gleicherweise ist es ohne Belang, wenn einmal während der Operationen die Turgorenergie ein wenig zurückgegangen sein sollte.

Mit Rücksicht auf den möglichen Zuwachs wurde die Entgipsung der Wurzeln im plasmolytischen Zustand oder (Tab. V, Versuch *a*) nach Einwirkung von 2,5 Salpeter vorgenommen. In dieser Lösung kommt in einer ½ Stunde ein merklicher Zuwachs nicht zu Stande, doch ist der Turgor nicht ganz aufgehoben und die Wurzel erfährt demgemäss beim Befreien eine gewisse Verlängerung.

Aus den Tab. V und VI, welche sachgemäss nur den wachsthumsfähig bleibenden Spitzentheil berücksichtigen, folgt also, in Uebereinstimmung mit Tab. III und IV, dass in den Wurzeln durch das Eingipsen eine mehr oder weniger weitgehende Hautentspannung herbeigeführt wird. Diese ist nach 24 Stunden (Tab. V, *f* und *g*) nur partiell erreicht, dagegen nach 72 Stunden (*c*) vollständig geworden. Ist nun nach ungefähr 2 Tagen (*a*, *b*, *d*, *e*) bei Faba noch eine gewisse, theilweise auch keine (*b*) Hautspannung vorhanden, so steht dieses in vollem Einklang mit den Druckmessungen (Tab. I und Kap. IV), welche lehren, dass die Druckentwicklung individuell verschieden ansteigt und im Allgemeinen nach zwei Tagen zwar weitgehend, aber doch noch nicht ganz vollendet ist. Diese fernere Zunahme muss allein auf weitere Hautentspannung fallen, sofern, wie es scheint (p. 301), die Turgorsteigerung in dieser Zeit abgeschlossen ist, oder sofern, wie bei Mais, eine Turgorsteigerung überhaupt nicht eintritt. In diesem Sinne ist auch die nach zwei Tagen noch nicht

ganz vollendete Hautentspannung in den Maiswurzeln zu beurtheilen (Tab. VI).

Die plasmolytische Verkürzung in der Gipsform gestattet wohl eine gewisse Vorstellung über die Grösse der noch verbliebenen Spannung, jedoch keine ganz genaue Berechnung derselben. Der Mangel an Verkürzung ist dagegen ein voller Beweis für die gänzliche Entspannung und bei der erheblichen Verlängerung nach dem Entgipsen (7—15 Mikrometerstriche) sind die Messungen (mit einem Fehler von weniger als 1 Theilstrich) im Verein mit allen beigebrachten Argumenten ausreichend zur Begründung des Schlusses, dass in unseren Wurzeln, in der Reaction gegen eine unverrückbare Widerlage, allmählich eine gänzliche oder doch nahezu vollständige Entspannung der Zellhaut erreicht wird, dass also auch das zu diesem Ziele nothwendige Flächenwachsthum der Zellhaut ausgeführt wird, obgleich die Turgorspannung allmählich auf Null sinkt.

Natürlich muss nicht jede Pflanze oder jeder Pflanzentheil gleich befähigt sein und von den untersuchten Objecten scheinen es Keimstengel, sowie Chara nicht zu einer vollen Entwicklung der osmotischen Energie gegen eine Widerlage zu bringen. Dagegen wurde wiederum für die Wurzeln von Helianthus annuus und Pisum sativum eine volle Turgorentspannung in der in diesem Kapitel zuerst beschriebenen Weise constatirt.

Wie die Druckentwicklung muss auch das hierzu führende Mittel, die Hautentspannung, nach allen Richtungen, also auch in radialer Richtung thätig sein. Dem entsprechend zeigten auch einige Messungen an der Wurzel von Faba, dass diese durch Plasmolyse sogleich nach dem Eingipsen gegenüber der Gipsform an Querdurchmesser verliert, während eine solche Verminderung nach 2- bis 3tägigem Aufenthalt im Gipsverband unterbleibt. Auf eine genaue Messung dieser Abnahme, die zudem Schwierigkeiten bietet, durfte ich verzichten, und erinnere nur daran, dass, ebenso wie hinsichtlich des Aussendruckes, die Actionen in der Längs- und Querrichtung nicht gleiche Energie und Ausgiebigkeit erreichen müssen. Aus der Druckleistung der eingegipsten und der Verlängerung der aus dem Gips befreiten Wurzel folgt ferner mit vollster Sicherheit, dass für unsere Versuche die in älteren Wurzeltheilen eintretende Verkürzung (resp.

die damit verknüpfte Formänderung der Zellen)[1]) nicht in Betracht kommt.

Ich kann es dahin gestellt lassen, ob im Spitzentheil der Wurzel alle Zonen durch eigene Thätigkeit sich gleich schnell und gleich weit entspannen. Denn falls einzelne Partien weniger activ sind und demgemäss von Seiten anderer eine gewisse Compression erfahren, so ändert dieses doch an dem Wesen der Sache gar nichts. Ohnedies würde, falls überall die Entspannung complet wird, eine locale Compression nur dann ganz unterbleiben, wenn für alle Zonen das Product aus Querschnitt und Turgorkraft constant ist (vgl. p. 274). Nach der Tabelle IV war übrigens für die drei gemessenen Zonen (zwischen 0,6—4,6 mm von der Wurzelspitze liegend) die active Entspannung ungefähr gleich weit fortgeschritten.

Die selbstthätige Entspannung im Spitzentheil ist schon deshalb ausser Zweifel, weil die basipetal anschliessenden Zonen (etwa 6 mm von der Spitze ab) so fixirt sind, dass durch ihre Verlängerung eine Compression des Spitzentheils nicht erzielt werden kann. Zudem lehren die Versuche der Tab. III und IV für die gemessenen Strecken direct die nur activ erreichbare Längenzunahme kennen. Ausserdem ergaben directe Versuche, dass die auf der Wurzel von Faba aufgesetzten Marken gegenüber der Gipshülle keine Verschiebung erfahren, dass also der Spitzentheil keine Compression erfährt. Die Tuschmarken auf der Wurzel waren in der schon beschriebenen Weise angebracht, während als fixe Punkte in der Gipshülle einzelne dem Gipsguss incorporirte Wollefäserchen dienten. In Bezug auf diese wurden in zwei gelungenen Versuchen, bei mikrometrischer Messung, keine Verschiebungen der Tuschmarken gefunden, die von der Wurzelspitze 6,1; 4,0 und 3,5 mm entfernt standen.

Wahrscheinlich wird auch der hintere Theil der normal wachsthumsfähigen Zone zunächst gewisse Entspannung erfahren, bevor er allmählich in Dauergewebe übergeht, das nach 48 Stunden bis auf etwa 6 mm gegen die Wurzelspitze gerückt ist. In solcher Weise ist dafür gesorgt, dass diese Spitzenpartie jederzeit eine wachsthumsfähige unverrückbare und nicht comprimirbare Widerlage gegenüber dem vom vorderen Spitzentheil ausgehenden Druck bietet.

---

1) Pfeffer, Pflanzenphysiologie Bd. II, p. 90.

In dem activ bleibenden Spitzentheil der eingegipsten Wurzel von Faba und Mais ist, ähnlich wie in der normalen Wurzel, Gewebespannung kaum vorhanden. Doch würde deren Existenz, wie schon bemerkt (p. 291), die Schlussfolgerungen nicht modificiren, da unsere Versuche direct zeigen, dass die in normalen Wurzeln vorhandene Gesammtspannung der Zellwände durch active Thätigkeit in dem Gewebe allmählich ganz eliminirt wird.

In dem activen Spitzentheil sind die Intercellularräume nur klein und fehlen in dem ebenfalls activen Urmeristem gänzlich. Dadurch ist völlige Widerlage im Inneren geschaffen und ein Ausbiegen und Ausweichen, das bei allseitiger Druckentwicklung zu den im Gipsverband erzielten Erfolgen führen könnte, ist ausgeschlossen[1]. Zudem ist dann, wenn der Turgor nicht zunimmt, eine Uebertragung der osmotischen Energie gegen eine Widerlage nur durch eine Entlastung der Haut, also durch ein zur Entspannung führendes Wachsthum der Zellhaut gewinnbar. Sollte diese schliesslich Faltungen und Wellungen ausbilden — was ich nicht sicher ermitteln konnte — so würde daraus nur folgen, dass das Flächenwachsthum nach Entspannung der Zellhaut noch weiter fortgesetzt wird.

D. Schlussbetrachtungen.

An der Hand exacter empirischer Erfahrungen lassen sich also mit aller Strenge die nächsten Mittel kennzeichnen, mit deren Hilfe die Pflanze beim Auftreffen auf einen Widerstand in regulatorischer Weise eine Druckleistung zu Stande bringt. Diese Reaction läuft, wie schon zu Beginn dieses Kapitels geschildert wurde, darauf hinaus, dass der Turgor (osmotische Kraft) die Energie liefert, die Entspannung der Haut aber dazu dient, diese Energie gegen einen Widerstand zu lenken. Diesem Principe gemäss arbeitet die Pflanze auch dann, wenn durch gleichzeitige Turgorsteigerung eine Vermehrung der osmotischen Energie hinzukommt.

Das Wachsthum der Zellhaut liefert also nicht die Druckkraft, ist vielmehr nur das Mittel um diejenige Energie, durch welche die Zellhaut bisher in Anspruch genommen war, nach aussen zu übertragen. Für dieses Ziel ist es gleichgiltig, wie dieses Wachsen erreicht wird;

---

1) Pfeffer, Energetik 1892, p. 234.

in Bezug auf die Wachsthumsmechanik aber werden wir die interessante Thatsache, dass das Flächenwachsthum trotz abnehmender Turgorspannung fortgesetzt wird, erst späterhin discutiren.

Zur Entwicklung des höchsten Aussendruckes muss die Haut gänzlich entspannt werden, denn so lange diese einen Theil der Turgorspannung für sich in Anspruch nimmt, wird um diesen Werth der Aussendruck vermindert. Anderseits kann der von zartwandigen Geweben ausgehende Druck nicht wesentlich über die Turgorenergie steigen. Denn wie bei künstlicher Compression nach Ueberwindung des Turgordruckes zarte Zellwandungen ausbiegen und sich falten, muss gleiches auch dann eintreten, wenn die Zellwände fortfahren in die Fläche zu wachsen, nachdem die volle Turgorenergie gegen die resistente Widerlage gelenkt ist. Eine solche Wandfaltung wird keineswegs durch den turgescenten Zustand besonders erschwert, denn die Druckfestigkeit zartwandiger Gewebe fällt wesentlich nur auf den Gegendruck des Turgors und nach Ueberschreitung dieses kommen Wandfaltungen bald zuwege, wenn, bei allseitiger Widerlage, ein weiterer Druck, z. B. in Richtung der Längsachse ausgeübt wird.

Ein gewisser Energieaufwand ist natürlich zu solcher Faltung nothwendig und eine gewisse Steigerung des Druckes über die Turgorenergie hinaus würden demgemäss auch zartwandige Gewebe erzielen können, falls in den völlig entspannten Zellhäuten ein actives Flächenwachsthum noch weiter fortschreitet[1]). Welchen Werth diese active Druckentwicklung der Haut in unseren Objecten zu erreichen vermag lässt sich nicht ohne weiteres sagen, denn die Druckfestigkeit des turgorlosen Zustandes gibt dafür kein sicheres Maass ab. Aus verschiedenen Versuchen indess, deren Discussion ich hier unterlasse, darf ich entnehmen, dass durch den fraglichen activen Hautdruck im Spitzentheil einer kräftigen Wurzel von Vicia faba höchstens ein Druck von 20—25 g zu Stande gebracht werden könnte.

Dieser Werth ist gering gegenüber dem zu 226—353 g (p. 264) bemessenen Drucke. Zudem wurde diese Druckhöhe, der Hauptsache nach, in zwei oder doch in drei Tagen erreicht, also in einer Zeit, in welcher die Hautentspannung noch nicht oder soeben

1) Vgl. Pfeffer, Studien zur Energetik 1892, p. 216.

vollendet war und bis dahin kommt nur osmotische Energie für die Aussenleistung in Betracht. Denn so lange die Wandungen negativ gespannt sind, kann ein Flächenzuwachs nur zur Ausgleichung dieser Spannung führen und erst nach Erreichung dieses Zieles ist der Wand die Möglichkeit zu einer activen Pressung geboten.

Ob ein solcher activer Druck durch die Zellwände nicht in Betracht kommt, würde auch zu beurtheilen sein, wenn sowohl die disponible osmotische Energie, als auch der von der Wurzel entwickelte Druck genügend genau bemessen wären. Thatsächlich wissen wir aber nicht, ob der mittlere isosmotische Salpeterwerth ganz exact bestimmt ist (vgl. p. 300) und ferner ist früher (p. 276) erörtert, wie und warum die Bestimmung der activen Querschnittsfläche, resp. die Berechnung der Druckintensität an Unsicherheiten leiden. Immerhin ist nach den gefundenen Salpeterwerthen die osmotische Energie für die empirisch gemessenen Druckleistungen der Wurzel zureichend.

Denn da der Druckwerth einer 1 proc. Lösung von Kalisalpeter 3,6 Atmosphären beträgt[1]), so entwickelt eine 4,5 proc. Lösung einen Druck von 16,2 Atmosphären. Dieser Druck, welcher der auf die Spitze der eingegipsten Wurzel von Faba bezüglichen Turgorcurve *b'* (Fig. 7 p. 297) entspricht, wird in unseren Druckmessungen an der Wurzel dieser Pflanze (p. 264) nicht erreicht, ausser in dem Versuche 6 A, in welchem es aber zweifelhaft ist, ob die realisirte Druckleistung allein auf die relativ geringe Querschnittsfläche der direct auf die Messplatte wirkenden Wurzelspitze bezogen werden darf. Wenn also selbst die Druckintensitäten, in Bezug auf die real active Fläche, um etwa 10 Proc. höher ausfallen sollten, so würde doch der höchste Werth von 10,67 Atm. (Versuch 3) nur auf 11,74 Atm. steigen und geringer bleiben, als die einer 3,5 proc. Salpeterlösung entsprechende Energie.

---

1) Pfeffer, Studien zur Energetik 1892, p. 227 Anm.

VI. Wachsthum und Arbeitsleistung gegen Widerstände.

In der Natur haben die Pflanzen nicht allein gegen unnachgiebige Widerlagen zu reagiren, vielmehr weit häufiger ihren Weg durch Medien zu nehmen, welche einen constanten, resp. einen allmählich oder sprungweise variirenden Widerstand entgegensetzen. Demgemäss fragt es sich, in welcher Weise sich die Wachsthumsthätigkeit gestaltet, je nachdem mit dem Vordringen eine grössere oder geringere Arbeitsleistung verknüpft ist. Den Fundamenten dieser Frage ist der erste Abschnitt dieses Kapitels gewidmet. Weiterhin sollen dann noch die Erfolge behandelt werden, welche durch verlängertes Eingipsen der Wurzeln und ferner durch die mechanische Einengung der Wachsthumsfähigkeit auf die äusserste Wurzelspitze erzielt werden.

A. Wachsthumsschnelligkeit und Aussenarbeit.

Ein Fortschieben der Widerlage wird natürlich erst möglich, nachdem die Wurzelenergie den Gegendruck erreicht, resp. überschritten hat. Von nun ab hat die fortwachsende Wurzel, neben dem auf das Wachsthum zu verwendenden Aufwand, auch die durch Wegstrecke und Last bemessene Arbeit zu leisten[1]. Zur Messung dieser Aussenarbeit sind unsere Federapparate nicht geeignet, wohl aber ist aus den damit gewonnenen Versuchen zu ersehen, wie naturgemäss die Abhebung des Gipsdeckels erst beginnt, nachdem der anpressende Federdruck erreicht und überschritten ist. Bliebe von nun ab der Widerstand constant, so würde die Wurzel unter dauernder Arbeitsleistung fortwachsen und die Herstellung solcher Verhältnisse muss in messenden Versuchen zunächst erstrebt werden.

Sicher ist, wie auch schon in der »Energetik« von mir (p. 230) hervorgehoben wurde, dass bei einem bestimmten Widerstand die Aussenarbeit einen Maximalwerth erreichen muss, denn die durch Wegstrecke und Last bestimmte Aussenarbeit wird sowohl in einem widerstandslosen Medium, als auch bei unverrückbarer Widerlage Null.

1) PFEFFER, Energetik 1892, p. 230.

Ob aber für die in der Zeiteinheit geleistete Aussenarbeit der grösste Werth erreicht wird, wenn der höchste zulässige oder wenn ein geringerer Widerstand zu überwältigen ist, lässt sich nicht voraussagen. Denn die Pflanze antwortet auf eine mechanische Gegenwirkung mit Reactionen, deren Werth und Bedeutung für die nach aussen entwickelte Energie sich nicht theoretisch abschätzen lassen.

An dieser Stelle war es mir aber nicht um exacte Messungen der Bedingungen für maximale Arbeit etc. zu thun, vielmehr kam es darauf an, die grundlegenden Principien auf empirischen Boden zu stellen. Demgemäss habe ich Methoden nicht weiter verfolgt, die es gestatten dürften, unter gleichzeitiger Verhinderung einer Ausbiegung einen genau bemessenen Widerstand constant zu erhalten. Vielmehr beschränkte ich mich auf die Anwendung homogener Medien, also auf Culturbedingungen, die auch unter natürlichen Verhältnissen geboten werden und benutzte zu diesem Zwecke besonders eine gute Qualität von plastischem Thon. Diesem genügend homogen herstellbaren und erhaltbaren Medium kann man, je nach dem Wassergehalt, eine sehr geringe, aber auch eine ziemlich hohe Consistenz geben, und zwar eine viel höhere als sie die noch anwendbare und auch angewandte Gelatine gewährt.

Aus dem tüchtigst durchgekneteten Thon wurden Würfel von 100 bis 120 mm Seite geformt und diese vor dem Versuch einige Tage im dampfgesättigten Raum gehalten, um eine ganz gleichmässige Vertheilung des Wassers zu erzielen. Mit Hilfe eines Eisenstäbchens, das man bis an ein fixirtes Schildchen einstiess, wurden dann Löcher von 20 mm (vereinzelt auch 15 mm) Tiefe in den Thon gebohrt und in diese die Wurzeln so eingesetzt, dass ihre Spitze aufstiess. Zur Controle dessen diente eine 20 mm (resp. 15 mm) von der Spitze entfernte Tuschmarke, während eine 5 mm weiter abstehende Marke die Basis für die Zuwachsmessung abgab. Durch möglichst geringen Durchmesser der Löcher und nachheriges Anpressen des Thons dürfte eine zumeist ausreichende Fixirung gewonnen werden, doch wurden stets die Cotyledonen (resp. die Samen) noch mittelst Nadeln an Holzplättchen befestigt, die in den Thon eingelassen waren. Unter diesen Umständen kam nie irgend ein Herausschieben der Wurzeln zu Stande, während der wachsende Spitzentheil in den Thon eindrang. Die Culturen befanden sich bei annähernd

constanter Temperatur im dampfgesättigten Raume und die Samen selbst waren mit nassem Fliesspapier umhüllt. Zum Schluss wurden dann die Wurzeln direct oder nach partiellem Wegräumen des Thones herausgenommen und ihr Gesammtzuwachs mit dem Maassstab bestimmt.

Zum Vergleich diente der mit Wasser zu einem flüssigen Brei aufgeschwemmte Thon. Die gleichartigen Wurzeln waren in diese, in Gläsern befindliche Masse gleich tief eingesenkt und wurden übrigens unter den gleichen Bedingungen wie in dem Parallelversuch mit consistentem Thon gehalten. In beiderlei Versuchen fiel der Zuwachs normal gestaltet und also auch frei von irgend welchen Anschwellungen aus, auch drangen die Wurzeln stets geradlinig in die Thonmasse ein.

Um wenigstens eine annähernde Vorstellung von dem Widerstand zu bekommen, welchen die vordringende Wurzel zu bewältigen hatte, wurde der Spitze eines eisernen Strickstocks die Form der Wurzelspitze gegeben. Für die Vergleichung mit der Wurzel von Vicia faba war dieser conische Spitzentheil 3,4 mm lang und hatte am oberen Ende 1,8 mm Durchmesser. Von da ab war der Eisenstab verdünnt, so dass er nicht mit der Wandung des gebohrten Loches in Contact kam. Aufwärts befand sich die durch einen Glasring hergestellte Führung und endlich ganz oben ein zur Aufnahme von Gewichten bestimmtes Tellerchen. Da erst bei Ueberschreitung eines Gesammtdruckes von 100—115 g, in anderen Versuchen 120—140 g, der Eisenstab in der Thonmasse sich fortbewegte, so hatte also die Wurzel von Vicia faba während ihres Fortwachsens mindestens einen solchen Widerstand zu überwinden, während im weichen Thon der Conus bei einem Gewicht von weniger als 1 g versank. Diese Angaben beziehen sich nur auf den ohne kräftige Erschütterung erzielten Erfolg, denn energische plötzliche Stosswirkungen, die natürlich den Eisenstab schon bei geringerem Gewicht in den Thon treiben, kommen bei dem Wachsthum der Wurzel nicht in Betracht.

In den Versuchen mit Zea mais hatte der der Form dieser Wurzel nachgebildete Conus eine Länge von 3 mm, einen Durchmesser von 1,2 mm. Mit diesem Stab ergab sich eine Tragfähigkeit von mindestens 70 g für einen Thon, dessen Wassergehalt ungefähr dem

oben mit einer Resistenz von 100 bis 115 g verzeichneten Thon entsprach. Diese Thonmasse verlor bei 100° C. 22,3 Proc., die etwas consistentere (120—140 g Widerstand) 18,3 Proc. Wasser.

In analoger Weise wurden vergleichende Versuche mit einer 0,6proc.. eben noch erstarrenden Gelatine und einer 13proc. Gelatine[1]) in der Weise ausgeführt, dass die Wurzeln erst nach dem Erstarren der Gelatine eingesetzt wurden. In die consistente Gelatine sank die in Bezug auf Faba benutzte conische Eisenspitze bei einem Druck von 30 g, nicht aber bei einem Druck von 25 g ein.

Ueberblicken wir die in den Belegen in der Abth. II zusammengestellten Versuche Nr. 23—27, so ergibt sich für den fraglichen consistenten Thon eine mässige, für die Gelatine nur eine unsichere Wachthumsverzögerung. Als Mittel für den 24stündigen Zuwachs je einer Wurzel von Faba ist in dem mit je 7 Keimlingen angestellten Versuche 23 für den weichen Thon ein Zuwachs von 17,4 mm, für den härteren ein solcher von 12,9 mm verzeichnet, und für Mais (Versuch 27) stellen sich diese Mittelwerthe auf 21 mm und 16 mm. In diesen Experimenten hatte der harte Thon eine Resistenz von 100 g (so mag kurz gesagt sein), während diese Resistenz 120 g in den Versuchen 24 und 23 betrug, die auf 48 Stunden ausgegedehnt wurden. Der mittlere Zuwachs in 24 Stunden berechnet sich für Versuch 24 zu 18,7 resp. 12,7 mm; für Versuch 25 zu 19,9 resp. 14,5 mm. Für den 24stündigen Gelatineversuch stellt sich dieser Zuwachs auf 19,1 resp. 18 mm. (Die zweite Zahl gibt den Zuwachs in dem consistenteren Medium an.)

Die Zuwachse dieser Wurzeln fielen bei Beachtung aller Vorsichtsmassregeln, wie schon bemerkt, durchaus normalgestaltet aus, und in dem flüssigen Thon wurde derselbe Zuwachs erreicht wie in anderen in Leitungswasser gehaltenen Wurzeln. Voraussichtlich wird also auch im flüssigen Thon die Wachsthumsschnelligkeit gegenüber lockerer Erde, besonders in den zweiten 24 Stunden, etwas verlangsamt erscheinen[2]). Ich möchte in dieser Verzögerung aber nur einen der mannigfachen Reactionserfolge sehen, wie sie sich unter

---

1) Es wurde dazu die mit Salzsäure ausgezogene Gelatine benutzt. Vgl. den Abschnitt B. dieses Kapitels.

2) Arbeiten des bot. Instituts in Würzburg 1873, Bd. I, p. 410.

dem Einfluss verschiedener Medien in Wachsthum und Gestaltung in so vielseitiger Weise ergeben, nicht aber den Ausdruck unzureichender Sauerstoffversorgung[1]). Denn diese ist für die nicht sehr langen Wurzeln in der Thonmasse, auch in der harten, aus den schon in Bezug auf den Gipsverband angeführten Gründen (p. 245) offenbar völlig ausreichend. Das bestätigte auch der Zuwachs zweier Wurzeln, die in einem Thoncanal gegenüber den in Wasser gehaltenen Wurzeln von Faba in ähnlicher Weise auf ihren Zuwachs geprüft wurden, wie es für den Gipscanal geschah.

Nach diesem Ergebniss erhält sich auch die der Thonfläche angepresste Wurzel in voller Turgescenz, und dementsprechend ergab die mikrometrische Messung an dem wachsenden Spitzentheil keine Verlängerung, wenn die dem consistenteren Thon entnommenen Wurzeln in Wasser gebracht wurden[2]).

Wir haben demgemäss allen Grund, die Verlangsamung des Wachsens allein auf die mechanische Hemmung durch die Thonmasse zu schieben. Sollte aber an dem Resultate irgend ein anderer Factor betheiligt sein, so würde die reale Arbeitsleistung in dem consistenten Thone relativ noch grösser ausfallen, als sie nach den empirisch gefundenen Zuwachswerthen erscheint. Dieserhalb ist es auch nicht nöthig, die Frage hier weiter zu discutiren, ob ausser dem mechanischen Widerstand noch anderweitig eine gewisse Wachsthumsverlangsamung veranlasst wird.

Bei einem zu hohen Gegendruck ist eine Verlängerung durch Wachsen überhaupt unmöglich, und ebenso wie mit zunehmender Gegenwirkung die zeitliche Druckzunahme mehr und mehr vermindert wird (Kap. IV), nimmt zweifellos auch die Wachsthumsschnelligkeit mit

---

1) Zu solchen Effecten zählt u. a. auch die stark veränderte Wachsthumsthätigkeit in einem mit Nährsalzen reichlich oder unzureichend versorgten Boden und der Einfluss des Mediums auf die Production von Wurzelhaaren. Andererseits ist durch Arbeiten von Wieler, Stich u. s. w. bekannt, dass eine Verlangsamung des Wachsens erst durch eine sehr weitgehende Herabsetzung der Partiärpressung des Sauerstoffs veranlasst wird.

2) Unsere Thonmasse enthielt 18—22 Proc. Wasser. Ein nur 8 Proc. Wasser enthaltender Lehmboden vermag aber eine Pflanze noch mit Wasser zu versorgen (Pfeffer, Physiologie I, p. 76). In unseren Versuchen ist die genügende Versorgung schon gedeckt, wenn der Boden nur in keiner Weise der Pflanze Wasser entzieht.

dem Widerstande mehr und mehr ab. Gegenüber einem Widerstande von 200—250 g wird sich die Wurzel von Faba sicherlich nur ganz langsam verlängern, 300 bis 400 g aber vermag sie nicht mehr zu bewältigen[1]). Doch ist es zweifelhaft, ob ein jeder Widerstand eine gewisse Wachsthumshemmung veranlasst. Ja eine solche scheint nach den Versuchen in Gelatine durch einen Widerstand von 25 g in der Wurzel von Faba nicht erzielt zu werden, während die Hemmung in den Thonversuchen (Widerstand 100 bis 120 g) schon hervortritt, jedoch thatsächlich (nach Wiederaufnahme des Wachsens) geringer ist, als es nach den gefundenen Zahlenwerthen scheint.

Es ist nämlich zu bedenken, dass die Verlängerung so lange gänzlich stille steht, bis die Wurzel eine dem Widerstand gleiche Energie nach aussen entwickelt hat. Erst dann beginnt das Fortschieben der Last und das Längenwachsthum, das nun, wie wir noch hören werden, mit annähernd gleicher Schnelligkeit fortgesetzt wird. Für den Zuwachs ist also nicht die ganze, sondern die um die Hemmungsphase verkürzte Versuchszeit in Rechnung zu ziehen.

Nach Versuchen, in welchen die Wurzel von Faba sich hinter einer Glasscheibe in Thon (Resistenz 100 g) befand, dauerte es 4 bis 5 Stunden, ehe die Wurzel ihr Längenwachsthum begann[2]).

---

1) Die Druckintensität, welche Wurzeln noch zu überwinden vermögen, liegt nach unseren Versuchen in der Wurzel von Faba und Mais etwa zwischen 8 und 10 Atmosphären. Das Dickenwachsthum der Bäume vermag noch höheren Widerstand zu überwinden. Denn Krabbe (Wachsthum des Verdickungsringes und der Holzzellen 1884) fand, dass Nadelhölzer gegen einen constant bleibenden Druck von 10 Atmosphären, Laubhölzer gegen einen solchen von 12 bis 15 Atmosphären ein wenn auch sehr stark vermindertes Dickenwachsthum ausführten.

2) Inzwischen spielt sich freilich das zur Entspannung führende Längenwachsthum der Zellhaut ab, welches verursacht, dass die Wurzel von Faba, nach vollständigem Entspannen, beim Isoliren sich um 0,4—0,9 mm verlängert (p. 311). Beim Herausnehmen der Wurzeln wird also diese Längenzunahme mitgemessen, die indess bei einem Widerstand von 100 g, also bei unvollkommener Entspannung, wahrscheinlich nicht die Hälfte des obigen Endwerthes erreicht. Die so in unseren Thonversuchen erreichte Verlängerung dürfte etwa dem halbstündigen normalen Zuwachs entsprechen, der sich auf 0,37 mm stellt, wenn die Wurzel in 24 Stunden um 18 mm an Länge gewinnt. In unseren Betrachtungen darf ich indess von einer solchen Correctur Abstand nehmen, da die Hauptsache unserer Schlussfolgerungen davon nicht betroffen wird. Ebenso lasse ich hier ausser Acht, dass bei einer Verkürzung der in Wachsthum begriffenen Strecke die auf die Längeneinheit bezogene Wachsthumsschnelligkeit sich relativ höher stellt.

Bis dahin blieb die Wurzelspitze (beobachtet wurde an einer 1 mm hinter der Spitze aufgesetzten Tuschmarke) unverrückt oder zeigte doch nur ganz geringe Verschiebungen, die durch das Ausweichen der angrenzenden Thonmasse ermöglicht wurden, ein Ausweichen, das die feste Gipsmasse in dieser Weise nicht gestattet. Im Gipsverband verfloss noch längere Zeit, ehe die Wurzel eine Aussenenergie von 100 g entwickelte, denn diese Zeit würde sich auf 6 bis 7 Stunden stellen, wenn wir die stündliche Druckzunahme ungewöhnlich hoch, nämlich zu 15 g in der Stunde annehmen. Doch sind, wie ich hier nicht näher darlegen will, in dem Gipsverband Verhältnisse geboten, welche wenigstens die zeitliche Entwicklung des Aussendruckes beeinflussen können und wir dürfen naturgemäss nur die aus dem Thonexperiment geschöpften Erfahrungen unseren Betrachtungen zu Grunde legen.

Nehmen wir die bis zur Aequilibrirung des Thonwiderstandes (= 100 g) verflossene Zeit zu 4 Stunden an, so würde der in Versuch 23 (vgl. Belege) notirte 24stündige Zuwachs von 12,9 mm in 20 Stunden realisirt und der hiernach für 24 Stunden berechnete Zuwachs auf 15,5 mm zu erhöhen sein, und dieser Werth stellt sich auf 17,2 mm, wenn eine Latenzzeit von 6 Stunden angenommen wird. Diese letztere Zahl stimmt aber mit dem für den fast widerstandslosen flüssigen Thon gefundenen Zuwachs (17,4 mm) überein. Für dieses Medium ergab Mais (Versuch 27) in 24 Stunden einen Zuwachs von 21 mm, für den consistenten Thon von 16 mm, und dieser Zuwachs erhöht sich auf 19,2 mm, wenn er statt in 24 in 20 Stunden ausgeführt wurde.

In den Versuchsreihen 24 und 25 mit Faba kam ein consistenterer Thon (Resistenz = 120 g) zur Verwendung, in welchem der übrigens nicht näher ermittelte Wachsthumsstillstand wohl mindestens die ersten 6 Stunden umfasst, aber von der 48stündigen Versuchszeit in Abzug zu bringen ist. Auf Grund dieser Daten berechnen sich dann folgende Zuwachse für 24 Stunden: Versuch 24 (flüssiger Thon = 18,7 mm) 14,6 mm statt 12,7 mm; Versuch 25 (flüssiger Thon = 19,9 mm) 16,6 mm statt 14,5 mm.

In der consistenten Gelatine (25 g Resistenz) dürfte 1 bis 2 Stunden nach Beginn der Versuche die volle Wachsthumsschnelligkeit erreicht worden sein. Ein solcher Aufenthalt genügt aber, um den

an sich zweifelhaften Unterschied zwischen weicher und consistenter Gelatine auszugleichen. Denn der für letztere empirisch gefundene Zuwachs von 18 mm stellt sich bei 1- resp. 2stündiger Wachsthumshemmung für die consistentere Gelatine auf 18,8 mm resp. 19,6 mm.

Mit Rücksicht auf die individuellen Differenzen, die Unsicherheit der Latenzzeit u. s. w. sind unsere, auf eine mässige Zahl von Einzelversuchen basirten Erfahrungen unzureichend, um geringe Differenzen zu präcisiren. Immerhin dürfen wir folgern, dass die Wachsthumsschnelligkeit in der Wurzel von Faba (bei Anrechnung des Latenzstadiums) durch einen constanten Widerstand von 25 g nicht oder kaum, durch einen Widerstand von 100 bis 120 g zwar merklich, jedoch in einem geringen Grade verlangsamt wird und dass sich in letztgenannter Hinsicht die Wurzel von Mais ähnlich verhält. Mit höherem Widerstand wird aller Voraussicht nach, sowie für die Druckentwicklung, auch für die Wachsthumsschnelligkeit eine Beschleunigung der Abnahme eintreten.

Unter diesen Umständen steigt die Aussenarbeit — das Product aus Wegstrecke in den constanten Widerstand — nur bis zu einer gewissen Grenze proportional zum Widerstand, um dann, mit Verlangsamung des Wachsens, langsamer zuzunehmen. Da wir aber die Curve dieser Wachsthumsverlangsamung nicht genau kennen, so lässt sich nicht sicher sagen, bei welchem Widerstand die Arbeitsleistung ein Maximum erreicht, das nothwendig existirt, weil ebenso bei fehlendem als auch bei unüberwindlichem Widerstand das Arbeitsproduct Null wird. Nach einer Calculation, die ich indess bei ihrer Unsicherheit hier nicht näher begründe, dürfte die Aussenarbeit fortwährend dem Maximalwerth nahezu gleichkommen, wenn zur Aequilibrirung des zu besiegenden Widerstandes die Aussenenergie auf $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ ihres höchsten Werthes anschwellen resp. sich erhalten muss.

Unsere Versuche zeigen aber evident, in wie hohem Grade die Aussenarbeit mit dem Widerstand steigt. Im Versuch 23 stellt sich die in 24 Stunden durch die Wurzel von Faba geleistete Aussenarbeit für den flüssigen Thon (Resistenz 1 g) auf 17,4 Grammmillimeter, für den härteren Thon (Resistenz 100 g) auf 1290 gmm, wenn nicht einmal die aus dem Latenzstadium sich ergebende Correctur angebracht ist. Das Verhältniss, welches in diesem Falle 1 : 74,2 ist, berechnet sich

in den Versuchen 24 und 25 für Faba zu 1 : 81,5 resp. 1 : 87,4. Für Mais (Versuch 27) erscheint diese Relation nur deshalb geringer (1 : 53,3), weil für den Widerstand des weichen Thons der Widerstand = 1 g beibehalten ist, obgleich derselbe mit dem Durchmesser der Wurzel thatsächlich einen geringeren Werth annahm.

Die Pflanze vermag also ihre Arbeitsthätigkeit zu steigern, denn eine solche Steigerung ist nothwendig, um neben der fortdauernden Wachsthumsarbeit einen entgegentretenden Widerstand vor sich her zu schieben. Dem Wesen der Sache nach verhält es sich wie mit einem Menschen, welcher ausser dem zur eigenen Fortbewegung stets nothwendigen Energieaufwand seine Arbeitsleistung entsprechend steigern muss, um nach dem Aufladen einer Last auf derselben Wegstrecke in derselben Zeit auf eine Anhöhe zu gelangen. Ebenso wie die Pflanze hat aber auch der Mensch und jede Maschine nur eine endliche Leistungsfähigkeit und bei genügender Last (Widerstand) wird ein Fortbewegen ganz unmöglich. Bei etwas geringerem Widerstand aber muss der Gang verlangsamt, d. h. die für eine Wegstrecke nöthige Zeit verlängert werden, um mit der zur Verfügung stehenden Energie vorwärts kommen zu können, und in diesem Sinne ist auch die Abnahme der Wachsthumsschnelligkeit der Pflanze bei Zunahme des Widerstandes zu betrachten. Und wie der Mensch ökonomischerweise den bequemsten Weg einschlägt, so kommt es auch in der Pflanze nur dann zu hoher und höchster Aussenleistung, wenn ein Umgehen der Hindernisse durch die Zwangslage unmöglich gemacht ist.

In solchem Vergleich mit dem Menschen tritt wohl am klarsten hervor, wie und in welchem Sinne es auch in der Pflanze regulatorisch geleiteter Thätigkeiten bedarf, damit, wie es Thatsache ist, gegen Widerstände eine zweckentsprechende Reaction zu Stande kommt. Eine selbstregulatorische Thätigkeit beherrscht aber überhaupt das ganze Getriebe aller lebendigen Organismen und ist auch zu bestimmten Zwecken sehr vielfach in Apparaten und Maschinen dienstbar gemacht. So in der Uhr, in dem sich selbst regulirenden Thermostaten und ebenso in dem Gasmotor, der bei zunehmendem Widerstand automatisch den Gasconsum und damit die Energieentwicklung steigert, der uns also in principieller Hinsicht eine Reaction vorführt, wie sie uns auch in dem gegen höhere Widerstände arbeitenden Organismus entgegentritt.

Die allgemeinste, in alle Theile und Thätigkeiten eingreifende selbstregulatorische Thätigkeit ist überhaupt eine nothwendige Forderung für Existenz und Entwicklung des Organismus, dessen grössere und kleinste Glieder und Organe in gegenseitiger Abhängigkeit und Unterstützung bestehen und arbeiten[1]). Dieses gilt ebenso für Spross und Wurzel wie für die einzelnen Glieder des Protoplasmaorganismus. Und wie der Organismus ein Ganzes ist, werden auch die zur regulatorischen Thätigkeit nöthigen Beeinflussungen durch das Ganze, also bei einem Baume auf sehr weite Strecken fortgepflanzt. Das Entblättern z. B. hat nicht nur das Austreiben von Reserveknospen zur Folge, sondern Hand in Hand mit dieser veranlassten neuen Thätigkeit macht sich auch eine vorübergehende Wachsthumshemmung im Wurzelsystem geltend. In der Wurzel aber — um bei dieser zu bleiben — wird sowohl durch Wegschneiden als durch Umgipsen des Spitzentheils beschleunigtes Produciren und Heranwachsen von Nebenwurzeln veranlasst (Kap. VII). Wird aber durch entsprechende mechanische Widerstände dafür gesorgt, dass nur der äusserste Spitzentheil der Wurzel sich fortentwickeln kann, so gibt die gewaltige Beschleunigung des Wachsens in diesem Spitzentheil von einer energischen correlativen Reaction Kunde (Abth. B dieses Kapitels).

Die Wachsthumsvorgänge sind aber stets mit Stoffwechselprocessen verkettet und die regulatorische Beherrschung des Getriebes erstreckt sich natürlich auf die Gesammtheit der Thätigkeiten, also sowohl auf den Stoffwechsel als auf den Kraftwechsel. Diese Regulationsverkettung ist somit auch ebenso bei der normalen Entwicklung im Spiele, wie in der Reaction gegen irgendwelche besondere Verhältnisse und Eingriffe. Dieser Regulation bedarf es u. a., um den Stoffumsatz so zu lenken, dass die osmotische Energie in einer Zelle bei langsamer und schneller Grössenzunahme constant bleibt und in richtigem Verhältniss zu dieser und zum Wachsen muss auch die Production von Cellulose und das Flächenwachsthum der Zellhaut geregelt werden.

Es entspricht dem allgemeinen Charakter der automatischen

---

1) Die allgemeine Bedeutung der Selbstregulation ist z. B. hervorgehoben bei Pfeffer, Physiologie Bd. I, p. 310; Zur Kenntniss der Oyxdationsvorgänge 1889, p. 462.

Regulation, sowohl in Organismen wie in Mechanismen, dass in gegenseitiger Abhängigkeit Thätigkeiten (nöthigenfalls also auch Arbeitsleistungen) beschleunigt oder verlangsamt werden. Diesem Principe schliesst sich auch der Specialfall an, dass eine bis dahin schlummernde Fähigkeit in Action gesetzt und somit in Dienst gestellt wird oder dass die bis dahin activen Mittel zur Erreichung anderer Ziele in neue Bahnen gelenkt oder sistirt werden.

Den endlichen Erfolgen kann man schlechterdings nicht ansehen, welche Kette von Processen zwischen einem Anstoss und den letzten, die mechanische Ausführung besorgenden Gliedern einer Reaction eingeschaltet sind. So viel ist aber gewiss, dass es sich in den Regulations- und Reizvorgängen sehr oft um verwickelte Reactionsketten handelt, in denen Auslösungen und mechanische Uebertragungen in mannigfachster Weise die Verbindung herstellen, um Reactionen, die zudem häufig nach fernen Punkten direct oder indirect ausstrahlen.

Wie dem aber auch sei, sobald die veranlasste Thätigkeit mit den in der Pflanze disponiblen Mitteln betrieben wird, sobald also die äussere Veranlassung nur den Anstoss dafür abgiebt, dass die Thätigkeit der Pflanze in bestimmte Bahnen irgendwie und irgendwo einlenkt, haben wir mit vollem Rechte von einem Auslösungsvorgang zu reden, gleichviel welches energetische Verhältniss zwischen dem Anstoss und der ausgelösten Reaction besteht. Die Auslösungsvorgänge im lebendigen Organismus aber nennen wir Reizvorgänge[1]) und in diese Kategorie zählen auch die gewiss nicht einfachen Reactionsketten, welche zu Druckleistungen gegen eine mechanische Widerlage führen. Es verschlägt nichts, dass hierbei, wie gar nicht anders möglich, Druck- und Gegendruck äquivalent sind. Denn Thatsache bleibt in jedem Falle, dass der Anstoss nur die Veranlassung dafür war, dass der Organismus mit den ihm zu Gebote stehenden Mitteln und Kräften die Reactionskette ausführt, deren letzte mechanische Glieder — die Hautentspannung und nöthigenfalls die Turgorschwel-

1) Als Reizvorgänge sind eben die Auslösungsvorgänge im lebendigen Organismus zu bezeichnen. In diesem Sinne wurde zuerst von mir die Sache aufgefasst und es ist in der That ganz unmöglich, irgend eine andere Definition zu geben, welche die Gesammtheit der Erscheinungen umfasste. Vgl. PFEFFER, Physiologie Bd. I, p. 4 und: Unters. a. d. bot. Institut zu Tübingen 1884, Bd. I, p. 473.

lung — allein uns bekannt sind. Ohne jeden Zweifel wird es Jedermann einen Reizvorgang nennen, wenn ein Mensch veranlasst wird, seine Kräfte zur Ueberwältigung von Widerständen anzuspannen; dem Wesen der Sache nach verhält es sich aber analog bei einer Pflanze, die mit Aufbietung ihrer Kraftmittel gegen eine Widerlage arbeitet. Auch darf man sich diese Reactionskette, die auf kleinem Raume und doch wieder nur bedingungsweise sich abspielt, die aber auch fernliegende Glieder des Körpers in Mitleidenschaft zieht, keineswegs einfach vorstellen und muss sich, wie stets, hüten, die letzten Acte als den ganzen Inhalt der Reaction zu nehmen. Dass es Zeit zur Entwicklung höheren Aussendruckes bedarf, ist eine Eigenschaft sehr vieler Reizreactionen, von denen nur gewisse sich plötzlich abspielen. Uebrigens erreicht unsere Druckreaction schnell ihr Endziel, wenn ihr nur ein geringer Widerstand entgegentritt.

Diese allgemeinen Auseinandersetzungen schienen mir geboten, um das Wesen der gegen einen Widerstand gerichteten Reaction ins richtige Licht zu setzen. Es mag noch daran erinnert werden, dass wie üblich, nur der Wechsel des Widerstandes zu einer Veränderung der Thätigkeit führt, die, wie in gar vielen Reizreactionen, nach der Uebergangsreaction bei Constanz der Verhältnisse auf dem nun erworbenen Niveau sich erhält[1]). Analog verhält sich z. B. der Muskel, welcher durch dauernde Reizung im Tetanus erhalten wird, und wie bei dem Muskel eine intermittirende elektrische Reizung, so würde bei der Wurzel ein discontinuirlicher Widerstand zur Folge haben, dass

---

1) So ist es natürlich in allen Reizungen, welche den Uebergang zu einem neuen Gleichgewichtszustand veranlassen. In gleichem Sinne führt auch die durch den Wechsel der Lichtrichtung erzielte heliotropische Reizung den Uebergang auf eine bestimmte Stellung, d. h. einen Gleichgewichtszustand herbei, der bei Constanz der Verhältnisse und durch diese Constanz erhalten wird. Analog ist aber auch ein Wärmewechsel eine Veranlassung, dass die mit den eigenen Energiemitteln betriebenen Thätigkeiten erst beginnen oder beschleunigt resp. verlangsamt werden. Dieser Wechsel wirkt also jedenfalls nur auslösend, d. h. als Reiz, der eben die Thätigkeit auf den neuen Gleichgewichtszustand überführt, dessen Erhaltung von der Constanz der Temperatur (ceteris paribus) abhängig ist. So gut wie eine jede durch die Bedingungen constant erhaltene heliotropische oder geotropische Krümmung kann man also auch jede durch den Mangel des Temperaturwechsels constant erhaltene Thätigkeit als den jeweilig bestehenden Reizzustand bezeichnen. Ausführlicher werde ich diese und anschliessende Fragen in einem demnächst zu publicirenden Vortrag über die Reizbarkeit der Pflanzen behandeln.

die graphische Darstellung der Bewegung nicht eine gerade, sondern eine abwechselnd fallende und steigende Curve liefert. Uebrigens strebt auch die phototactische Schwärmspore so lange nach derselben Richtung, als derselbe Reiz anhält und so lange es die mechanischen Verhältnisse erlauben.

Wie allgemein muss auch hier das Streben dahin gehen, den Reactionsprocess in allen seinen Phasen und Beziehungen zu erleuchten. Indess dieses endliche Ziel ist noch für keinen vitalen Vorgang in aller Vollständigkeit erreicht und so müssen wir uns schon glücklich schätzen, wenigstens die zur unmittelbaren Ausführung benutzten Factoren präcisiren zu können. In diesen, dem Flächenwachsthum der Haut und der Turgorspannung, begegnen wir den auch im Wachsthum dienstbaren Mitteln, die hier zu dem besagten Reactionszwecke nutzbar gemacht werden.

Auch der Mensch, welcher durch Aufladen einer Last zu höherer Arbeitsleistung veranlasst wird, macht für die erhöhte Leistung nur die üblichen Energiequellen nutzbar. Andere als die im Organismus gebotenen und zu Arbeitszwecken disponiblen Energiemittel können überhaupt nie in Betracht kommen. Auch ist die Sachlage keineswegs principiell verschieden, wenn in einer Reizreaction eine schon vorhandene Bewegungsthätigkeit, resp. die sie vermittelnden Processe nur in quantitativer Hinsicht in andere Bahnen gelenkt werden, oder wenn, wie z. B. bei Mimosa, ein bestimmter Bewegungsvorgang nur so oft und so weit zur Ausführung kommt, als es Reize veranlassen, wodurch zugleich verursacht wird, dass die Pflanze einen grösseren Betrag von Arbeit zu leisten hat. Uebrigens tritt im Grasknoten die zur Krümmung führende Wachsthumsthätigkeit erst mit dem geotropischen Reize in Action und erst durch Entfesselung dieser Action werden Energiemittel für diese Bewegung in Anspruch genommen, die ebenfalls zur Vollbringung hoher Aussenarbeit befähigt ist.

Kommt zu dem fortdauernden Wachsen noch Aussenarbeit, so fordert die so vermehrte Leistung einen höheren Gesammtaufwand an Energie, es sei denn, dass die Pflanze bis dahin im Wachsen unnöthigen Energieaufwand trieb und ökonomischeres Arbeiten erst mit dem Entgegentreten des äusseren Widerstandes begann. Letzteres ist weder nach teleologischen Gesichtspunkten, noch nach Analogien wahrscheinlich, und so ist aller Grund zu der Annahme, dass die

erhöhte mechanische Inanspruchnahme in der Pflanze, analog wie im Menschen, einen energischeren Energieumsatz veranlasste. Wahrscheinlich wird Hand in Hand damit, wie im Thiere, so auch in der Pflanze eine Steigerung der Athmungsthätigkeit eintreten, eine Steigerung, welche z. B. auch die Reaction der Pflanze gegen Verletzungen begleitet[1]).

Nimmt der Turgor in der Reaction gegen die Widerlage zu, so ist damit eine gesteigerte Productionsthätigkeit osmotisch wirkender Substanz direct gekennzeichnet. Denn eine entsprechende Mehrproduction ist nothwendig, um bei gleichem Zuwachs (also bei gleicher Volumzunahme) den auf höheres Niveau gehobenen Turgor constant zu erhalten. Die Erhöhung wie das Unterbleiben der Turgorschwellung erfordert übrigens ebenso gut eine specifische regulatorische Thätigkeit, wie die Erhaltung der Turgorconstanz in der wachsenden Pflanze und es ist also keineswegs nothwendig, dass in derselben Pflanze auf jedwelche Wachsthumsverlangsamung eine Turgorsteigerung folgen muss (vgl. p. 303).

Die regulatorische Steigerung der Arbeitskraft kann aber, in Organismen wie in Mechanismen, immer nur bis zu einem endlich begrenzten Werthe steigen und so ist es mit zunehmendem Widerstand schliesslich nur durch Verlangsamung der Bewegung möglich, dass die in der Zeiteinheit disponible Energie die Summe der zu leistenden Arbeit zu bewältigen vermag. Dem entsprechend wird mit zunehmender Aussenarbeit ebensowohl das Wachsen (das Fortbewegen) der Pflanze, wie der Gang des Menschen oder des best regulirenden Gasmotors verlangsamt. Mit dem merklichen Beginn solcher Verlangsamung muss natürlich die höchste mögliche Energieentwicklung nicht erreicht sein und dieses muss auch für die Pflanzen beachtet werden, die nach unseren Versuchen augenscheinlich — und man muss sagen in ökonomischer Weise — die Verlangsamung des Wachsthums beginnen, bevor die Production der Arbeitskraft auf den möglichen Maximalwerth angelangt ist.

In diesen und ähnlichen Erwägungen ist es einleuchtend, dass die Aussenarbeit kein Maass für die unbekannte Energiesumme sein kann, welche durch Verlangsamung des Wachsens in der Innenarbeit

---

1) Vgl. Pfeffer, Energetik 1892, p. 201.

erspart wurde[1]). Schon die bis zu einer bestimmten Aussenleistung constante Wachsthumsschnelligkeit spricht entschieden gegen eine solche Auffassung, die auch ganz und gar nicht in Einklang mit der Erfahrung steht, dass die Pflanzen in trefflicher Weise regulatorisch arbeiten und den Bedürfnissen entsprechend die Ausgiebigkeit des Stoffwechsels und Kraftwechsels modificiren.

Neben solcher regulatorisch geleiteten Energieentwicklung kann und wird auch der auf der einen Seite ersparte Arbeitsaufwand in dem angedeuteten Sinne zu Gunsten der Aussenarbeit oder irgend einer anderen Function Verwendung finden. Dem Wesen der Sache nach liegt in dieser wechselseitigen Uebertragung und Concession ein Fall von Correlation vor, der in so einfacher, durch nichts getrübter Weise im Organismus wohl kaum jemals realisirt sein dürfte. Doch tragen wenigstens den allgemeinen Stempel der wechselseitigen Uebertragungen und Concessionen mehr oder weniger die uns entgegentretenden Effecte der Correlationserscheinungen, wie verwickelt immerhin ihre Verkettung und ihr Betrieb sein mag. Denn im Wesen laufen alle die mannigfachen Correlationen darauf hinaus, dass die Unterdrückung oder Hemmung eines Geschehens auf der einen Seite, auf der anderen Seite mit dem Erwachen oder Beschleunigen einer Function verknüpft ist, resp. dass die umgekehrte Beeinflussung uns entgegentritt[2]).

Speciell in der Wurzel begegnen wir u. a. in der beschleunigten Nebenwurzelbildung bei Hemmung des Wachsens, sowie in der ungemein ansehnlichen Wachsthumbeschleunigung der allein in Freiheit gelassenen Wurzelspitze, auffälligen Correlationen, die, wie ebenso andere Correlationsvorgänge, sofort erkennen lassen, dass es sich nicht um einfache Energieübertragungen handelt. Denn die beschleunigten und modificirten Thätigkeiten werden durch die in den activ werdenden Partien selbst entwickelten Mittel betrieben und nicht die

---

1) Vgl. PFEFFER, Energetik 1892, p. 232.

2) Eine bestimmte Begriffsbestimmung für »Correlation« ist meines Wissens bisher nicht gegeben. Wenn man die Bezeichnung bisher wohl zumeist für äusserlich sichtbar werdende Gestaltungen anwandte, so ist doch kein Grund, warum man nicht auch die entsprechenden physiologischen Wechselbeziehungen in gleicher Weise als Correlationen bezeichnen soll, wenn es sich auch um äusserlich nicht hervortretende Processe handelt.

Betriebsenergie, sondern nur der auslösende Anstoss ging von dem correlativen Theile aus. Aber gerade in Hinsicht auf die uns gänzlich unbekannten auslösenden Reizverkettungen müssen diese und andere Erfolge auch in energetischer Hinsicht stets beurtheilt werden.

Bei einer solchen verwickelten Sachlage lässt sich auch nicht voraussagen, was sich in dem durch mechanischen Widerstand im Wachsthum gehemmten Theile abspielt. Denn wenn auf der einen Seite mit dem Wachsthum die Production von Baumaterial, osmotisch wirkenden Stoffen u. s. w. sistirt werden, so kann man doch nicht wissen, in welcher Weise durch die auf Ueberwindung der Widerlage strebenden Reactionen die Thätigkeiten der Pflanze gelenkt werden und in welchem Verhältniss demgemäss der gesammte Energieumsatz bei sistirtem und freiem Wachsthum sich gestaltet.

Eine weiterstrebende causale Zergliederung hat die entscheidenden und mitwirkenden Factoren zu präcisiren. In Bezug auf die mechanische Vermittlung wurde aber gezeigt, dass die gesammte Energie für die Aussenleistung durch die Turgorkraft geliefert wird, während das Flächenwachsthum der Zellwand nur dazu dient, die Haut zu entspannen und auf diese Weise die Turgorkraft ganz oder theilweise gegen die gebotene Widerlage zu lenken. Natürlich ist ein entsprechend geregeltes Flächenwachsthum für das Gesammtwachsthum und somit für die äussere Arbeitsleistung der Pflanze ebenso nothwendig, wie die Regulation des Turgors in den an Volumen zunehmenden Zellen. Doch spielt das Flächenwachsthum in Bezug auf die Aussenleistung in analogem Sinne eine nur auslösende Rolle, wie die Drehung eines Hahnes, durch welche das bis dahin zurückgehaltene Wasser zur Vollbringung von Leistungen gegen äussere Widerstände gebracht wird. Demgemäss sind die auf das Hautwachsthum (resp. Drehung des Hahnes) verwandte und die in der Aussenarbeit repräsentirte Energie ganz incommensurabel, denn für letztere ist es ganz gleich, ob für einen bestimmten Zuwachs (resp. eine gewisse Hahndrehung) eine sehr geringe oder eine sehr hohe Energie aufgewandt wurde. Auch ist es für das Wesen der Aussenleistung einerlei, mit welchen Betriebskräften die Hautentspannung oder die Drehung des Wasserhahnes ausgeführt wird.

Auf die an sich bedeutungsvolle Mechanik des Wachsthums der

Zellhaut waren unsere Untersuchungen zwar in erster Linie nicht gerichtet, doch gestatten sie in dieser Hinsicht eine wichtige Schlussfolgerung, wie in Kap. XIII gezeigt werden soll. Hier sei nur darauf hingewiesen, dass die zum Flächenwachsthum nothwendige Betriebskraft nicht der osmotischen Energie entstammen kann, da die Zellhaut bei der mehr und mehr nachlassenden Turgordehnung und bis zur gänzlichen Eliminirung dieser nur durch eine eigene Activität wachsen kann. Denn die so endlich auf Null reducirte Turgorkraft kann nicht die plastische Dehnung in Zellwänden bewirken, welche während der ganzen Reaction mindestens ihre volle Elasticität bewahren, eine Elasticität, welche nicht einmal bei voller Turgordehnung überschritten wird. Dieserhalb aber sind, wie es nothwendig ist, die Zellhäute befähigt, jederzeit der vollen Turgorenergie entgegenwirken zu können, wenn diese, bei plötzlicher Hinwegnahme der äusseren Widerlage, gegen sie gelenkt wird, und dieses auch dann, wenn die Turgorkraft durch Anschwellung der osmotischen Energie sehr gesteigert wurde.

Demgemäss muss die Zellhaut activ wachsen, d. h. die Arbeitskraft für das Flächenwachsthum muss auf dem Wege der Intussusception, durch Ausscheidungsenergie (Volumenergie) gewonnen werden[1]. Mit Constatirung dieser Fähigkeit ist aber nicht gesagt, dass das Flächenwachsthum stets mit demselben Energiemittel betrieben werden muss. Es muss vielmehr die Möglichkeit zugegeben werden, dass in anderen Fällen die Turgorenergie entscheidend oder unterstützend eingreift, ja, bei den correlativen Befähigungen wäre es denkbar, dass unter Umständen eine gewisse gegenseitige Vertretung dieser Energiequellen im Dienste der Pflanzen ausgenutzt wird.

Abgesehen davon, dass das Flächenwachsthum der Zellwand erst nach gewisser Abnahme der Turgordehnung langsamer zu werden beginnt, ist doch allein aus solcher Verlangsamung überhaupt nicht zu schliessen, dass die Turgorkraft die Arbeit im Flächenwachsthum leistet. Denn Verlangsamung wird auch durch Abnahme der Temperatur erzielt, obgleich die Wärme nicht die Energiequelle für das Wachsthum ist. Und wie die Wärme, so ist eben auch die Turgescenz, resp. die richtige Turgorspannung der Haut in gewisser Hin-

1) PFEFFER, Energetik 1892, p. 216.

sicht und so auch in Rücksicht auf das besprochene Flächenwachsthum nur eine Allgemeinbedingung für Herstellung des thätigen Zustandes. Auch lehrt die Verlangsamung des Wachsens bei Steigerung der mechanischen Spannung, dass die Grösse der mechanischen Dehnkraft keineswegs für das Flächenwachsthum entscheidend ist[1]).

Wenn also das Flächenwachsthum der Zellwand nicht durch osmotische, sondern durch Ausscheidungs-Energie betrieben wird, so kommt doch der Turgorkraft eine andere mechanische Bedeutung darin zu, dass erst durch sie in zartwandigen Geweben die Straffheit und Tragfähigkeit hergestellt wird, ein Zustand, der natürlich bei Anschmiegen der Zellen an eine resistente Widerlage nicht verloren geht. Doch darf die Turgescenz überhaupt nicht ausschliesslich nach rein mechanischen Gesichtspunkten beurtheilt werden, denn thatsächlich gehen von jener auch regulatorische Beeinflussungen anderer Actionen aus. In welcher Weise diese in der Reaction gegen eine Widerlage im Näheren eine Rolle spielen, das ist zur Zeit nicht zu sagen. Nur soviel ist, wie auch schon betont wurde, in diesen und anderen Erwägungen gewiss, dass aus der äusseren Arbeitsleistung kein sicherer Maassstab für die Innenarbeit zu entnehmen ist, und speciell die im Flächenwachsthum der Zellhaut aufgewandte Arbeit wird in concreten Fällen gar nicht von der Turgorkraft betrieben, welche grade die nach aussen gerichtete Energie liefert[2]).

Der Rückverfolg aller Thätigkeit im Organismus führt unvermeidlich zuletzt auf chemische Umsetzungen[3]). Gleichzeitig hiermit habe ich auch betont, dass die in den chemischen Processen umgesetzte und disponibel gemachte Energie u. a. keinen Maassstab für diejenigen Leistungen im Organismus geben kann, welche zunächst nur an die Existenz eines Stoffes und dessen richtige Angriffsweise und Wirkung gekettet sind. Denn davon hängt es schon ab, ob z. B. überhaupt mechanische Leistungen durch osmotische oder Ausschei-

---

1) Vgl. PFEFFER, Energetik 1892, p. 245 und Kap. XIII dieser Arbeit.

2) Da man unter »Wachsthumsenergie« die im Wachsen aufgewandte oder geleistete Arbeit zu verstehen hat, so ist es, wie ich schon in der Energetik p. 231 bemerkte, nicht zweckentsprechend, die »Zuwachsgrösse« als »Wachsthumsenergie« zu bezeichnen. Denn beide sind keineswegs proportional und bei hoher Aussenarbeit kann z. B. die Zuwachsgrösse minimal sein.

3) PFEFFER, Energetik 1892, p. 209.

dungs-Energie vollbracht werden, und für das Ausmaass dieser ist es ohne jeden Belang, ob die Pflanze für Production und Gewinnung der wirkenden Stoffe eine möglichst geringe oder eine tausendmal grössere Energie aufzuwenden hatte. So ist es — um nur ein Beispiel anzuführen — für das nur durch seine Fallhöhe Arbeit vollbringende Wasser einerlei, ob Dampfkraft oder Menschenkraft die Hebung zum Bassin besorgt, oder ob die in dieser Hebung aufgewandte Energie dem theoretischen Minimum gleichkam, oder ein beliebiges Multiplum dieses Minimalwerthes war.

In diesen und ähnlichen Erwägungen ergibt sich auch die in der Energetik näher erläuterte völlige Unbestimmtheit der Beziehungen zwischen der in der Athmung disponibel gewordenen und der zu Arbeitsleistungen in und durch die Pflanze verwandten Energie. In Anschluss an das soeben Besprochene leuchtet dieses sofort ein, sobald man bedenkt, dass die Aufgabe der Athmungsthätigkeit vielfach in der Ermöglichung der Production bestimmter Stoffe gipfelt, deren fernere Leistung im Dienste des Organismus von der Entstehungsweise ganz unabhängig ist[1]). Und wenn u. a. die regulatorisch geleitete vermehrte Production eines Körpers im Allgemeinen von einer Steigerung der Athmung begleitet sein wird, so ist doch einmal eine Proportionalität zwischen beiden Grössen nicht nothwendig und zudem pflegen vitale Vorgänge gleichzeitig verschiedene Thätigkeiten und Bahnen in Mitleidenschaft zu ziehen. Deshalb schon kann die Beziehung zwischen Athmungsgrösse und Aussenarbeit nicht eindeutig sein, jedoch hat ein auf diese Relation gerichtetes Studium ein vielfaches Interesse.

Uebrigens ist die durch die Athmung disponibel werdende Energie sehr gross gegenüber der maximalen Aussenarbeit. Denn da die Verbrennung von 0,242 mg Stärke 1 Calorie liefert, eine solche Calorie aber einem Arbeitsäquivalent von 42350 gmm entspricht, so genügt für eine Arbeit von 1300 gmm, wie sie unsere Wurzelversuche in 24 Stunden ergaben (p. 330), die Verbrennung eines kleinen Bruchtheils von einem mg Stärke[2]).

---

1) PFEFFER, Energetik 1892, p. 210.

2) Vgl. PFEFFER, l. c. p. 202.

B. Correlative Verschiebung der Wachsthumsthätigkeit.

Durften wir in den auf Arbeitsleistung bezüglichen Versuchen unerörtert lassen, ob die wachsthumsthätige Strecke die normale Länge bewahrt, so knüpft sich doch anderweitig ein hohes Interesse an die Frage: wie gestaltet sich die Zuwachsgrösse, wenn allein der äussersten Wurzelspitze die Möglichkeit der Verlängerung gewährt ist? Derartige Verhältnisse würden durch entsprechendes Eingipsen durchführbar sein, doch konnte ich mich auf Versuche in Gelatine beschränken, da schon diese in sehr klarer Weise das Resultat lieferten, dass in der Wurzelspitze eine ungemein beschleunigte Zuwachsthätigkeit entwickelt wird, wenn die anderweitige Verlängerung der Wurzel mechanisch gehemmt wird.

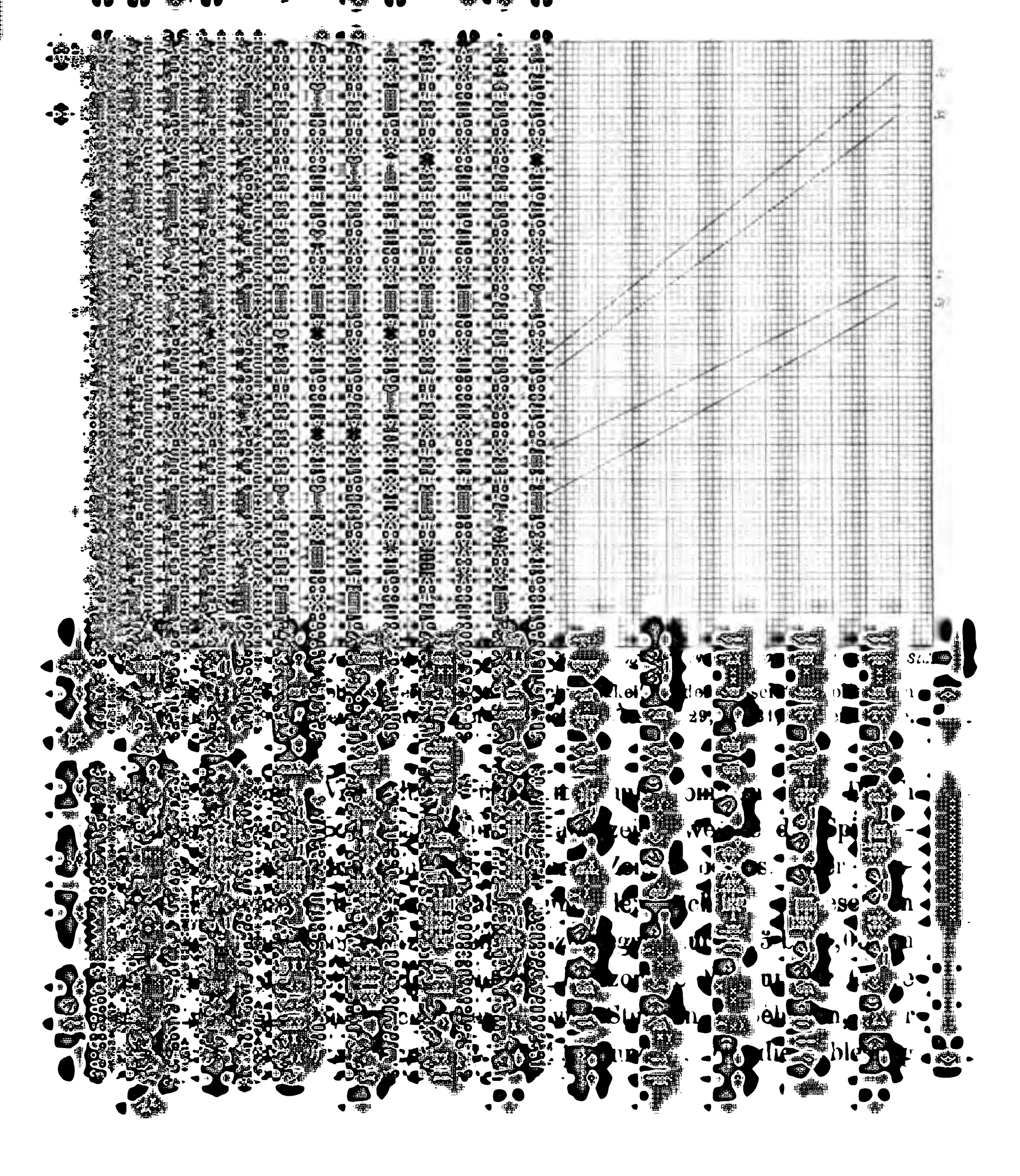
Zur Ausführung der Versuche kamen die Keimwurzeln von Faba in die bei 32° C. verflüssigte 13proc. Gelatine[1]), welche dann durch Einstellen der kleinen Cüvette in Wasser thunlichst schnell zum Erstarren und auf die gewünschte Temperatur gebracht wurde. An den zuvor an der Wurzel angebrachten Tuschmarken wurde darauf der Zuwachs resp. die Constanz der Länge ermittelt. Die Gelatine war durch Behandeln mit 1proc. Salzsäure und Auswaschen mit Wasser gereinigt. Diese Gelatine reagirte nur sehr wenig sauer und nach kurzem Erwärmen auf 100° C. kamen in ihr während der 24stündigen Versuche Bakterien nicht in störender Weise zum Vorschein.

Die mit fünf Keimwurzeln von Vicia faba ausgeführten Experimente sind in den Belegen Abth. III, Versuch 28—32 tabellarisch zusammengestellt. Die erste Verticalreihe gibt Lage und Länge der markirten Zone zu Beginn des Versuchs an und zeigt, dass die gesammte normale Zuwachsstrecke controlirt wurde. In den folgenden Verticalreihen ist für jede Zone die Ablesung in Theilstrichen des Mikrometers (1 Strich = 0,045 mm) notirt, welche sich zu der am Kopf der Reihe notirten Zeit ergab. In der ersten Horizontalreihe ist zugleich die diesen Ablesungen entsprechende Länge in

1) Im Wasser quillt lufttrockene Gelatine so lange, bis eine circa 14proc. Gelatine vorliegt (Pfeffer, Unters. a. d. bot. Institut zu Tübingen, Bd. I, p. 489). Demgemäss wirkt unsere Gelatine nicht mehr wasserentziehend. Dieses wird auch dadurch erwiesen, dass das Einbetten in Gelatine bei Spirogyra crassa und bellis den zu eben merklicher Plasmolyse nothwendigen Salpeterwerth nicht beeinflusst.

…heil haben wir hier in Betracht … Dimensionsänderungen in den … für unsere Hauptfrage nicht … ung derselben kann auf später

…s ist am besten aus der gra… …hen, welche sich auf die Ver… …ährend der zu ganz gleichem



erst begann, nachdem sich die Wurzeln ungefähr ½ Stunde in der erstarrten Gelatine befanden.

Dann begann der Zuwachs, welcher mit ungefähr gleicher Schnelligkeit bis zum Schluss des Versuchs fortgesetzt wurde. Freilich ist für die letzten 13 bis 15 Stunden die Curve durch Verbindung der am Abend und der am nächsten Morgen vorgenommenen Messung construirt. Doch genügt der übrige Theil der Curve vollständig, um zu beweisen, dass das Wachsthum sogleich zu Beginn mit voller Schnelligkeit einsetzt und dann nur Schwankungen bietet, wie sie auch stets an den unter normalen Verhältnissen wachsenden Wurzeln gefunden werden. Auch wurde noch constatirt, dass am folgenden Morgen dieselbe Wachsthumsschnelligkeit fortdauerte, doch ist nur in der tabellarischen Zusammenstellung der Versuche 31 und 32 je eine dieser Messungen aufgenommen worden. Natürlich muss der stündliche Zuwachs geringer, die Curve also zu Beginn des Wachsthums weniger steil erscheinen, wenn das Wachsthum erst gegen Schluss des zeitlichen Ablesungsintervalles seinen Anfang nahm (vgl. z. B. Belege Versuch 30).

Aus der mittleren Wachsthumsschnelligkeit berechnet sich für 24 Stunden (vgl. die tabellarische Zusammenstellung der Versuche 28—31) ein Zuwachs von 13,3; 11,4; 11,6; 18,8 und 16,5 mm; also im Mittel 14,3 mm. Demgemäss ist eine gewisse Verlangsamung gegenüber denjenigen Versuchen in derselben Gelatine (Widerstand 25 g) erreicht, in welchen das Wachsthum nicht auf die äusserste Spitze eingeengt war, sondern sich in dem 10 bis 12 mm langen Spitzentheil in der üblichen Vertheilung und zwar ohne eine merkliche Verzögerung vollzog (p. 329). Eine solche Wachsthumsschnelligkeit von ungefähr 18 mm in 24 Stunden wird indess (bei annähernd derselben Temperatur) in einzelnen unserer Versuche (Nr. 28—31) annähernd erreicht und so ist möglicherweise die Wachsthumsverlangsamung in unseren Experimenten in Wirklichkeit geringer, als es nach dem Mittelwerth einer beschränkten Anzahl von Experimenten der Fall zu sein scheint[1]).

---

1) Für vergleichende Versuche fallen anderweitige Einflüsse des Mediums aus. Uebrigens war, wie schon p. 327 besprochen, die Sauerstoffversorgung offenbar genügend. Zur Sicherheit war die bei 32° C. verflüssigte Gelatine durch Schütteln mit Luft gesättigt worden.

Die Einengung des Wachsens auf den Spitzentheil wird aber ganz allein durch den mechanischen Widerstand erzeugt, welchen die durch das Einschmelzen der Wurzel adhärirende Gelatine bewirkt, da alle übrigen Verhältnisse dieselben bleiben, wenn die Wurzel in die schon erstarrte Gelatine eingeführt wird. Eine solche Wurzel gleitet bei mechanischem Zug leicht aus dem gebohrten Canal, während es einer sehr viel höheren Energie bedarf, um die eingeschmolzene Wurzel aus der Gelatine zu ziehen. Dabei pflegt die Gelatine der Wurzel zu adhäriren, das Zerreissen also in der Gelatinemasse einzutreten.

Dieses enge Anschmiegen und Ausfüllen aller Unebenheiten vermag also die subapicalen Wurzeltheile genugsam zu fixiren, während die glattere Spitze aus leicht begreiflichen Gründen, ohne eine höhere mechanische Intensität entwickeln zu müssen, sich leichter den Weg in die Gelatine bahnt. In dem so gebohrten Canal fehlt aber die höhere Adhäsion, der nicht adhärirende Spitzentheil der Wurzel wird also verlängert und Hand in Hand mit der Verlängerung der wachsthumsthätigen Strecke wird allmählich die normale Wachsthumsvertheilung wieder hergestellt.

Ein solches Verhalten folgt schon mit Nothwendigkeit aus den Erfahrungen an den gewaltsam in die erstarrte Gelatine eingesetzten Wurzeln. Von drei solchen Versuchen ist einer unter Nr. 33 der Belege mitgetheilt. Aus den 24stündigen Zuwachsen (letzte Verticalreihe) ist zu ersehen, dass die Gesammtverlängerung für den zu Beginn 1,46 mm langen Spitzentheil nur 0,39 mm beträgt, während sie sich für die anschliessende Zone 1,46—5,16 mm auf 13,29 mm stellt, d. h. den grössten Theil des 16,52 mm betragenden Gesammtzuwachses ausmacht. Diese Vertheilung entspricht der in Erde oder in Wasser wachsenden Wurzel von Faba, in welcher die 24stündige Messung für eine 2—4 mm von der Spitze entfernte Zone die grösste Zuwachsschnelligkeit ergibt[1]).

Die directe empirische Bestätigung bringt ausserdem Versuch 32 B (Belege). In diesem wurde der Spitzentheil vor dem Einschmelzen in Gelatine mit zahlreichen dichtstehenden Marken versehen, die

1) SACHS, Arbeiten des botan. Instituts in Würzburg 1873, Bd. I, p. 422; PFEFFER, Pflanzenphysiologie Bd. II, p. 77.

zur Messung der Wachsthumsvertheilung in dem Spitzentheil dienten, nachdem dieser zwischen 8½ *Mo* und 2½ *Na* von 0,45 mm auf 3,01 mm herangewachsen war[1]). Nach zwei Stunden waren die Marken des 1,39 mm langen äussersten Spitzentheils gar nicht auseinander gerückt, während sich inzwischen die Länge der ursprünglich zwischen 1,39 und 3,01 mm liegenden Strecke etwas mehr als verdoppelt hatte (von 36 auf 75 Theilstriche).

Wir begegnen also hier einer ausgezeichneten correlativen Wachsthumsverschiebung, durch welche erreicht wird, dass der Gesammtzuwachs nur mässig verringert wird, wenn auch der Zuwachs in der normal wachsthumsthätigsten Region mechanisch vollkommen gehemmt wird. Denn nun erfährt der sonst sehr langsam sich verlängernde äusserste Spitzentheil eine solche Beschleunigung, dass er den ausfallenden Zuwachs beinahe compensirt. Eine solche regulatorische Thätigkeit vermag schon der äusserste Spitzentheil allein zu vollbringen. Denn als (Versuch 32) der markirte Spitzentheil nur 0,45 mm lang war, erfuhr die unmittelbar anschliessende Zone keinen Zuwachs. Da aber von der Spitze der Haube ab gemessen wurde, die bei Faba 0,4 bis 0,8 mm lang ist, und in unserem Falle 0,55 mm lang war, so muss die compensirende Wachsthumsthätigkeit wesentlich von dem urmeristematischen Theile der Wurzelspitze übernommen worden sein und jedenfalls wird es wahrscheinlich, dass schon das Urmeristem allein in diesem Sinne einzutreten vermag[2]).

Sobald indess die Zwangslage aufhört, rückt die Zone lebhaf-

---

1) Durch die Reibung an der Gelatine kommt häufig ein Verwischen der auf einer fortgleitenden Strecke befindlichen Marken zuwege. Indem man gleichzeitig an verschiedenen Marken Messungen vornimmt, steigert man die Wahrscheinlichkeit des Gelingens eines Versuchs.

2) Eine ganz genaue Bestimmung ist so nicht möglich, da zunächst nur die Wurzelhaube, die etwa 1,7 mm weit vom Scheitelpunkt aus sich erstreckt, fixirt ist und ein gewisses Gleiten des Wurzelkörpers innerhalb dieser denkbar ist. Allerdings deutet die Gewebeanordnung in Schnitten, die bald nach Beginn des Wachsthums in Gelatine angefertigt wurden, auf solches Gleiten nicht hin. Zudem war in Versuch 32 die Haube sorgfältig so weit abgeschabt, dass sie nur noch 0,6 mm von der Spitze ab reichte und also auf ihr noch die erste, nicht aber die zweite Tuschmarke sass. Schon die zweite Zone (0,45—1,12 mm) ergab aber keinen Zuwachs, während anderseits der ansehnliche Gesammtzuwachs zeigt, dass die Wurzel durch besagten Eingriff nicht gelitten hatte.

tester Streckung vom Scheitel hinweg und dieser tritt nach den mitgetheilten Erfahrungen (Versuch 32 B) so schnell als thunlich in den üblichen Wachsthumszustand zurück, während zugleich die maximale Streckungsthätigkeit sich offenbar so lange basipetal verschiebt, bis dieselbe die übliche Lage erreicht hat.

Wie ansehnlich diese apicale Wachthumsbeschleunigung ist, mag daraus erhellen, dass z. B. in Versuch 32 der 0,45 mm lange Spitzentheil in 24 Stunden um 16,5 mm, also um das 36,3fache zuwuchs, während in normalen Verhältnissen der 1 mm lange Spitzentheil in 24 Stunden Zuwachse von 1 bis 1,8 mm ergab[1]).

Da in normalen Verhältnissen das Wachsthum auf eine grössere Strecke vertheilt ist, wird nirgends eine solche Wachsthumsschnelligkeit wie in dem künstlich beschleunigten Spitzentheil erreicht, denn in der Streckungszone normaler Wurzeln kommt es in 24 Stunden höchstens zu einer 4- bis 9fachen Verlängerung einer markirten Strecke (SACHS, l. c.).

Diese Beschleunigung führt zunächst allein die Wurzelspitze aus, da erst mit der Verlängerung der mechanisch nicht fixirten Region das Wachsthum auch andere Strecken in Mitleidenschaft zieht. Dieserhalb ist aber aus unseren Versuchen nicht zu entnehmen, ob etwa der äusserste Spitzentheil allein dauernd eine solche Beschleunigung aufrecht zu erhalten vermag, wenn fortwährend dafür gesorgt ist, dass nur ihm die Freiheit zum Wachsen gewährt wird. Die Befähigung zu solcher continuirlich gesteigerten Activität darf wohl als wahrscheinlich angesehen, kann aber nur empirisch festgestellt werden. Jedenfalls kann aber die Streckungszone weitgehend verschoben werden und so ist es kein Wunder, wenn dieselbe schon unter normalen Verhältnissen nicht immer genau dieselbe Lage einhält.

Wenn in Folge der Hemmung oder Unterdrückung eines Strebens eine correlative Thätigkeit erweckt wird, muss der Erfolg mehr oder weniger den Anschein erwecken, als ob das Quantum der disponiblen Energie nunmehr zur Arbeitsleistung an anderer Stelle oder in anderer Weise käme. So ist es wenn z. B. austreibende Reserveknospen Ersatz für die verlorenen Triebe liefern, oder wenn die Wachsthumshemmung der Wurzelspitze veranlasst, dass Seitenwurzeln

---

1) SACHS, l. c., p. 422 ff.

beschleunigt gebildet werden und dass zugleich, wo es angeht, die Wachsthumsthätigkeit Lücken in einer umhüllenden Form ausfüllt. Dieser Stempel wird in unserm Falle den Erscheinungen in erhöhtem Grade aufgedrückt, weil es sich einfach um Verlegung der Wachsthumsschnelligkeit in demselben Organe handelt.

Wird umgekehrt das Wachsthum der Wurzelspitze mechanisch gehemmt, so ist ein völlig gleicher Reactionserfolg ausgeschlossen, weil die subapicalen Theile allmählich in Dauergewebe übergehen, unter diesen Umständen also ein Längenwachsthum der Wurzel nur bis zu einem gewissen Grade möglich ist. Dafür wird jetzt durch die aus localen Productionsherden entspringenden Nebenwurzeln für einen passenden Ersatz der in der Fortbildung gehemmten Hauptwurzel gesorgt.

Der Anstoss für solchen Ersatz ist nur in der Hemmung der angestrebten Bildungsthätigkeit gegeben. Denn die beschleunigte Production von Nebenwurzeln wird ebensowohl durch Eingipsen als durch Abschneiden der Wurzelspitze veranlasst und die Gelatine wirkt in den soeben besprochenen Versuchen auch nur durch die mechanische Hemmung, denn ohne solche (so nicht bei dem Einstossen in die erstarrte Gelatine) kommt das beschleunigte Wachsthum der Wurzelspitze nicht zu Stande.

Nach den früher gewonnenen Erfahrungen wird im ganzen Spitzentheil der in Gelatine eingeschmolzenen Wurzel in Folge des mechanischen Widerstandes die auf Aussenleistung hinarbeitende Thätigkeit sogleich beginnen und so lange fortschreiten, bis der Druck zum Fortschieben der Spitze, also zum Durchbrechen der Gelatine, ausreicht. Da hierzu ein Druck von 25 bis 30 g genügt (p. 326), so würde bei einer Druckzunahme von 10 g in der Stunde (vgl. Kap. IV) in 2½ bis 3 Stunden die nöthige Energie erreicht sein und günstigen Falles kam in unseren Versuchen nach dieser Zeit das Fortwachsen der Spitze zu Stande. Die Realisirung dieses Wachsens wird vermuthlich die subapicalen Theile der Wurzel derart beeinflussen, dass in ihnen die Aussenleistung nicht oder doch nicht in solchem Maasse zunimmt, wie es bei einer allseitig unverrückbaren Widerlage der Fall sein würde. Dafür spricht die Fixirung der subapicalen Partie der Wurzel, welche bei weiterer Zunahme der Aussenenergie zweifellos die Gelatine durchbrechen würde, deren Widerstand, gegenüber der maximalen Druckleistung, doch immerhin nur gering

ist. Zudem geht diese Partie mit dem Fortwachsen des Spitzentheils bald in Dauergewebe über und mit dem Wachsthum in die Länge endet auch die Druckzunahme in der Längsrichtung. Uebrigens kann bei der allseitigen Correlation ein derartiges Verhalten nicht überraschen. Auch ist bereits früher (p. 302) mitgetheilt, dass die Turgorregulation in der Wurzel von Faba sich von den wachsenden auf die nicht mehr wachsenden Strecken ausbreitet.

Mag nun auch die Aussenenergie in allen wachsenden Wurzelpartien zuerst gleichmässig zunehmen und der erste Durchbruch und Wachsthumsbeginn der Spitze durch den an diesem Punkte relativ geringsten Widerstand bedingt sein, jedenfalls ist doch in der nun folgenden Wachsthumsbeschleunigung der Wurzelspitze eine besondere Reizreaction ausgesprochen. Diese ist als ein Correlationserfolg in den inneren Wechselbeziehungen begründet, durch welche, in Folge des realisirten localen Wachsthums, die Thätigkeiten in Bahnen gelenkt werden, die zu einer Wachsthumsbeschleunigung in analogem Sinne führen, wie in anderen Fällen Wachsthumshemmungen correlative Beschleunigung gewisser Thätigkeiten veranlassen. Und es ist wieder eine Folge dieser inneren Verkettungen, dass die Wachsthumsbeschleunigung in der Spitze aufhört, sobald eine subapicale Streckungszone sich ausbilden kann. Es ist dabei nicht zu vergessen, dass das Wachsen die Resultante einer complexen Thätigkeit ist, also keineswegs allein von Turgorhöhe oder Turgorschwellung abhängt, welche letztere ohnehin wohl bei Faba, jedoch nicht in anderen Pflanzen eintritt, die sicherlich in analogem Sinne reagiren.

Die biologische Zweckmässigkeit einer solchen Reactionsfähigkeit ist übrigens einleuchtend. Denn wenn z. B. eine Wurzel in einem engen Steinloch festgehalten wird, so wird sie durch beschleunigtes Spitzenwachsthum in ähnlicher Weise ins Freie gelangen, wie eine Wurzel, die bis auf den äussersten Spitzentheil in Gips fixirt ist. Und wenn in einem widerstandsfähigen Boden ähnliche Bedingungen wie in der Gelatine geschaffen werden, so ist in der Wachsthumsbeschleunigung der Spitze das Mittel geboten, um mit möglichst geringem Energieaufwand den Weg sich zu bahnen.

In Thon werden unter Umständen ähnliche Verhältnisse geboten sein wie in der Gelatine, und falls sich in dem Zuwachs immer wieder die genügende Adhäsion herstellt, wird die Wachsthumsthätigkeit

nicht nur vorübergehend, wie bei unserer Gelatine, sondern dauernd auf den Spitzentheil eingeengt bleiben. Wie weit solche Verhältnisse in unseren Experimenten mit plastischem Thon eintraten, habe ich nicht näher geprüft, doch dürfte, nach beiläufigen Beobachtungen, nicht allein die äusserste Spitze, vielmehr eine grössere Strecke, den Zuwachs vermittelt haben. Für die Beurtheilung der Arbeitsleistung sind diese Fragen deshalb von Interesse, weil für einen gegebenen Zuwachs mit der Verkürzung der wachsenden Strecke die Wachsthumsschnelligkeit und also auch die auf die Längeneinheit bezogene Aussenarbeit zunimmt. Ein näheres Eingehen auf diesen Punkt darf indess an dieser Stelle unterbleiben, da von einer näheren Präcision der Arbeitsgrösse unsere allgemeinen Schlussfolgerungen nicht berührt werden.

Während des correlativen Wachsthums der Wurzelspitze nimmt die gesammte subapicale Strecke (bis 13 mm) in unseren Versuchen während 24 Stunden nur um 0,2 bis 1,4 mm an Länge zu (vgl. die Belege Abth. III, Nr. 28—32). Diese verhältnissmässig geringen und für die Wachsthumsbeschleunigung in der Wurzelspitze bedeutungslosen Dimensionsänderungen durften wir um so mehr vernachlässigen, als sie ganz unterbleiben würden, wenn die Gelatine ein genügend starrer Körper wäre. Factisch ist aber die Gelatine in gewissen Grenzen elastisch und beim Ziehen an der Keimpflanze kann man leicht sehen, wie die Wurzel, mitsammt der adhärirenden Gelatine, gewisse elastische Nachgiebigkeit bietet. In Folge dessen muss auch die in der Wurzel entwickelte Zug- und Druckwirkung eine gewisse Verschiebung erzielen. Wenn z. B. eine einige Millimeter hinter der Spitze gelegene Zone eine relativ höhere Aussenenergie entwickelt, so muss eine Verlängerung derselben erfolgen, bis die Elasticität der mit ihr verketteten Gelatine, sowie die Gegenwirkung der beiderseits angrenzenden (mit Gelatine umhüllten) Wurzelpartien den Gleichgewichtszustand herstellen.

In dieser Weise sind auch die thatsächlich gefundenen Verlängerungen der subapicalen Zonen zu erklären, die öfters, jedoch aus naheliegenden Gründen nicht immer, von einer gewissen Verkürzung in anderen Zonen begleitet sind (vgl. die Tabellen), während die Wurzel in festem Verbande mit der angeschmolzenen Gelatine blieb.

Mit der Entwicklung von Aussenenergie in den subapicalen Theilen muss es in denselben, der elastischen Nachgiebigkeit der Gelatine halber, stets zu einer gewissen Verlängerung kommen. Und diese wird nicht überall dieselbe sein, wenn für die verschiedenen Zonen das Product aus Intensität des Druckes und wirksamem Querschnitt einen verschiedenen Werth hat (vgl. p. 319). Umgekehrt würde also auf Differenzen dieses Werthes aus der ungleichen Längenzunahme geschlossen werden können, wenn allen in Betracht kommenden Factoren Rechnung getragen wird. Dieses ist indess in meinen zu anderen Zwecken angestellten Versuchen nicht geschehen und so unterlasse ich auch ein Eingehen auf diese und die sich anschliessenden Fragen.

C. Wachsthum nach längerem Eingipsen.

In früheren Kapiteln wurde gezeigt, dass gegenüber einer starren Widerlage durch Entspannen der Haut, eventuell unter gleichzeitiger Turgorschwellung, der Aussendruck allmählich bis zu einem endlichen Grenzwerthe ansteigt. Mit Erreichung des stationären Zustandes hört das Flächenwachsthum der Zellhaut auf und die Wurzel befindet sich nunmehr in einer anderen Lage, als eine unter Arbeitsleistung dauernd, wenn auch verlangsamt fortwachsende Wurzel. Demgemäss kann nur empirisch entschieden werden, wie sich nach späterer Entfernung der starren Widerlage die Wachsthumsthätigkeit gestaltet.

Zunächst verlängert sich die Wurzel nach dem Befreien aus dem Gipsverband so lange, bis die Hautspannung der Turgorkraft äquivalent ist (p. 311). Darauf wird das zwangsweise unterbrochene Wachsthum wieder aufgenommen und somit die wichtige Thatsache festgestellt, dass die Gewebe der Wurzelspitze in wachsthums- und bildungsfähigem Zustand verharrten. Dieser war noch vollständig conservirt, nachdem die Wurzeln von Faba, resp. Mais 28, resp. 25 Tage im Gipsverband zugebracht hatten[1]).

Diese Erhaltung der Wachsthumsfähigkeit erstreckt sich allerdings nur auf das Urmeristem und das zunächst angrenzende Ge-

1) Auch hier kommt in Frage, in wie weit correlative Wirkungen eine Verlängerung oder Verkürzung der Lebensdauer veranlassen.

webe (vgl. Kap. VII), so dass in entgipsten Wurzeln eine kürzere Strecke das Längenwachsthum aufnimmt, als in den normal in Erde oder Wasser gehaltenen Wurzeln. Letztere ergaben bei Faba für die wachsthsumfähige Zone eine Länge von 10—13 mm, während diese Zone nach 2—3tägigem Eingipsen auf 5—6 mm, nach 25 Tagen auf 3 mm zurückgegangen war. Analog war nach 2—3tägigem Eingipsen die Zuwachszone annähernd auf die halbe normale Länge reducirt bei den Keimwurzeln von Mais (normale Länge 6—7 mm), Pisum sativum (normal 7—9 mm) und Vicia sativa (normal 7—8 mm) und es ist anzunehmen, dass bei verlängertem Eingipsen die Verkürzung ebenfalls etwas ansehnlicher ausfallen wird[1]).

Diese Verkürzung der wachsthumsfähigen Strecke beruht auf der acropetal, jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze fortschreitenden Ausbildung von Dauergewebe. Naturgemäss wird mit der Zuwachsthätigkeit in der freien Wurzel die normale Länge der Zuwachszone bald wieder hergestellt. Uebrigens ist — was hier nicht weiter behandelt zu werden braucht — an freien Wurzeln die Länge der Zuwachszone individuell und nach äusseren Verhältnissen in gewissen engeren Grenzen veränderlich[2]) und wir haben schon gehört (p. 342), wie durch mechanische Hemmung die Zuwachsthätigkeit auf eine sehr kurze Strecke eingeengt werden kann.

In der wachsthumfähigen Strecke wird das Längenwachsthum offenbar sogleich wieder aufgenommen, nachdem die Wurzeln entgipst sind und der normale Turgescenzzustand wieder hergestellt ist. Denn an die Wiederherstellung der normalen Hautspannung muss unmittelbar das Wachsthum anschliessen, da die mikrometrische Messung zu keiner Zeit einen Stillstand in der Verlängerung zu erkennen vermag. Doch fällt nach Versuchen mit Keimwurzeln von Vicia faba der Gesammtzuwachs der ersten 24 Stunden geringer aus, als der der folgenden 24 Stunden, in welchen die normale Wachs-

1) In allen Fällen wurden die aus dem Gips befreiten Wurzeln ½ Stunde in Wasser gebracht, darauf mit Tuschmarken von 1 mm Abstand versehen und in feuchten Sägespänen cultivirt. Die Messung geschah direct mit Maassstab, was für unseren Zweck ausreichend war.

2) Nach Sachs (Arbeit. d. bot. Instituts in Würzburg 1873, Bd. I p. 418) ist bei Faba die Länge der Zuwachszone in feuchter Luft etwas geringer als in Wasser oder Erde. Nach Askenasy (Berichte d. bot. Gesellschaft 1890, p. 82) wird in der Wurzel von Mais die Zuwachszone in niedriger Temperatur etwas verlängert.

thumsthätigkeit wieder erreicht war. Aus der tabellarischen Zusammenstellung (Belege Abth. IV, Versuch 34 B) ist zu ersehen, dass nach 48stündigem Eingipsen der Zuwachs in den ersten 24 Stunden im Mittel für eine Wurzel 11,2 mm, in den folgenden 24 Stunden aber 23,2 mm betrug. Aehnliche Werthe, nämlich 23,9 und 22,3 mm (Versuch 34 A) ergaben die nach einstündigem Eingipsen befreiten und nun bei gleicher Temperatur in Sägespänen gehaltenen Wurzeln, und ebenso Wurzeln, die ohne die Operation des Eingipsens in sonst gleicher Weise behandelt worden waren.

Nach den eben mitgetheilten Erfahrungen wird die Wachsthumshemmung nicht etwa durch die mit dem Eingipsen und Entgipsen verknüpften Eingriffe herbeigeführt, sondern hängt mit der Reaction gegen die mechanische Widerlage zusammen. Diese Reaction ist aber ein verwickelter Vorgang und so lässt sich nicht ohne weiteres sagen, welche näheren Factoren für den Erfolg entscheidend waren. Auf die Verkürzung der wachsthumsfähigen Strecke kann aber nicht wohl allein der Effect geschoben werden, da bei einer viel weitergehenden Einengung die Zuwachseinbusse geringer ausfiel (p. 344). Ein mit in Betracht zu ziehenden Factor ist ferner die früher (p. 309) besprochene Veränderung der Elasticitätsverhältnisse der Zellhäute, die indess sicherlich nicht allein entscheidend ist. Hier können und müssen wir uns mit den Thatsachen begnügen, zu denen auch die Hand in Hand mit dem realisirten Zustand erstrebte und erreichte Rückregulation auf die normale Wachsthumsvertheilung zählt. Demselben Streben begegneten wir übrigens schon in den Versuchen, in welchen die Wachsthumsthätigkeit durch mechanische Mittel auf die Wurzelspitze eingeengt war und ebenso ist schon früher der Rückregulation der in der Wurzel von Faba gesteigerten Turgorkraft gedacht worden.

Die nach 24 Stunden vorgenommene Messung lässt natürlich den näheren Gang der Zuwachscurve unbestimmt und wenn wahrscheinlich zu Ende der Versuchszeit die mittlere Wachsthumsschnelligkeit überschritten wurde, so ist doch nicht ausgeschlossen, dass zuerst eine gewisse Beschleunigung stattfand. Insbesondere muss es möglich erscheinen, dass die gewaltige Steigerung der Turgorkraft, wie sie u. a. die Wurzel von Faba im Gipsverband erfährt, in der isolirten Wurzel eine gewisse plastische Verlängerung der Zellwände

erzielt. Einige mehr beiläufige Versuche führten zu keinem ganz entscheidenden Resultate. Denn es ist eben schwer zu sagen, wann in der befreiten Wurzel die einfache elastische Dehnung aufhört[1]) und wann wirkliches Wachsen beginnt. Letzteres wird allerdings durch Einbringen in Wasser von 0,5° C. in normalen Wurzeln ganz unmerklich[2]), während die 48 Stunden lang eingegipsten Wurzeln noch nach ½ und selbst 1 Stunde fortfahren sich etwas zu verlängern um dann bald stationär zu werden. Aber diese gesammte Verlängerung ist so gering — sie betrug nach mikrometrischen Bestimmungen höchstens 0,2 mm — dass sie sehr wohl aus einer gewissen, nur allmählichen Ausgleichung in dem zuvor in einer Zwangslage gehaltenen Gewebeverband entspringen kann. Demnach ist die in der Wurzel von Faba sehr gesteigerte Turgorkraft nicht oder doch nicht in nennenswerther Weise im Stande, ein Wachsthum durch plastische Dehnung der Zellwände zu erzielen und biologisch ist es bedeutungsvoll, dass die Wurzel nach der Isolation nicht urplötzlich durch die hohe Turgorenergie im Uebermaass verlängert wird. Mit Rücksicht auf die Wachsthumsmechanik würde übrigens aus einer plastischen Verlängerung nur folgen, dass, wie es bekannt ist, eine genügend gesteigerte mechanische Energie die Zellwandungen über die Elasticitätsgrenze hinaus zu dehnen vermag.

VII. Anderweitige Reactionserfolge in der Wurzel.

Durch einen äusseren Widerstand wird die Pflanze nicht allein zu Druck- und Arbeitsleistungen veranlasst, vielmehr spielen sich theils im Verband mit diesen, theils unabhängig von diesen mannigfache Reactionen ab, welche wir nur deshalb nicht näher zu verfolgen haben, weil sich unsere Aufgabe auf die Aufhellung der mechanischen Aussenleistungen beschränkt. Im Verfolg dieser Auf-

1) Ueber elastische Nachwirkung vgl. u. a. Pfeffer, Physiolog. Bd. II, p. 13.

2) Wurden die Wurzeln nach einem 12stündigen Aufenthalt in Wasser von 0,5° in ein wärmeres Medium gebracht, so wuchsen sie zunächst fast gar nicht und begannen erst allmählich sich wieder zu erholen. Aehnliches wurde auch schon an Maiswurzeln von Askenasy (Berichte d. bot. Gesellschaft 1890, p. 85) beobachtet.

gabe wurden indess eine Anzahl von Erfahrungen gewonnen, auf die hier in Kürze aufmerksam gemacht werden soll. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass diese hier nebenbei behandelten Erfolge für das Gesammtgetriebe der Pflanze minder wichtig sind und es ist klar, dass das was hier nebensächlich erscheint, bei anderer Fragestellung in den Vordergrund treten wird.

Für das Wesen der Aussenleistung ist z. B. die beschleunigte Production von Nebenwurzeln, sowie die Verkürzung der Wachsthumszone nicht von principieller Bedeutung, und ebenso bedarf es keiner weiteren Discussion, in wie weit vermöge des plastischen Wachsens verschieden geformte Gebilde zu erzielen sind (vgl. p. 267). Auch ist es nicht nöthig, die anatomischen Differenzen näher zu verfolgen, die sich in Folge mechanischer Hemmung einstellen, da es für das Wesen der Sache einerlei ist, ob die Zelle etwas kleiner oder grösser, die Zellhaut dicker oder dünner ausfällt. Denn entscheidend für den Erfolg ist die Wachsthumsfähigkeit, welche durch die Gestalt der Zelle allein nicht verrathen wird und so wenig wie das Wachsen der Zellhaut vermögen wir auch diejenigen Processe in die Kette der maassgebenden unmittelbaren und vorausgegangenen Thätigkeiten aufzulösen, welche durch Production geeigneter Stoffe für die Regulation des Turgors zu sorgen haben.

Uebrigens ist nicht zu vergessen, dass in Folge der allgemeinen und nothwendigen Wechselwirkungen eine mechanische Hemmung nicht nur das unmittelbar betroffene Organ, sondern vermöge correlativer Beziehungen auch die Thätigkeit anderer Organe mannigfach in Mitleidenschaft zieht (vgl. p. 346).

Im starren Gipsverbande rückt, wie schon erwähnt, die Ausbildung von Dauergewebe allmählich acropetal vor und Zellen gehen dabei ohne Verlängerung in den Dauerzustand über, welche ohne diese mechanische Hemmung auf die doppelte Länge herangewachsen wären. Das Urmeristem aber und das diesem zunächst sich anschliessende Gewebe bewahrt die Wachthumsfähigkeit, so dass beim Befreien durch den stark verkürzten wachsthumsfähigen Spitzentheil die Weiterverlängerung der Wurzel und damit die Wiederherstellung der normalen Wachsthumsvertheilung erreicht wird (vgl. p. 352).

Ein analoges Verhalten, das auch für die Sprosse von Keimpflanzen constatirt wurde (Kap. IX), dürfte wohl allgemein da zu-

treffen, wo eine Scheidung in Dauergewebe und Bildungsgewebe eintritt, und nach unseren Erfahrungen ist wahrscheinlich, dass alle diejenigen Zellen endlich in den Dauerzustand übergehen, welche sich bis zu einem gewissen Grade von dem embryonalen Gewebezustand entfernten. Dem entsprechend dürfte z. B. in einem begrenzt wachsenden Blatte alle Wachsthumsfähigkeit erlöschen, wenn das Eingipsen in einem geeigneten Entwicklungsstadium vorgenommen wird, während sich in Spirogyra nach zweimonatlichem Eingipsen die gleichwerthigen Zellen des Fadens sämmtlich wachsthumsfähig erwiesen. Dem Gesagten entsprechend wurde auch das Dickenwachsthum der Wurzeln nach dreiwöchentlichem Eingipsen wieder aufgenommen und sicherlich bewahrt auch der Cambiumring seine Bildungsfähigkeit, wenn das Dickenwachsthum eines Baumes mechanisch gehemmt wird[1]).

Uebrigens wird der embryonale Zustand auch dann conservirt, wenn die Wachsthumsthätigkeit durch niedere Temperatur, durch Austrocknen (wo solches zulässig) etc. oder auch durch autonome Ruheperioden sistirt wird. Diese wichtige und nothwendige Eigenschaft findet natürlich eine zeitliche Grenze durch das endliche Absterben, welches sowohl bei niederer Temperatur als auch im trocknen Samen und schliesslich auch im Gipsverband eintritt. In diesem erwiesen sich Wurzeln von Faba noch nach fünf Wochen vollständig lebendig und wachsthumsfähig, während nach zehn Wochen das Absterben der Wurzelspitze begonnen hatte.

Gleichzeitig mit der Ausbildung von Dauergewebe rückt die Bildung von Nebenwurzeln acropetal vor, so dass diese in der Wurzel von Faba schliesslich nur 4 mm von der Wurzelspitze entfernt sind, während sie bei normalem Wachsthum in Erde einen Abstand von ungefähr 50 bis 70 mm einzuhalten pflegen. Dieses Vorrücken vollzieht sich ziemlich schnell, denn schon nach zweitägigem Eingipsen waren Wurzelanlagen 6 mm von der Spitze entfernt zu finden und nach 6 Tagen war die höchste mögliche Annäherung erreicht.

---

1) So fand Krabbe (Wachsthum des Verdickungringes 1884, p. 58) Cambiumzellen noch lebend, die während längerer Zeit ein nur geringes Dickenwachsthum, gegenüber dem hemmenden mechanischen Widerstand, ausführen konnten.

Ganz analoge Resultate ergaben die Wurzeln von Zea mais, Pisum sativum, Vicia sativa, Phaseolus multiflorus, Helianthus annuus und ich halte es deshalb nicht für nöthig, die Zahlenwerthe mitzutheilen, welche übrigens für den Abstand von Wurzelspitze und nächster Wurzelanlage zwischen 3—6 mm sich bewegen.

In dem starren Gipsverband ist natürlich ein Weiterwachsen der Wurzelanlagen unmöglich, welche aber durch Compression des bedeckenden Rindenparenchyms erzielen, dass an den befreiten Wurzeln entsprechende Hervorwölbungen erscheinen, aus denen die sich nun fort entwickelnden Wurzeln bald hervorbrechen. Bei Anwendung eines weichen Gipses kommt ein Hervorbrechen schon innerhalb des Verbandes vor, indem sich die Wurzeln etwas in den Gips einbohren oder auch zuweilen zwischen Gipshülle und Wurzelkörper sich einen Weg bahnen.

In Folge der dauernden Verlängerung und der nachrückenden Nebenwurzelbildung ist an freien Wurzeln nach einiger Zeit eine längere Strecke mit Nebenwurzeln versehen, als an den eingegipsten oder an solchen Wurzeln, deren Spitze decapitirt, oder durch alleiniges Umhüllen mit Gips an der Fortbildung verhindert war. Doch wird durch alle diese Wachsthumshemmungen die Nebenwurzelbildung beschleunigt, wie man am besten sieht, wenn man ungefähr 20 mm lange Keimwurzeln von Vicia faba zu vergleichenden Versuchen verwendet. Nach 36 Stunden findet man dann in den inzwischen auf etwa 50 mm herangewachsenen freien Wurzeln keine oder doch nur am basalen Theile Nebenwurzelanlagen, während sich solche in Folge der Wachsthumshemmung auf einer Strecke von etwa 12 mm, also bis etwa 8 mm von der Spitze einstellten.

Analog wie nach dem Decapitiren wird auch durch Umhüllung eines 10 mm langen Spitzentheils der Wurzel von Faba mit Gips eine kräftigere Ausbildung der heranwachsenden Nebenwurzeln und ein verstärkter Geotropismus dieser veranlasst[1]. Ebenso wird durch Wegschneiden des Epicotyls, sowie durch Umgipsen dieses, das Hervortreiben von Sprossen aus dem Winkel der Cotyledonen verursacht. Demgemäss wirkt das Decapitiren zunächst durch die mit der Entfernung der Sprossspitze herbeigeführte Hemmung oder Sistirung

1) Vgl. PFEFFER, Physiologie Bd. II, p. 338.

des Wachsens[1]). Daneben mag aber immerhin begünstigend ein traumatischer Reiz mitwirken, welcher auch die Veranlassung der auf die Vernarbung berechneten Thätigkeiten ist.

Durch die mechanische Hemmung ist den einzelnen Zellen die Möglichkeit geraubt sich zu vergrössern und in Zellen, die normalerweise noch gewachsen wären, muss sich eine fernere Fortbildung und Umbildung bei Constanz des äusseren Umfangs vollziehen[2]). Unter diesen abnormen Verhältnissen hat sich also das Vorrücken des Dauergewebes gegen den Spitzentheil der Wurzel abzuspielen. Die Hemmung des Dickenwachsthums aber bringt es mit sich, dass die Constituirung des Cambiumringes, und Hand in Hand damit das Absterben der Aussenrinde unterbleiben. Durch die Zwangshemmung wird also die so angestrebte Productionsthätigkeit unterdrückt und potentielle Fähigkeiten schlummern, bis sie mit Wegräumen des Hemmnisses in Action zu treten vermögen. So kann, ähnlich wie durch andere Ruhezeiten, auch das Leben von solchen Zellen verlängert werden, die bei normaler Fortentwicklung ein baldiges Absterben erfahren hätten.

Die Zellen des Urmeristems der Wurzel bleiben im Gipsverband dauernd in formeller Hinsicht unverändert, während sich in den anschliessenden Partien anatomische Differenzen einstellen. So rücken, mit der Ausbildung von Dauergewebe, auch die Gefässbündel bis nahe an die Spitze vor und nach der zwangsweisen Hemmung werden endlich 1 bis 2 mm von der Spitze entfernt ausgebildete Gefässe gefunden, die normalerweise erst in gleicher Ausbildung 20 bis 40 mm hinter der Spitze auftreten.

Dazu kommt, dass in der Region, welche durch die Gipsumhüllung an dem angestrebten Längenwachsthum verhindert wurde, die fusionirenden Gefässzellen, sowie auch die Zellen von Rinde und

---

1) Auch Duhamel (Naturgeschichte d. Bäume 1764, Bd. I, p. 106) beobachtete schon, dass es einen ähnlichen Effect wie das Decapitiren hatte, wenn das Fortwachsen der Wurzelspitze durch zufälliges Einklemmen zwischen Steine gehemmt war.

2) Ich gehe hier nicht auf die anatomischen Abweichungen ein, welche die durch plastisches Wachsen erzielten abnormen Gestaltungen begleiten. — Auch soll in Folgendem nur ein Hinweis auf die zunächst in die Augen fallenden anatomischen Verhältnisse gegeben werden. Weitere Studien über die in mancher Hinsicht interessante Frage: welchen Einfluss hat mechanische Hemmung auf die Gewebebildung u. s. w.? sind bereits im hiesigen botanischen Institut im Gange.

Füllgewebe kürzer sind, als in äquidistanten Zonen normal wachsender Wurzeln. Ein solcher Unterschied besteht noch nicht in der Nähe des Urmeristems, wo die Zellen mehr oder weniger quadratisch sind, wird aber bei basipetalem Fortschreiten mehr und mehr bemerklich, erreicht ungefähr in der Zone schnellster Streckung sein Maximum, um mit der Streckungszone wieder aufzuhören. Ausserdem sind im Gipsverband, wie als Folge der mechanischen Hemmung leicht verständlich ist, die Intercellularen etwas enger, ohne indess zu fehlen.

Da die Zellen der Streckungszone wesentlich kürzere Maasse aufweisen, als sie zur Zeit des Eingipsens in demselben Gewebe besassen, so ist erwiesen, dass nach dem Eingipsen die Zelltheilung in den am Wachsen verhinderten Zellen fortschritt. Demgemäss kann die Theilung noch in Zellen eintreten, deren Längendimension unter das normal vorkommende Maass gesunken ist, d. h. die Zellen müssen nicht, damit eine Theilung eintritt, bis auf diejenige Grösse heranwachsen, die sie in normalen Wurzeln erreichen. Doch wird auch in den eingegipsten Wurzeln die Länge der Zellen nur auf eine gewisse, für ein jedes Gewebe specifische Grösse reducirt und damit im Zusammenhang steht, dass die Zellen des Urmeristems und ebenso die anschliessenden noch wenig gestreckten Zellen in freien und eingegipsten Wurzeln dieselbe Grösse besitzen. Uebereinstimmend fand auch KRABBE[1]), dass, als in Bäumen der Dickenzuwachs durch mechanischen Widerstand sehr weitgehend reducirt war, die Cambiumzellen ihre Form bewahrten, während die unter diesen Umständen producirten Folgezellen in radialer Richtung verkürzt waren. Uebrigens sind Abweichungen von dieser Regel zu erwarten und ich will z. B. beiläufig erwähnen, dass in einer eingegipsten Spirogyra die Zellen durch Theilung unter die normale Minimalgrösse gebracht wurden, obgleich sie im Gipse ihre Wachsthumsfähigkeit, also ihren embryonalen Charakter bewahrten.

Nach dieser Orientirung mögen etwas näher die anatomischen Differenzen geschildert werden, die endlich, d. h. nach 15- bis 27tägigem Eingipsen in einer Keimwurzel von Vicia faba erreicht wurden. In einer solchen waren ausgebildete Tüpfel- und Spiralgefässe nur 1,1 mm von dem Scheitelpunkt des Wurzelkörpers entfernt (der von

1) Wachsthum des Verdickungsringes 1884, p. 58.

einer 0,6 mm mächtigen Wurzelhaube bedeckt war), während in normalen Wurzeln diese Gefässe erst 25 bis 35 mm von der Spitze entfernt eine gleiche Ausbildung erreichen. Zwischen dieser definitiven Verdickung und Verholzung und dem Entwicklungsbeginn, der 6 bis 8 mm hinter der Spitze liegt, ist also in normalen Verhältnissen eine ansehnliche Wegstrecke eingeschaltet, während diese minimal in den eingegipsten Wurzeln ist, in welchen die endgiltig ausgebildeten Gefässe und Gefässbündel fast unvermittelt abbrechen, jedoch mit ihrem apicalen Theile in die wachsthumsfähig bleibende Zone ragen.

Die fusionirten Zellen der Gefässe sind am Spitzentheil des Bündels etwa 1½ mal so breit als lang (Länge 0,02—0,04 mm) und nehmen 9—10 mm rückwärts von der Wurzelspitze (d. h. in der beim Eingipsen nahezu ausgewachsenen Strecke) die übliche Länge an, in welcher eine Gliedzelle 0,3—0,6 mm lang ist. Grösse und Distanz der Tüpfel bietet keinen auffälligen Unterschied, ebenso sind die Spiralverdickungen in den eingegipsten Wurzeln nur unbedeutend flacher gewunden, was daher kommt, dass die Ausbildung dieser Verdickung erst in einer Region erfolgt, welche den grössten Theil ihrer Streckung bereits durchgemacht hat.

Die Zellen des Rindenparenchyms besitzen normalerweise 4—5mm von der Wurzelspitze entfernt noch quadratische Form, werden von da ab längsgestreckt und sind gegen das Ende der Streckungszone und im ausgewachsenen Theil etwa 2½ mal so lang als breit geworden. In dem ausgewachsenen Theile findet man diese Form auch nach dem Eingipsen, während in der beim Eingipsen noch streckungsthätigen Partie die Zellen kürzer werden und schon 6—8 mm von der Wurzelspitze entfernt quadratische Form annehmen. Aehnliche Relationen bieten die übrigens absolut längeren Füllzellen des Centralcylinders. Beiläufig sei noch bemerkt, dass in den eingegipsten Wurzeln die Zellen der Endodermis vielfach eine tangentiale Theilung erfahren hatten.

Nach kürzerem Eingipsen ist natürlich die Differenz noch nicht zu dem eben geschilderten Extrem fortgeschritten. Nach dreitägigem Aufenthalt in Gips waren übrigens schon 3 mm vom Vegetationspunkt entfernt Tüpfelgefässe zu erkennen, die ihre volle Wandverdickung freilich erst 7 mm weiter rückwärts erreichten.

Aehnliche Verhältnisse wurden für die Keimwurzeln von Zea mais und Pisum sativum gefunden. Ich beschränke mich deshalb auf die Bemerkung, dass bei Mais nach 11tägigem Eingipsen die Gefässe bis auf 0,4 mm gegen den Scheitelpunkt vorgerückt waren, während sie normalerweise erst 30—40 mm von diesem entfernt die gleiche Ausbildung erreichen. Auch im Stengel der Keimpflanzen wurden in principieller Hinsicht ähnliche Veränderungen durch das Eingipsen erzielt, deren nähere Schilderung ich aber an dieser Stelle unterlassen will.

Nach dem Aufenthalt im Gipsverband bietet also ein Querschnitt einige Millimeter hinter der Wurzelspitze im wesentlichen den Bau, welcher in normalen Wurzeln erst 30 bis 50 mm weiter rückwärts erreicht wird und diese Ähnlichkeit erstreckt sich auch darauf, dass in beiden Schnitten gleichartige Elementarorgane dieselbe Ausbildung der Zellwand besitzen[1]). Zur Erreichung dieses Zieles genügt die acropetale Verschiebung der Gewebedifferenzirung und auf auffällige anderweitige Effecte durch die mechanische Hemmung ist in diesem Falle in Bezug auf die Ausbildung der Zellwände nicht zu schliessen. Diese Erfahrung darf jedoch nicht generalisirt werden, da es sehr wohl möglich ist, dass andere Objecte ein abweichendes Resultat ergeben. Denn so gut wie ein gesteigerter Zug eine Verdickung gewisser Elemente zu veranlassen vermag, ist es auch möglich, dass die nachlassende Gewebespannung oder der gesteigerte Druck die Veranlassung für Ausbildung dünnerer oder dickerer Wände werden.

---

1) Auch Krabbe (Wachsthum d. Verdickungsringes 1884, p. 58) fand in den gegen hohen Druck ausgebildeten Wandungen der Holzzellen in Bäumen keine veränderte Wanddicke. Dagegen berichtet Wortmann (Bot. Zeitung 1879, p. 286) von Verdickungen, die sich in verschiedenen Pflanzen einstellten, als der Stengel durch Umwickeln mit Bindfaden am Wachsthum gehemmt war. Ob es sich hierbei nur um ein acropetales Vorrücken der Gewebedifferenzirung handelt, ist aus Wortmann's Mittheilungen nicht zu ersehen. Geringe Dickendifferenzen sind natürlich in meinen Beobachtungen nicht ausgeschlossen und dieses gilt auch hinsichtlich des Urmeristems, das möglicherweise in Ruhezuständen zuweilen etwas stärkere Wandungen bekommen mag. Ueber das Cambium vgl. Krüger, Bot. Zeitung 1892, p. 706.

VIII. Ausblick auf die mechanische Action der Wurzel in der Natur.

Die Kenntniss der Fähigkeiten und Thätigkeiten bildet die Grundlage für das Verständniss der Wirkungsweise der Wurzeln, doch konnte in den bisherigen, auf die causale Aufhellung dieser Fundamente gerichteten Studien nicht im Zusammenhang dargestellt werden, wie sich das Verhalten und die Action der Wurzel unter den in der Natur gebotenen Verhältnissen gestaltet. Auf diese Vorgänge wollen wir hier einen orientirenden Blick werfen, wobei wir uns indess auf die mechanischen Actionen beschränken, also z. B. die eine bestimmte Wachsthumsrichtung inducirenden Reizreactionen ausser Acht lassen, da thatsächlich für das Arbeiten gegen Widerstände nur das entsprechende Entgegentreten dieser massgebend ist. Ebenso ist die morphologische Dignität der Wurzel ohne Bedeutung, so dass die Berücksichtigung der Hauptwurzel genügt.

Wie schon wiederholt betont wurde arbeitet die Wurzel in dem Sinne regulatorisch und zweckentsprechend, dass sie nur dann höhere Aussenenergie entwickelt, wenn ein Ausbiegen, resp. ein Umgehen des Widerstandes unmöglich ist. Demgemäss kommt es in Luft, im Wasser oder im Boden zumeist nur zu geringfügiger Aussenarbeit (vgl. p. 323). Denn trifft die in bekannter Weise fortwachsende Wurzel auf irgend einen festen Gegenstand, so biegt sie schon nach Erreichung geringer Aussenenergie vermöge ihrer biegsamen und plastischen Eigenschaften aus, und der wachsthumsfähige Spitzentheil gleitet längs der Widerlage so lange weiter, bis er an deren Ende umzubiegen und seine frühere Wachsthumsrichtung fortzusetzen vermag.

Hinsichtlich der näheren Gestaltung dieses Ausbiegens, Fortwachsens und Umbiegens kann ich auf die schon (p. 271) citirten Abhandlungen von Sachs und von Detlefsen verweisen. Auch genügt es daran zu erinnern, dass das umgebende Medium natürlich Einfluss auf den Vorgang hat. Denn ein seitliches Ausbiegen der subapicalen Theile ist nur so weit möglich, als es der Widerstand der Erde erlaubt, kann also auch ganz verhindert werden. Das ist z. B. erreicht, wenn aus dem Gipsverband nur ein kurzer Spitzentheil hervorsieht, welcher mit seinem Wachsthum sogleich auf eine widerstehende Platte trifft. Aber selbst dann, wenn dieser Zwischenraum

nur gering ist, gelingt es der jetzt allein zuwachsenden Wurzelspitze vermöge ihrer plastischen Eigenschaften umzubiegen und so vermag sogar die relativ dicke Keimwurzel von Faba durch einen 1 mm breiten Spalt sich durchzuzwängen und den Weg in das lockere Erdreich zu finden.

Von besagten Verhältnissen hängt auch der Druck ab, welcher bis zur Erzielung des Ausweichens entwickelt wird. Denn mit der Reduction des Spaltes auf minimalen Werth kommt die maximale Druckenergie zu Stande, während die völlige Freiheit eines längeren Wurzeltheils die Leichtigkeit des Ausbiegens begünstigt. Uebrigens zeigen früher besprochene Versuche (p. 271), dass ein nur 6 mm langer freier Spitzentheil der kräftigen Hauptwurzel von Vicia faba, bei senkrechtem Auftreffen, nur einen mässigen Druck (etwa 10—15 g) entwickelt, der nach Realisirung der Ausbiegung, also nachdem die Wurzel schiefwinklig gegen die Platte gerichtet ist, auf 1—2 g sinkt, ein Druck, der sich in dieser Höhe erhält, während die wachsende Wurzel auf der Platte fortgleitet[1]).

Vermöge dieser Eigenschaften kommt es auch dann nicht zu höherer Aussenleistung, wenn die Wurzel auf ihrem angestrebten Wege vielfach auf Steine trifft und dieserhalb oft genöthigt wird, längs des Widerstandes hinzuwandern und vielleicht eine zickzackförmige Bahn zu durchlaufen. Im Allgemeinen wird dabei, soweit es mit der erstrebten Wachsthumsrichtung verträglich ist, der den geringsten Widerstand bietende Weg eingeschlagen. Dieses Verhalten erklärt sich ganz naturgemäss aus den besprochenen Eigenschaften und es muss dieserhalb nicht eine dirigirende Contactsensibilität in der Wurzelspitze gefordert werden, welche Darwin zu erweisen suchte (vgl. den Schluss dieses Kapitels). Auch haben die an sich nur schwachen Nutationen[2]) der Wurzelspitze für besagtes Ziel keine besondere Bedeutung, da schon die nach Bedürfniss gesteigerte Druckwirkung für entsprechendes Ausbiegen sorgt, dessen zweckent-

---

1) Wegen des Ausbiegens vermag keine angestrebte Krümmung grösseren Druck zu leisten. Es ist deshalb ein Irrthum Ch. Darwin's (Bewegungsvermögen 1881, p. 168) aus der geringen Kraft, mit welcher eine nach geotropischer Krümmung strebende Wurzel gegen den Boden wirkt, auf eine geringe geotropische Energie zu schliessen. Dass diese sehr hoch sein kann, werden wir für Grasknoten (Kap. XI) kennen lernen.

2) Darwin, Bewegungsvermögen der Pflanzen 1881, p. 169.

sprechende Wiederholung auf den Beschauer wohl den Eindruck machen kann, als ob die Wurzelspitze tastend und suchend fortschritte.

Bei solcher geringen Druckentwicklung genügt eine mässige Befestigung der ausgewachsenen Wurzeltheile im Boden, um ein Herausschieben zu verhindern, das bei höherer Energieentwicklung erreicht werden kann. Im Gipsverband z. B. (vgl. Fig. 3 p. 251) sucht die durch die Feder bemessene Kraft den Topf zu heben, resp. die Wurzel und den anschliessenden Keimstengel nach oben zu treiben. Dieser vollen Energie ist aber die Befestigung einer Keimwurzel im Boden nicht gewachsen und wenn beispielsweise nur die Wurzelspitze in einem fixirten Gipsklotz steckt, kommt solches Herausschieben aus dem Boden in schöner und continuirlicher Weise zu Stande, weil das Gleiten der Wurzelspitze in der Gipshülle (p. 249) eine dauernde Rückwärtsschiebung durch die neu hinzuwachsenden Partien gestattet. Uebrigens ist seit alter Zeit bekannt[1]), dass unter geeigneten Verhältnissen Keimstengel, Zwiebeln und selbst schwerere Pflanzentheile durch die Activität der Wurzeln emporgehoben und eventuell aus dem Boden hervorgeschoben werden können. Ebenso ist ohne weiteres klar, warum es zu Ausbiegungen und schliesslich zu eigenthümlichen Schleifenbildungen kommt, wenn die äussere Wurzelspitze und der Samen fixirt, der zwischenliegende Wurzeltheil aber ohne genügende Widerlage ist.

Zur Veranschaulichung der Befestigung in einem mässig lockeren Gartenboden mögen hier zwei Versuche mit Keimpflanzen von Vicia faba Platz finden, in welchen der Zug bestimmt wurde, der auf das Epicotyl ausgeübt werden musste, um das Wurzelsystem nebst dem von einer 20 mm hohen Bodenschicht bedeckten grossen Samen aus dem Boden hervorzuziehen. In dem einen Fall, in welchem die Keimwurzel 30 mm lang, also frei von Nebenwurzeln war, erfolgte ein allmähliches Herausziehen durch 150 g, aber nicht durch 100 g. Zu dem anderen Versuch diente eine 120 mm lange Wurzel, welche zehn Seitenwurzeln zwischen 2—22 mm Länge trug und demgemäss viel ansehnlicher fixirt war. Denn es wurden jetzt 320 g getragen, während 380 g allmählich ein Herausziehen bewirkten. Eine solche Befestigung ist also der maximalen Energieentwicklung gleich, resp. gewachsen, die bei Faba zwischen 220—350 g gefunden wurde.

1) Vgl. Treviranus, Physiologie d. Gewächse 1838, Bd. II, p. 157.

Doch ist nicht zu vergessen, dass eine noch so gute Verankerung des älteren Wurzelsystems das Ausbiegen der jungen Theile einer Wurzel nicht hindern kann, wenn der Mangel geeigneter seitlichen Widerlagen ein solches Ausbiegen gestattet.

Uebrigens ist es hier nicht meine Absicht, die Verankerung grosser und kleiner Pflanzen zu besprechen, oder speciell die Einrichtungen für Befestigung von Samen und keimenden Pflanzen, resp. die Bedeutung dieser Einrichtungen für Eindringen der Wurzel in den Boden zu beleuchten[1]).

Das Ausweichen der Wurzel bringt es mit sich, dass sie in den natürlichen Verhältnissen in der Regel nicht zu hoher Druckentwicklung veranlasst wird. Ja selbst dann, wenn die bisher in lockerer Erde wachsende Wurzelspitze auf resistenten Thon trifft, wie wir ihn in unseren Versuchen (Kap. VI) anwandten, erfolgt oft ein Ausweichen und Hinwachsen längs der Thonfläche. Indess gelingt unter solchen Umständen sehr häufig der Uebergang in einen Thon- und Lehmboden, wie er in der Natur gewöhnlich geboten wird und nach dem Eindringen wächst, ebenso wie in unseren Versuchen, die Wurzel unter erhöhter Arbeitsleistung weiter[2]). Doch ist die Aussenarbeit — des geringeren Widerstandes im Boden halber — zumeist weniger ansehnlich als in den früher (Kap. VI) mitgetheilten Experimenten, in welchen weniger als die Hälfte der potentiellen Aussenenergie genügte, um den Thon zu durchwandern. Dieses geschieht in dem ziemlich homogenen Medium naturgemäss in gradliniger Richtung, während z. B. beim Aufstossen auf einen Stein die Wurzelspitze in scharfer Krümmung sich seitlich wendet (vgl. p. 270).

Aendert sich mit dem Uebergang von einer zu einer anderen Bodenart der Widerstand im positiven oder negativen Sinne, so spielt sich die Thätigkeit der Wurzel nach den Kap. VI behandelten Principien ab. Bei zunehmendem Widerstand erfolgt also eine Hemmung des Wachsens, bis die Aussenenergie auf die genügende Höhe angeschwollen ist, bei abnehmendem Widerstand wird die bis dahin nach aussen gewandte Turgorkraft durch entsprechende Spannung

1) Vgl. hierüber z. B. Darwin, Bewegungsvermögen d. Pflanzen 1881, p. 471; Klebs, Unters. a. d. bot. Institut zu Tübingen 1885, Bd. I, p. 536.

2) Es ist damit nicht ausgeschlossen, dass andere Ursachen, insbesondere Reizwirkungen, ein Vermeiden oder Verlassen des Thons veranlassen können.

der Zellhaut äquilibrirt. Damit ist eine gewisse elastische Verlängerung verknüpft, dann aber schlägt das Wachsthum das übliche Tempo ein. Dieses ist nur wenig, vielleicht auch gar nicht schneller als in dem resistenteren Medium, da erst höhere Widerstände ansehnliche Verlangsamung des Wachsens veranlassen. Die Wurzel arbeitet eben, wie früher betont, in der Weise regulatorisch, dass sie bei höherem Widerstand eine grössere Gesammtenergie entwickelt und also trotz höherer Arbeitsleistung mit annähernd gleicher Schnelligkeit vorrückt. In principieller Hinsicht ist das dieselbe Regulation, welche es einem Menschen ermöglicht, auch dann noch einen Berg mit gleicher Schnelligkeit wie zuvor hinaufzuwandern, wenn ihm eine mässige Last aufgeladen wird.

Gelegentlich gelangt auch einmal eine Wurzel in einen engen cylindrischen Canal oder in einen Spalt, den Steine oder Holzmassen darbieten, und wenn dann durch Dickenzunahme der subapicalen Theile Anpressung und genügende Fixirung erzielt werden, so sind ähnliche Verhältnisse hergestellt, wie in einem entsprechend geformten, eine resistente Widerlage bildenden Gipsverband. Am häufigsten wird wohl in der Natur das Eindringen in einen engeren Steinspalt und damit Entwicklung von Querdruck vorkommen, während die Wurzelspitze selbst gewöhnlich im Stande sein wird, den Spalt zu durchwandern oder seitlich auszubiegen.

Vermöge der plastischen Eigenschaften kann eine Wurzel sogar durch einen recht engen Canal oder Spalt den Weg finden und dieses auch dann, wenn allein die äusserste Spitze vorzudringen vermag, während die rückwärts anschliessenden Partien an die Widerlage fixirt werden. Unter solchen Umständen beginnt, in Folge einer zweckentsprechenden Correlationswirkung, ein sehr beschleunigtes Wachsen der äussersten, unter normalen Verhältnissen sich sehr langsam verlängernden Wurzelspitze, so dass ziemlich schnell das Fortrücken in einer so eingeengten Zwangslage gelingt (p. 349).

Mit Herstellung geeigneter Führung vermag die Wurzel einen hohen Spitzendruck ebenso gut in der Natur zu entwickeln, wie in unseren Versuchen, in welchen die im Gipscanal geleitete Wurzel gegen die Messfeder traf[1]). Es ist deshalb nicht wunderbar,

---

1) Vgl. p. 274. Wichtig ist, dass auch die Spitze für sich allein schon eine so hohe Druckkraft entwickelt.

dass eine Wurzel unter geeigneten Verhältnissen in der Natur hohe Widerstände überwindet und z. B. gelegentlich, wie es u. a. DUHAMEL[1]) beobachtete, in weichen Tuff eindringt, der wohl keinen höheren Widerstand bot als ein weicher Gipsguss, in welchen sich eine Keimwurzel rein mechanisch, d. h. ohne irgend eine lösende Wirkung, den Weg zu bahnen vermag.

Bildet ein lockerer Erdboden die Führung und Widerlage, so vermag, wie schon besprochen, die senkrecht auftreffende Wurzelspitze zwar nur einen mässigen, jedoch genügenden Druck zu entwickeln, um merkliche Leistungen zu vollbringen, z. B. um dünnes Stanniol zu durchbohren, das übrigens auch von einer der Wurzelspitze ähnlich geformten Eisenspitze durchbrochen wird, wenn diese mit 20—30 g belastet wird. Jedenfalls ist dieses Durchbrechen des Stanniols, wie auch DETLEFSEN[2]) hervorhebt, leicht zu beobachten und wenn DARWIN[3]) zu einem negativen Resultate kam, muss der Grund in der Dicke des Stanniols oder in der Versuchsanstellung gesucht werden.

In einer für die Druckentwicklung günstigen Lage befinden sich u. a. die Anlagen der Seitenwurzeln. Es ist deshalb wohl möglich, dass diese rein mechanisch sich ihren Weg durch das Rindenparenchym bahnen, wenn es auch scheint, als ob ausserdem eine Activität des letzteren, veranlasst durch eine correlative Thätigkeit, eine Rolle mitspielt. Uebrigens vermögen unter entsprechenden Bedingungen die Keimwurzeln, allein durch ihre Druckkraft, ihren Weg in das Innere lebendiger parenchymatischer Gewebe von Stengeln, Knollen etc. zu finden[4]).

Die Fähigkeit zur Entwicklung von hohem Querdruck wird in der Natur durch das Auseinandertreiben grosser Steine, ja sogar durch das Sprengen von Felsstücken erwiesen, was dadurch veranlasst wird, dass die nach Dickenwachsthum strebende Wurzel (oder auch der Stengel) gegen das mechanische Hemmniss Aussenenergie producirt. Durch diese Energie kommt es auch zur Sprengung von Gipscylindern, und da diese Sprengung oft erst nach zwei bis drei Wochen erfolgt, so ist damit dargethan, dass diese Druckleistung längere Zeit,

1) Naturgeschichte d. Bäume 1764, Bd. I, p. 108.

2) Arbeit d. bot. Instituts in Würzburg 1882, Bd. 2, p. 630.

3) Bewegungsvermögen d. Pflanzen 1881, p. 60 und 109.

4) Ein näheres Studium dieses Gegenstandes wurde bereits im hiesigen Institut begonnen.

wenn auch nach einigen Tagen nur langsam zunimmt (p. 281). Die endliche Zerreissung einer cohärenten Masse ist aber für die Pflanze in jedem Falle von hoher Bedeutung, da damit die Wurzel (oder der Stengel) die Freiheit gewinnt und nun bei geringer Leistung von Aussenarbeit fortzuwachsen vermag. Wichtig und entscheidend aber ist, dass die Pflanze solchen plötzlichen Widerstandswechsel ohne Schaden erträgt und dieses ist erreicht, indem die plötzliche Uebertragung der vollen Aussenenergie auf die Zellwandungen kein Zerreissen oder Schädigen veranlasst.

Zwar ist die Druckintensität in radialer Richtung vielleicht etwas geringer als in der Längsrichtung, aber bei der Grösse der wirksamen Fläche kommen deshalb doch absolut höhere Leistungen zu Stande (vgl. Kap. III, C.). Schon eine 40 mm lange Keimwurzel von Vicia faba vermag einen Querdruck von mehr als 5 kg gegen den intacten Gipsverband zu entwickeln (p. 281). Befindet sich aber eine Wurzel (oder ein Stengel) zwischen zwei Platten, so nimmt mit dem nach zwei Seiten fortschreitenden Dickenwachsthum die wirksame Fläche, also der Querdruck fortwährend zu. In diesem Sinne wirken auch die mit dem Dickenwachsthum sich gleichfalls anpressenden Nebenwurzeln, so dass es schliesslich doch zur Sprengung oder allgemein zur Beseitigung eines Hindernisses kommen kann, welches längere Zeit der Aussenwirkung der Wurzel oder des Wurzelsystems zu widerstehen vermochte. Steigt die wirksame Fläche auf 1000 qcm (was bei dickeren Wurzeln und grosser Widerstandsfläche leicht möglich ist), so genügt eine Druckintensität von 6 Atmosphären, um einen Gesammtdruck von rund 6000 kg zu erzielen. Eine solche Kraftentwicklung aber macht die Thatsache wohl verständlich, dass selbst gewaltige Steinblöcke durch eingeklemmte Wurzeln (resp. Stämme) gehoben oder bei Seite geschoben werden können. In Folge des fortschreitenden Dickenwachsthumes kommt solche Wirkung auch in solchen Spalten zu Wege, welche den jungen, in die Länge wachsenden Pflanzentheilen freien Durchtritt gestatteten. Da das Dickenwachsthum nach Vollendung des Längenwachsthums fortdauert, so ist auch die Möglichkeit für Ausübung von Radialdruck noch geboten, nachdem die Befähigung zur Entwicklung von Längsdruck verloren ging.

Doch dürfte (besonders bei jüngeren Pflanzentheilen) der höchste Radialdruck nur dann entwickelt werden, wenn die Widerlage all-

seitig, also jedwelches Wachsen ausgeschlossen ist (p. 282). Übrigens ist solches nur eine der vielen zweckmässigen Correlationen, welche auch anderweitig im Kampfe gegen Hemmnisse eine wichtige Rolle spielen. So ist schon (p. 356) der beschleunigten Wurzelproduction und des kräftigeren Hervorwachsens von Seitenwurzeln gedacht, welche durch Hemmung des Wachsthums der Spitze der Hauptwurzel und gleichsinnig durch Decapitiren hervorgerufen werden. In analogem Sinne wird bei Umgipsen oder bei Wegschneiden der ganzen Wurzel durch die Production von Wurzeln aus dem hypocotylen und dem epicotylen Gliede Ersatz geschaffen.

Wie sich die Wurzel durch eine fortschreitende Sprengwirkung den Weg zu bahnen vermag, demonstrirt sehr anschaulich die in Fig. 1 (p. 240) abgebildete Gipssprengung. Wird in der beschriebenen und aus der Figur ersichtlichen Weise eine Keimwurzel von Faba zwischen zwei Glasplatten in Gips gebracht, so erfolgt, wenn ein weicher Gipsguss gewählt wurde, nach 1 oder 2 Tagen die abgebildete Sprengung, welche keine sehr hohe Energie erfordert, da die an sich dünne Gipsplatte bei Benetzung mit Wasser leicht auf der Glasfläche gleitet, so dass selbst ein harter Gipsguss schliesslich gesprengt zu werden pflegt[1]. Wie beim Eintreiben eines Keiles läuft der Spalt fortwährend der Wurzel voraus, die dauernd nachdrängt und weiter rückt, so dass endlich die Gipsplatte in zwei Hälften zerlegt ist und die Wurzel frei weiter wachsen kann. Die Wurzel bahnt sich also durch die Sprengung vermittelst Keil- und Hebelwirkung den Weg durch ein Medium, das die Energie des directen Spitzendruckes (226—352 g) nicht zu durchbrechen vermag, und zwar ist der Erfolg bei weicherem Gips so günstig, dass, vom Beginn der Sprengung ab, die Wachsthumsschnelligkeit anscheinend nicht mehr beeinträchtigt wird, als in unseren Thonversuchen (Kap. VI). In analoger Weise wird aber auch ein Zerspalten von Steinen erzielt werden, nachdem die Wurzel, resp. ein Wurzelsystem, durch Eindringen in einen passenden Spalt den geeigneten Angriffspunkt gefunden hat.

Diese Spaltung, welche durch das Zusammenwirken von Querdruck

1) Solche Präparate lassen sich in Alcohol als Demonstrationsobjecte aufbewahren.

(Dickenwachsthum) und Längsdruck, resp. Längenwachsthum, erreicht wird, kann man einem Keil vergleichen, der gleichzeitig durch eine vorwärts treibende Kraft und eine, etwa durch Quellung erzielte, senkrecht gegen den Spalt gerichtete Druckenergie wirksam ist. Der nach Vollendung des Längenwachsthums fortdauernde Querdruck greift in einer für das Fortschreiten der Sprengung sehr günstigen Weise an. Liegt z. B. bei der schon (p. 368) erwähnten Druckentwicklung von 5 kg durch eine 40 mm lange Wurzel von Faba der Schwerpunkt der parallelen Kräfte in der Mitte, also 20 mm von der Wurzelspitze entfernt, so sucht an dieser Stelle ein nach beiden Seiten wirkendes statisches Moment von 100 kg den Gips auseinanderzureissen. Und während die Wurzel in dem vorauslaufenden Spalt fortschreitet, pressen sich stets neue Partien der Gipswandung an, so dass diese Querdruckenergie fortwährend auch dann erhalten wird, wenn die Erweiterung des oberen Spalttheils den Contact mit den nicht in gleichem Maasse in die Dicke wachsenden Wurzelpartien aufhebt.

Gleichzeitig drängt die wachsende Zone nach vorn, und gleichviel ob der Längenzuwachs auf einer grösseren oder kleineren Strecke gelingt, jedenfalls kommt damit eine keilartige Wirkung zu Stande. Beim starren Keil würde, bei einem Verhältniss der Höhe zur Länge von 1 : 5, durch eine Triebkraft von 200 g ein Druck von 1 kg gegen die Spaltwand zur Geltung kommen, eine Energie, die ebenfalls mit dem entsprechenden statischen Moment für das fernere Zerreissen des Gipses wirksam wird[1]).

Durch Wachsthum, Plasticität u. s. w. sind allerdings besondere Eigenheiten geboten, auf deren Erörterung ich indess verzichten darf, da es hier nur darauf ankam zu zeigen, in welchem Sinne Keil- und Hebelwirkungen die allerdings mächtige Sprengkraft der Wurzel vermitteln. Entscheidend ist, dass diese Sprengkraft die genügende Intensität erreicht und es thut nichts, dass mit dem Realisiren des Sprengens der Widerlage resp. dem Auseinanderweichen, die Druckenergie sogleich

1) Diese rein mechanische Wirkung ist auch bedeutungsvoll für die Zertrümmerung von Gesteinen und andere Veränderungen in der festen Erdrinde. Uebrigens spielen in solchem Sinne die Pflanzen auch durch Secretion von Säuren und anderweitige Eingriffe eine Rolle und die Bildung von Humusboden ist ebenfalls nur von der Productionsthätigkeit von Pflanzen abhängig.

stark sinkt, denn nunmehr ist durch die einmalige intensive Anspannung der freie Weg gebahnt. In dem vorauslaufenden Spalt aber hat die äusserste Wurzelspitze gar nicht mit Widerständen zu kämpfen und ist also, da wo Sprengung erreicht ist, weniger Unbilden ausgesetzt als in der Erde, wo sie immer wieder auf feste Partikel aufstösst und wo die Wurzelhaube eine schätzenswerthe Schutzhülle abgibt.

Mit der Thatsache des Querdruckes und des durch Wachsthum vermittelten gewaltsamen Fortschiebens der conischen Spitze ist die besprochene Keil- und Hebelwirkung eine physikalische Nothwendigkeit, sobald nur das geeignete Substrat und die geeignete Angriffsweise geboten werden, die für die Aussenleistung überhaupt eine Bedingung sind.

In der Erde, in welcher jedes einzelne Theilchen ausweicht, kann mit dem Mangel des Zusammenhaltes eine Sprengwirkung wie in einer cohärenten Masse nicht zu Stande kommen. Immerhin aber muss das Eintreiben der Wurzelspitze zwischen zwei Partikel keilartig wirken, wenn auch dieser Action praktisch nicht die Bedeutung zukommt, welche DARWIN[1]) ihr beizumessen scheint, welcher übrigens das Wesen der Sprengwirkung nicht richtig erkannte. Anderseits ist DETLEFSEN[2]) im Unrecht, wenn er der Keilwirkung allgemein alle Berechtigung abspricht.

Die Eigenschaften des widerstehenden Mediums bringen überhaupt Besonderheiten für die unter Arbeitsleistung fortwachsende Wurzel mit sich. Während z. B. die Wurzel in einer grobkörnigen Erde unter Umständen zum Umgehen von Widerständen vielfach ausbiegen, also sich gleichsam schlängelnd hindurchwinden muss, fällt eine solche Anforderung in dem sehr feinkörnigen Thon so gut wie ganz, in homogener Gelatine gänzlich weg. In diesem bis zu einem gewissen Grade elastischen Medium sind die Widerstandsverhältnisse wieder verschieden, wenn die Gelatine nicht adhärirt oder wenn eine starke Adhäsion durch Einschmelzen erreicht ist (p. 345). Solche Adhäsion kommt ferner beim Thon mehr als in humöser oder sandiger Erde in Betracht. In Erde, und auch in anderen Medien,

1) Bewegungsvermögen d. Pflanzen 1881, p. 63.
2) Arbeiten d. bot. Instituts in Würzburg 1882, Bd. II, p. 633.

hängt es ferner von verschiedenen Umständen ab, ob mit dem Beiseiteschieben der Partikel der Widerstand schnell steigt, wie es z. B. der Fall sein muss, wenn die Erdtheilchen sogleich gegen eine starre Widerlage angepresst werden.

Soweit aber die potentielle Energie ausreicht, findet die Wurzel ihren Weg durch die verschiedensten Medien und Hindernisse, wenn sie auch in mannigfachster Weise sich durchzwängen und durchschlängeln muss. Dieserhalb bietet ein grobkörniges Medium z. B. für die Wurzel nicht den gleichen Widerstand wie für einen starren Eisenstab, den vielleicht ein Steinchen aufhält, während die das Hemmniss umgehende Wurzel mit viel geringerer Energie ihren Weg fortzusetzen vermag. Bei diesem und anderem Fortschreiten ist im Allgemeinen Druck, nicht aber die lebendige Kraft eines Stosses wirksam. Denn schnelle Bewegungen kommen nur untergeordnet vor, wenn irgendwo und irgendwie eine Spannung plötzlich ausgeglichen wird und sind z. B. auf eine kurze Wegstrecke wirksam, wenn beim plötzlichen Durchbrechen eines Hindernisses die ja gleichsam elastisch comprimirte Wurzel sich etwas verlängert (p. 311).

Für den endlichen Erfolg spielen ferner die specifischen Eigenheiten der Wurzel eine Rolle, die in Bezug auf Energieentwicklung, Form und Dimension, Verankerung und andere Umstände Verschiedenheiten bietet. Auf Einiges in dieser Hinsicht ist früher (p. 278) hingewiesen, eine nähere Specialbehandlung aber liegt nicht im Rahmen dieser Studien. Für den Erfolg mögen ausserdem noch besondere Reizwirkungen, wie Aerotropismus, Contactreiz etc. mit ins Gewicht fallen, so dass in Hinsicht auf alle diese und andere Umstände eine ungleiche Fähigkeit zum Eindringen in ein Medium noch kein Argument für eine geringere energetische Fähigkeit ist[1]). Bis zu einem gewissen Grade kann bei den Wurzeln die Säuresecretion bei Bahnung des Weges mitwirken, und z. B. bei parasitischen Pilzen ist das Durchlösen mit Hilfe von Secreten vielfach im Gebrauch.

Ferner soll hier nicht das Durchbrechen der Samen und Fruchtschalen beim Keimen behandelt werden, wobei (abgesehen von der

---

1) So fand z. B. Duhamel (Naturgeschichte d. Bäume 1764, Bd. I, p. 108), dass in einen weichen Tuff die Wurzeln vom Weinstock und Nussbaum, nicht aber die einer daneben befindlichen Ulme eingedrungen waren.

Quellung) theilweise vielleicht sehr hohe Aussenleistungen zur Wirkung kommen, aber, wie bekannt, auch mannigfach verschiedene Einrichtungen entscheidend mithelfen.

Eine Berücksichtigung der ablenkenden Reizbewegungen ist an dieser Stelle nicht nothwendig, da wir diejenigen Reactionen zu behandeln haben, welche zu Stande kommen, wenn eine Wurzel in der von ihr unter den gegebenen Bedingungen angestrebten Wachsthumsrichtung auf einen mechanischen Widerstand stösst. Dieser, oder präciser die durch diesen Widerstand hervorgebrachte mechanische Wachsthumshemmung, ist dann die Veranlassung, dass die Pflanze mit den ihr zu Gebote stehenden Mitteln die auf Überwindung des Hemmnisses gerichtete Aussenenergie entwickelt. Wir haben es also mit einer Reizreaction zu thun, welche in correlativer Weise auch andere Thätigkeiten veranlasst oder in Mitleidenschaft zieht (vgl. p. 333).

Sobald aber mechanische Energie auf die Wurzel in hinreichender Weise einwirkt, muss diese bei ihren biegsamen und plastischen Eigenschaften unvermeidlich ein entsprechendes Ausweichen erfahren und dieser rein mechanische Erfolg ist vollständig ausreichend, um alle diesbezüglichen Beobachtungen zu erklären. Doch ist damit nicht ausgeschlossen, dass aus dem Contact ausserdem ablenkende Reizbewegungen entspringen und es ist bekannt, dass die Berührung (Reibung) in der Streckungszone, analog wie in Ranken, eine schwache Reizkrümmung erzielt, welche u. a. beschleunigend auf eine gleichsinnige geotropische Krümmung einwirkt[1]).

Ausserdem trat Darwin[2]) für eine Contactsensibilität der Wurzelspitze ein, welche in der Wurzel eine von dem berührenden Körper hinweggewandte, active Krümmungsbewegung veranlasse. Doch kann ich mit Detlefsen[3]) diese Annahme Darwin's nicht als erwiesen ansehen und in Uebereinstimmung mit Detlefsen sprechen meine Erfahrungen dafür, dass solche Reizbarkeit nicht oder doch nicht in bedeutungsvoller Weise besteht.

---

1) Sachs, Arbeiten d. bot. Instituts in Würzburg 1873, Bd. I, p. 437.

2) Bewegungsvermögen d. Pflanzen 1881, p. 119, 163.

3) Arbeiten d. bot. Instituts in Würzburg 1882, Bd. 2, p. 634.

Dagegen muss ich mit Darwin als eine Reizbewegung, als Traumatropismus, diejenigen Krümmungen ansehen, welche oberflächliche einseitige Beschädigung durch etwas Höllenstein, durch heissen Draht u. s. w. in der Weise veranlassen, dass die in der Streckungszone ausgeführte Krümmung von der afficirten Flanke hinweggewandt ist. Dieser Erfolg ist sicher nicht, wie es Detlefsen (l. c.) will, ein mechanisch, durch die localisirte Hemmung des Wachsthums der Wurzelhaube erzielter Effect. Auch ist die räumliche Trennung von Perceptions- und Actionszone im Getriebe der Pflanze allgemein, wenn auch nicht immer in unmittelbar hervortretender Weise im Spiele[1]). Und die Wachsthumshemmungen, welche bei Verwundung der Wurzel sich bis in den Stengel erstrecken, ferner die auf Vernarbung hinarbeitenden Thätigkeiten, welche Stoffzuwanderung von benachbarten und ferner gelegenen Zellen veranlassen, sind auch schon Beispiele des Ausstrahlens eines traumatischen Reizes.

Führen also Eingriffe zu einer leichten einseitigen Verletzung an der Wurzelspitze, so wird eine abgewandte traumatische Bewegung die Folge sein und solches wird sich zwar nicht als Regel, doch dann und wann beim Wachsen durch den Boden ereignen. Vielleicht ist ein Theil der Krümmungen, welche Darwin auf Contactsensibilität der Spitze schob, dem Traumatropismus zuzuzählen, doch ist ein anderer Theil der von Darwin erzielten Erfolge, wie hier nicht discutirt werden kann, offenbar durch andere Ursachen veranlasst worden.

Nicht zu vergessen ist aber, dass jedwelcher Organismus immer nur nach Maassgabe der jeweils gegebenen Eigenschaften und Dispositionen reagirt, die von äusseren Bedingungen und Verhältnissen, also auch von der Inanspruchnahme durch andere Reizvorgänge abhängig sind. Dieserhalb ist es also wohl möglich, dass bei Inanspruchnahme durch Aussenarbeit die Wurzel ein quantitativ oder auch qualitativ verändertes Reactionsvermögen gegen Reizein-

---

1) Auf die Wichtigkeit dieser Verhältnisse wurde schon in meiner Physiologie Bd. II, z. B. p. 251, 327 hingewiesen. Sobald man übrigens die regulatorische Gesammtthätigkeit beachtet ist klar, dass überall Reiztransmissionen im Spiele sind. Von Erscheinungen die ohne Ueberlegung überzeugen, sei aus neuerer Zeit noch auf die Untersuchungen Rothert's über heliotropische Sensibilität hingewiesen (Berichte d. bot. Gesellschaft 1892, p. 374).

griffe bietet. Thatsächlich sprechen Erfahrungen hierfür, die ich indess übergehe, da ich specielle Studien über dieses Thema nicht anstellte.

IX. Stengel von Keimpflanzen.

Bei der Mittheilung der Versuche mit Keimstengeln kann ich mich kurz fassen, da analoge Resultate wie mit Wurzeln erhalteu wurden. Nach den Erfahrungen mit dem Epicotyl von Faba vulgaris und Phaseolus multiflorus, sowie mit dem Hypocotyl von Helianthus annuus wird die mechanische Reaction gegen eine Widerlage ebenfalls erreicht durch eine mehr oder weniger weitgehende Entspannung der Haut. Diese wird bei Faba von einer ansehnlichen Turgorschwellung begleitet, während eine solche, wenn überhaupt, bei Helianthus in nur sehr geringem Grade eintritt, so dass offenbar ähnliche specifische Differenzen wie bei Wurzeln bestehen.

Die Wurzeln sind übrigens, schon vermöge ihrer Lebensweise, günstiger für unsere Studien als Stengelorgane, die zudem mit dem Einbetten in Gips dem Licht ganz oder weitgehend entzogen werden. Dieserhalb sind zum Vergleiche stets etiolirte Pflanzen gewählt und die Versuche auf mässig lange Zeit ausgedehnt worden. Die Krümmung der Stengelspitzen, die Gliederung in Nodien und Internodien und andere Verhältnisse sind ferner z. B. bei vergleichenden Versuchen über die Turgorverhältnisse hinderlich und die geringe Dimensionsänderung durch die in Betracht kommenden Dehnkräfte erschwert eine genaue Feststellung der Hautentspannung, welche in Folge der Hemmung des Wachsens sich einstellt.

A. Druckversuche.

Die umstehende tabellarische Zusammenstellung der Versuche über Längsdruck (Tab. VII), resp. Querdruck (Tab. VIII) schliesst sich ganz der für Wurzeln gegebenen Zusammenstellung an (Tab. I und II p. 264 u. 266). Die dort gegebene Erklärung gilt also auch für unsere Tab. VII und VIII. Bemerkt sei nur, dass die Lage der wirksamen Zone (Taf. VII Verticalreihe *b* und Taf. VIII unter *c*) bei Helianthus von der Basis der Cotyledonen, bei Faba und Phaseolus von dem

Scheitelpunkt der Krümmung in der Sprossspitze ab gemessen wurde. Die wirksamen Zonen liegen in allen Versuchen in einer Region, in welcher sich während des Eingipsens die Wachsthumsfähigkeit erhielt. Ueber das Eingipsen u. s. w. vgl. p. 249 ff.

Tabelle VII.

Längsdruck von Keimstengeln.

Nr.	Versuchsdauer *a*	Wirksame Zone Entfernung von Spitze *b*	Durchmesser *c*	Fläche *d*	Gesammtdruck *e*	Druck pr. 1 qmm *f*	Druck in Atmosphär. *g*
			Faba vulgaris.				
35	167 Std.	9 mm	5 mm	19,6 qmm	1190 g	60,7 g	5,88 Atm.
			Helianthus annuus.				
36	92 Std.	3 mm	2,6 mm	5,2 qmm	400 g	76,9 g	7,45 Atm.

Tabelle VIII.

Querdruck des Keimstengels.

Nr.	Versuchsdauer *a*	Wirksame Zone Lage *c*	Medianschnitt *d*	Gesammtdruck *e*	Druck pr. 1 qmm *f*	Druck in Atmosphär. *g*
			Faba vulgaris.			
37	142 Std.	5,5—13 mm	37,5 qmm	2154 g	57,5 g	5,56 Atm.

Bei der geringen Zahl von Versuchen und bei der nur annähernden Bestimmung, resp. Berechnung der Druckintensität muss es fraglich bleiben, ob die Keimstengel einen gleichen, oder wie es nach den Versuchen der Tab. VII scheinen möchte, einen etwas geringeren Längsdruck entwickeln, als die Wurzeln. Nach dem in Tab. VIII aufgeführten Versuche ist die Intensität für Längs- und für Querdruck im Epicotyl von Faba dieselbe. Der grössere Durchmesser dieses Stengels bringt es natürlich mit sich, dass der absolute Druck wesentlich höher ausfällt als in der Keimwurzel dieser Pflanze.

Zu weit ansehnlicherer Druckentwicklung muss es im Cambium der Bäume kommen. Denn Krabbe [1]) fand, dass dieses Gewebe einen,

1) Wachsthum d. Verdickungsringes 1884, p. 57 und 70.

wenn auch geringen Zuwachs, noch erzielte, als ihm ein constanter Gegendruck bei Coniferen von 10 Atmosphären, bei Laubhölzern bis zu 15 Atmosphären entgegenwirkte. Bei der Zartwandigkeit der activen Cambiumzellen kann aber die Aussenleistung nur in analoger Weise, wie in der dünnwandigen Wurzel entwickelt werden[1]).

Voraussichtlich wird sich die äussere Arbeitsleistung analog wie bei Wurzeln gestalten und bei relativ mässigem Widerstand dürfte also, trotz der Aussenleistung, eine nur geringe Wachsthumshemmung eintreten. Damit stehen auch Beobachtungen von Krabbe[2]) an Bäumen im Einklang. Dieser fand nämlich, dass eine 2—3fache Steigerung des Rindendrucks (der bei Coniferen 0,5, bei Laubbäumen 0,5 bis 1 Atmosphäre beträgt) noch keine, eine 3- bis 3,5fache Steigerung aber eine geringe Verminderung des Dickenzuwachses erzielte.

B. Turgorverhältnisse.

Schon früher (p. 308) wurde besprochen, dass, ähnlich wie in Wurzeln, in Keimstengeln der Turgor von den ausgewachsenen Partien aus allmählich bis zum Urmeristem des Vegetationspunktes steigt, dass also in der schnellst wachsenden Streckungszone nicht der höchste Turgor besteht.

Zu diesen allgemeinen Schlüssen berechtigen mit Sicherheit die vorliegenden Versuche, in welchen aber eine ganz exacte Construction der Turgorcurve nicht beabsichtigt war. Nach diesen Experimenten kommt im Gipsverband im Keimstengel von Faba eine ansehnliche, in dem von Phaseolus multiflorus eine schwächere, in dem von Helianthus annuus eine nur unsichere Turgorsteigerung zu Stande. Wo diese Schwellung deutlich ist, also im Epicotyl von Faba, stellt sich ein ähnliches Verhältniss heraus wie in der Wurzel, d. h. die Turgordifferenz beginnt schon in dem normal nicht in die Länge wachsenden Theile, erreicht in einem gewissen Abstand vom Scheitelpunkt ein Maximum, ist aber auch im Urmeristem noch merklich.

Von den plasmolytisch ausgeführten Versuchen will ich hier nur kurz die Hauptresultate in der Weise angeben, dass der Abstand der

1) Hinsichtlich der Turgorschwellung dürften wohl specifische Differenzen bestehen.

2) l. c. p. 45.

bezüglichen Zone vom Scheitelpunkt in mm und daneben der procentische Salpeterwerth für die mittleren Zellen des Rindenparenchyms angeführt wird und zwar bezieht sich die erste Zahl auf die frei erwachsene etiolirte, die eingeklammerte Zahl auf die während 2 bis 4 Tagen eingegipste Pflanze (Temp. 18—20° C).

Epicotyl von Vicia faba, 60—70 mm lang. 0,5 mm von der Spitze 5 Proc. (5,5 Proc.); 20 mm 4 Proc. (5,5 Proc.); 40 mm 3 Proc. (4 Proc.); 70 mm 2,5 Proc. (2,5 Proc.).

Epicotyl von Phaseolus multiflorus, 75—90 mm lang. 1—2 mm vom Scheitelpunkt 4 Proc. (4,5 Proc.); 30 mm 3 Proc. (3,5 Proc.); 60 mm 2,5 Proc. (2,5 Proc.).

Helianthus annuus. Hypocotyl 50—60 mm lang. 2 mm hinter dem Urmeristem 4 Proc. (4 Proc.); 10 mm 3 Proc. (3,5 Proc.?); 20 mm 2 Proc. (2 Proc.).

Eine sehr genaue Feststellung dürfte aus verschiedenen Gründen kaum erreichbar sein. Ich erwähne nur, dass die benachbarten Zellen des mittleren Rindenparenchyms schon unter sich gewisse Differenzen bieten und dass in dem gekrümmten Spitzentheil zwischen Convex- und Concavseite ein merklicher Turgorunterschied besteht. Die Epidermis pflegt auch an diesen Stengeln vor und nach dem Eingipsen einen etwas geringeren Turgorwerth zu besitzen.

C. Die Entspannung der Zellhaut.

Zur Prüfung der Entspannung wurden die etiolirten Keimstengel in der p. 239 beschriebenen Weise eingegipst, nachdem sie zuvor durch Begiessen mit Wasser und Aufenthalt im dampfgesättigten Raum in den maximalen Turgescenzzustand versetzt worden waren. Die Gipsform selbst diente dann als Maass für die Dimensionsänderungen, indem der Gips, nach Entfernung der gekrümmten Stengelspitze, zuletzt mit einem Rasirmesser, so weit abgetragen wurde, dass Stengel- und Gipsquerschnitt genau in eine Ebene fielen. Nachdem Gleiches am Basaltheil der Gipshülle durchgeführt war, wurde das Stengelstück in der früher (p. 241) angegebenen Weise durch Zerbrechen der Gipsplatte befreit.

Hatte die Pflanze zwei bis drei Tage im Gipsverband verweilt, so verlängerte sich das Stengelstück sogleich beim Isoliren und war einige Minuten später, nach dem Eintauchen in Wasser, um 0,2 bis 0,7 mm länger als die Gipsform. Beim Tödten durch Eintauchen in

heisses Wasser oder beim Behandeln mit 10 Proc. Salpeter ging das turgorlose Stengelstück auf die Länge der Gipsform oder 0,1 mm unter diese Länge zurück. Geschah aber das Befreien sogleich nach dem Erstarren des Gipsgusses, so waren die befreiten Stengelstücke höchstens 0,1 mm länger als die Gipsform und wurden bei der Aufhebung des Turgors, durch Abtödten oder Plasmolysiren, 1,5 bis 2,5 mm kürzer als diese.

Ich beschränke mich hier auf diese kurze Mittheilung der Resultate ziemlich zahlreicher Versuche mit dem etiolirten Epicotyl von Vicia faba und Phaseolus multiflorus, sowie mit dem Hypocotyl von Helianthus annuus und Cucurbita pepo. Aus den übereinstimmenden Resultaten folgt aber, dass, analog wie bei den Wurzeln, bei Aufenthalt in Gips die Zellwände fortfahren zu wachsen, bis ganz oder nahezu die Länge der Gipsform erreicht ist.

So exact wie bei den Wurzeln lässt sich indess der Grad der Entspannung bei diesen viel ungünstigeren Versuchsobjecten nicht ermitteln. Schon die geringere elastische Amplitude macht die Bestimmungen um so mehr ungenauer, als in den Experimenten der ganze Spitzentheil entfernt wurde. Nach dem Aufenthalt in Gips fällt zudem die Dimensionsänderung noch geringer aus, weil einmal die hier gemessene absolute Verkürzung mit der Verringerung der wachsthumsfähigen Zone abgenommen und ferner, analog wie in den Wurzeln, die Elasticität zugenommen hat. Auf Gewinnung exacterer Resultate durch anderweitige Versuchsanstellung durfte ich aber verzichten, nachdem durch die Experimente mit Wurzeln die Hauptfrage in zweifellosester Weise entschieden war.

Durch die Existenz von Gewebespannung, die in den etiolirten Stengeln zwar schwächer[1]) als in normalen Stengeln, jedoch immer noch ansehnlich ist, wird am Wesen der Sache nichts geändert, wie früher (p. 291) auseinandergesetzt wurde. Doch ist klar, dass gegen eine Widerlage eine Druckleistung schon durch ein alleiniges Wachsen, also durch alleinige Activität in den negativ gespannten Geweben erzielt werden kann. Denn diese befinden sich gegen die positiven Gewebe in einer ähnlichen Lage wie der Kautschuckschlauch, welcher durch die Energie der umhüllten und sich

1) Vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. II, p. 33.

anschmiegenden Wurzel gedehnt wird (vgl. p. 260). Ist aber hierdurch die Aussenleistung der umhüllten Wurzel um einen äquivalenten Energiewerth vermindert, so wird sie natürlich durch Nachlassen der negativen Spannung des Kautschucks um einen entsprechenden Betrag vermehrt werden, ohne dass die Aussenenergie der Wurzel selbst deshalb einen Zuwachs erfahren muss.

Die höchste Aussenleistung wird selbstverständlich erreicht, wenn die negative Spannung ganz eliminirt wird und einer positiven Spannung in denselben Geweben Platz macht. Ein solches Verhalten kommt in der That in den Grasknoten vor (Kap. XI); in den Keimstengeln aber scheint, soweit ich untersuchte, im Gipsverband der Sinn der Spannung unverändert zu bleiben, wenn auch Verschiebungen der Spannungsintensität zwischen der negativen Epidermis nebst den angrenzenden Zelllagen einerseits und den übrigen umschlossenen Geweben andrerseits sich einstellen.

Dieser Schluss ergiebt sich aus Folgendem. Wird nach dem Aufenthalt in Gips an dem befreiten Stengel die Epidermis in Längsstreifen abgetrennt, so sind diese kürzer als der centrale Cylinder, jedoch länger als die Gipsform. Dieser relative Unterschied aber erhält sich, nachdem bei Plasmolyse die Epidermis etwas kürzer als die Gipsform, der Innencylinder aber etwas länger als diese geworden ist. Erst dieses Verhalten nach Aufheben der Turgordehnung ist entscheidend, da, wie Jedermann weiss, bei Vereinigung zweier ungleich elastischer Massen (so auch von Eisen und Kautschuck) die Spannung bei Dehnung ihren Sinn sogar umkehren kann. So könnte auch in dem Gipsverband die negative Spannung der Epidermis fehlen, sich aber mit dem Verlängern der Stengel nach dem Isoliren einstellen.

Ob Gleiches für die Längsspannung von Stengelorganen allgemeinere Giltigkeit hat, muss dahin gestellt bleiben. Ueber Querspannung habe ich keine Versuche angestellt. Nach den Erfahrungen von Krabbe (l. c.) dürfte die Rinde bei mechanischer Hemmung des Dickenwachsthums negativ gespannt bleiben, wenn auch nicht gerade erwiesen ist, dass diese negative Spannung während der Wirkung der mechanischen Widerlage bestand.

Die negative Spannung eines Gewebes fordert nothwendig eine äquivalente mechanische Aussenleistung des positiv gespannten Gewebes, eine Leistung, deren Zustandekommen als eine Reaction gegen eine äussere

Widerlage nach denselben Gesichtspunkten zu beurtheilen ist, wie etwa die Entstehung der negativen Spannung des Kautschuckschlauches durch die Aussenleistung der umschlossenen Wurzel. Auch ist bekannt, dass in der Gewebespannung positive und negative Intensitätswerthe von 5—7 Atmosphären erreicht werden[1]).

Der Antagonismus von Geweben veranlasst also, analog wie äussere Widerstände, in den positiv gespannten Geweben eine regulatorische Entwicklung von Aussenenergie, welche als Dehnkraft auf die negativ gespannten Geweben wirkt. Doch ist nicht zu vergessen, dass ein in entsprechender Weise regulatorisch geleitetes Wachsen Voraussetzung ist, dass also die Gewebespannungen nur secundäre Erfolge, nicht die primären Ursachen des Wachsens sind. Das Wachsthum wird in den zu einem organischen Ganzen vereinigten Geweben in erster Linie durch die in aller Thätigkeit sich aussprechende gegenseitige regulatorische Beeinflussung, in der Art gelenkt, dass die erzielten Differenzen und Antagonismen selbst wieder, wie nothwendig, den Anstoss für eine selbstregulatorische Thätigkeit abgeben.

In dem Antagonismus positiv und negativ gespannter Gewebe fallen also noch andere Momente ins Gewicht, als bei dem Antagonismus zwischen Kautschuckschlauch und Wurzel. Man darf deshalb auch nicht fordern, dass da wo die Befähigung zu einer Turgorschwellung gegeben ist, die positiv gespannten Zellen einen höheren Turgor als die negativ gespannten besitzen müssen. Thatsächlich trifft solches nicht allgemein im Keimstengel von Faba zu, wenn auch möglicherweise die negative Spannung der Epidermis für die etwas geringere Turgorkraft in der Epidermis mit verantwortlich sein mag.

D. Anderweitige Beobachtungen.

Schon früher (p. 355) wurde hervorgehoben, dass sich in den umgipsten Keimstengeln auch anderweitige ähnliche Reactionen einstellen wie in den Wurzeln. So wird in ungefähr gleichem Maasse wie in den Wurzeln die wachthumsfähige Zone verkürzt. In dem Epicotyl von Vicia faba war die Länge des wachsthumsfähigen

1) Vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. II, p. 35.

Spitzentheiles nach 3- bis 5tägigem Eingipsen von 30—40 mm auf 15—20 mm zurückgegangen. Aehnliche Verhältnisse ergaben sich für das Epicotyl von Phaseolus multiflorus, sowie für das Hypocotyl von Helianthus annuus.

Im Princip gestalten sich in Folge der Wachsthumshemmung auch die anatomischen Verhältnisse in den Keimstengeln ähnlich wie in den Wurzeln, doch war in den von mir untersuchten Keimstengeln das Vorrücken der Gefässbündel gegen den Vegetationspunkt nicht so auffällig als in den Wurzeln. Ich darf indess aus den schon (p. 355) angegebenen Gründen ein weiteres Eingehen auf diesen Gegenstand hier unterlassen.

Der Allgemeinheit und Nothwendigkeit anderweitiger und correlativer Reactionen in Folge des Eingipsens wurde bereits gedacht (p. 357) und speciell wurde schon hervorgehoben, dass die so erzielte Wachsthumshemmung auf das Austreiben von Ruheknospen ähnlich wirkt wie ein Decapitiren der Sprosse. Hier schliesst sich u. a. die interessante Frage an, in wie weit mit gehemmtem Wachsthum normal absterbende Elementarorgane functionstüchtig verharren, eine Frage, die z. B. auch für die Bäume in Betracht kommt, in welchen mit der Unterdrückung des Jahreszuwachses der letztgebildete Jahresring nothwendig länger functionstüchtig bleiben muss, wenn der Baum nicht frühzeitig absterben soll.

Jedenfalls sind in Bezug auf die Reaction gegen die Wachsthumshemmungen noch mancherlei interessante Fragen zu beantworten. So viel ist aber gewiss, dass allgemein eine specifisch verschiedene Druckintensität von jeder wachsenden Pflanze gegen eine unverrückbare Widerlage entwickelt wird. Die absolute Druckhöhe hängt selbstverständlich von der Grösse der wirksamen Fläche ab und kann mit dieser ungeheure Werthe erreichen (vgl. p. 281). Bei einer Aussenenergie von 10 Atmosphären würde z. B. das Stück eines Baumes von 50 cm Durchmesser und 200 cm Länge einen Gesammtdruck von ungefähr 100 000 kg entwickeln. Es ist also auch nicht wunderbar, dass in Versuchen Clark's die wachsende grosse Frucht von Cucurbita maxima ein Gewicht von 4000 Pfund zu heben vermochte. Denn, wie schon der Referent dieser kritiklosen Arbeit[1])

1) Flora 1875, p. 557. — Mir ist nur dieses Referat bekannt.

hervorhebt, bedarf es dazu bei der muthmasslichen Grösse des wirksamen Stückes wahrscheinlich nur einer Druckintensität von 1 Atmosphäre.

Es ist hier nicht Absicht näher, oder auch nur so weit als es für die Wurzel geschah, darzulegen, wie die potentielle Energie im Vereine mit den Eigenschaften der Organe im Dienste der Pflanze zur Erreichung bestimmter Ziele in Verwendung kommt. Dabei sind übrigens sehr häufig in der Pflanze selbst die Bedingungen für Aufwand von Aussenenergie in bestimmten Organen oder Geweben gegeben, so z. B. in der Gewebespannung und in der Hebung der eigenen Last, wovon noch gelegentlich bei Besprechung der geotropischen Energie der Grasknoten die Rede sein wird. Hierher zählen ferner u. a. die Sprengung der Samenschale oder das Durchbrechen der Knospen, ein Vorgang, in welchem das beschränkte Mitwachsen der Knospenschuppen zugleich ein Beispiel correlativen Zusammenwirkens ist.

Zur richtigen Beurtheilung des Verhaltens der Rhizome, der aus dem Boden hervorbrechenden Triebe u. s. w. muss, ebenso wie bei der Wurzel, nothwendig nicht nur die mechanische, sondern auch die biologische Seite berücksichtigt werden. Die für das Vordringen und Hervorbrechen ausreichende Energie wird durch das Fortwachsen in einem hartem Boden documentirt und nicht selten sieht man eine ganze Erdscholle durch einen Spross abgerissen und gehoben.

Für solches Durchbrechen erscheint mechanisch die Spitzenform am vortheilhaftesten, welche z. B. die im Boden fortwachsenden Knospen, sowie Crocus, Hyacinthen, Gramineen u. s. w. beim Hervortreten aus dem Boden bieten. Die Härte der schon ziemlich oder ganz ausgewachsenen Blattspitzen, sowie die verhältnissmässig massive und nicht so leicht ausbiegende Construction sind hierbei von Vortheil für das Durchbrechen.

Wenn sich aber bei den meisten Keimpflanzen ein bogenförmig gekrümmtes Stengelstück (Hypocotyl oder Epicotyl) durch den Boden drängt[1]), so müssen hier biologische Motive berücksichtigt werden, die z. B. in Schutzerzielung oder in der Aufgabe das Endosperm auszusaugen, gegeben sind. Denn im Allgemeinen wird sich bei

1) Näheres in den Schriften von DARWIN, HABERLANDT, KLEBS u. a.

solcher Bogenform ein ungünstigeres Verhältniss zwischen dem Widerstand und der treibenden Energie (resp. den wirksamen Querschnitten) ergeben, selbst wenn, wie gewöhnlich, während der Arbeit des Durchbrechens der Spitzentheil noch im Samen gestützt ist. Damit kommen eben zwei wachsende Säulen für das Hinaustreiben des Bogenstückes in Betracht oder richtiger in dem sich vergrössernden Ringe ist die von jedem Punkt nach aussen wirkende Kraft bestimmt, wenn die der Achse parallel wirkende Kraft und der Krümmungsradius bekannt sind. Doch wächst eben auch mit der Fläche des Bogens, selbst wenn diese dachig zugeschärft ist, die Widerstand bietende Fläche in solchem Grade, dass die Summe der aufzuwendenden Arbeit zumeist wohl mehr als das zweifache derjenigen Energiemenge ist, welche auf das Durchpressen einer einzelnen Spitze aufzuwenden sein würde. Eine weitere Arbeit ist für das Herausziehen der Samenlappen aufzuwenden, wobei unter Umständen von Bedeutung die Festigkeit des basalen Stückes des Keimstengels sein kann, welches z. B. bei Ricinus ansehnlich verdickt ist.

Schon bei Besprechung der Arbeitsweise der Wurzeln wurde dargethan, wie Hebelwirkungen von Bedeutung bei Bahnung des Wegs werden können. Gelegentlich mag auch wohl das Princip des Kniehebels einmal zur Geltung kommen, um unter entsprechender Verkürzung der Wegstrecke eine hohe Kraftwirkung an einem Punkte auszuüben. In ziemlich reiner Form würde der so überaus energisch wirkungsfähige Kniehebel, der bekanntlich in der Wirkungsweise des Knies realisirt ist, unter folgender Annahme durch einen Grashalm zur Wirkung kommen.

Es sei der im Knoten etwas gekrümmte Grashalm mit dem einen Schenkel so auf eine Platte befestigt, dass der Halm wie ein aufgerichtetes Dreieck auf der Platte steht. Strebt dann, z. B. durch geotropische Wirkung, der Halm nach Geradestreckung, so wird der andere starre Arm gleitend fortgeschoben und wirkt, analog wie ein Kniehebel, mit grosser Energie gegen eine sich entgegenstellende Widerlage. Es geschieht im Princip dasselbe, wenn das gebeugte Knie des Menschen die Körperlast hebt, während der Erdboden dem anderen Schenkel die Widerlage gewährt.

Bis zu einem gewissen Grade können auch wohl Wurzel und Stengel nach obigem Princip wirksam werden, wenn die nöthigen Bedingungen

realisirt sind. Dabei ist auch zulässig, dass zwei vereinigte Schenkel gegen einen Punkt wirken, so dass auf diese Weise eventuell der gekrümmte Stengeltheil eines Keimlings beim Durchbruch durch die Erde an Energie gewinnen kann, wenn beide Schenkel nach Annäherung streben. Man hüte sich übrigens die Hebelwirkung in diesem Falle zu überschätzen und vergesse nicht, dass Starrheit der Schenkel, resp. die Verhinderung der Ausbiegung derselben eine unerlässliche Voraussetzung für sehr intensive Druckleistungen ist.

X. Algen.

Mag auch mit Hilfe veränderter Methoden die Bestimmung der Druckleistung kleinerer Objecte möglich sein, so habe ich mich doch derzeit darauf beschränkt, in einigen Algen den Einfluss des Eingipsens auf die Turgorenergie und auf das Wachsthum der Zellhaut zu controliren. Zu diesen Untersuchungen dienten Spirogyra crassa Kg., Sp. bellis Petit und setiformis (Roth)[1], sowie Chara fragilis und eine unbestimmte Nitella.

Des Eingipsens und der Erhaltung des Lebens dieser Pflanzen bei passender Culturmethode ist schon früher gedacht (p. 240). Ich fand in der That Chara und Nitella noch vollständig lebendig und wachsthumsfähig, nachdem die Spitzentheile von Anfang Mai bis Anfang August im Gipsverband verweilt hatten. Auch von Spirogyra crassa und bellis waren einzelne der isolirt im Gips liegenden Fäden nach zwei Monaten noch vollständig lebend und im Stande, nach dem Befreien ihr Wachsen wieder aufzunehmen (p. 356). Ja Spirogyra crassa hatte sich in dieser Zwangslage besser erhalten als in Wasser, in welchem sie inzwischen copulirt hatte und dann zu Grunde gegangen war.

In allen diesen Pflanzen bewirkt das Eingipsen keine merkliche Turgorsteigerung. Dieses ist besonders scharf für Spirogyra zu constatiren, da bei dieser die plasmolytischen Werthe für Zellen desselben Fadens öfters nur um 0,1 Proc. Salpeter untereinander verschieden sind und ganz dieselben Werthe auch nach dem Eingipsen

1) Diese Bestimmungen verdanke ich Herrn P. RICHTER in Leipzig.

fortbestehen. Zu solchem Vergleiche zerschnitt ich einen Faden in drei Stücke, von welchen Nr. 1 frei, neben dem eingegipsten Stück Nr. 2, in demselben Wasser gehalten und schliesslich (also nach gewissem Wachsthum) gleichzeitig mit Nr. 2 auf den Turgorwerth untersucht wurde, der für Nr. 3 zu Beginn des Versuches festgestellt worden war. Mochte nun der Aufenthalt im Gips 2, 4, 8 oder 20 Tage gedauert haben, stets ergab sich derselbe plasmolytische Werth für alle drei Stücke, der durchschnittlich bei Spirogyra crassa 1,7 Proc., bei Sp. bellis 2,2 Proc. Kalisalpeter, bei Sp. setiformis 12 Proc. Rohrzucker betrug.

Die Bestimmung dieses Grenzwerthes gelang bei den genannten Arten ganz gut, wenn sie auch durch die Plasmolyse bald, jedoch weniger als manche andere Arten von Spirogyra, geschädigt wurden. Empfindlicher und weniger geeignet für solche Versuche sind Chara und Nitella, bei welchen ich es vortheilhaft fand Rohrzucker anzuwenden. Als Markstein ist dann ziemlich gut die an verschiedenen Stellen einer Zelle beginnende Abhebung und Einbuchtung des Protoplasmakörpers zu benutzen. In dieser Weise wurden bei Chara fragilis Blätter und Berindungszellen, bei Nitella spec. Blätter und Internodialzellen beobachtet. Dabei ergab sich, dass zu beginnender Plasmolyse 11 bis 13 Proc. Rohrzucker nöthig waren und dass diese Schwankungen in gleicher Weise in gleichwerthigen und gleichalterigen Theilen einer Pflanze vorkamen. Ebensolche Verhältnisse wurden dann nach 3-, 8- und 20tägigem Eingipsen sowohl in Chara, wie in Nitella gefunden. — Nach einer mehr beiläufigen Beobachtung schien auch in einer Cladophora sp. das Eingipsen keine Turgorsteigerung erzielt zu haben.

Bei fehlender Turgorsteigerung muss für Erzielung der thatsächlichen Aussenleistung Hautentspannung nothwendig mitwirken. Für den Nachweis dieses entspannenden Hautzuwachses sind unsere Objecte allerdings schon deshalb nicht günstig, weil sich bei Aufhebung des Turgors Spirogyra crassa circa um 2 Proc., Chara und Nitella etwa um 3—4 Proc. verkürzen, doch gelang es immerhin dieses Hautwachsthum im Gipsverband in zureichender Weise nachzuweisen.

An Spirogyra crassa wurden in einem Faden 5—8 Zellen mikrometrisch vor und nach 6tägigem Eingipsen gemessen. In Theilstrichen (à 0,013 mm) ergab sich dabei für zwei Fälle *a* und *b*

	Vor Eingipsen:	Nach Entgipsen:	Nach Plasmolyse mit 8 Proc. Salpeter:
a	95,5	97,0	95,0
b	104,0	105,5	103,5

Das entgipste turgescente Fadenstück ist also länger geworden und wenn dasselbe bei Plasmolyse ungefähr auf die vor dem Eingipsen gemessene Länge zurückgeht, so ist nicht zu vergessen, dass der Faden vor dem Aufenthalt im Gipsverband durch Aufhebung des Turgors ebenfalls um etwa 2 Proc. verkürzt worden wäre.

Chara wurde behufs der Messung auf einen Glasmaassstab gelegt und unter Benutzung von bestimmten Stipularzellen als Marke konnte, unter Zuhilfenahme mikroskopischer Ablesung, der Messungsfehler unter 0,1 mm herabgedrückt werden. Von den vier übereinstimmenden Versuchen theile ich hier für einen die Maasse mit, welche an dem der Knospe nächsten (*a*) und an dem darauf folgenden Internodium (*b*) bestimmt wurden. Sie zeigen, dass während des 5tägigen Aufenthalts im Gips die Wandung einen merklichen Zuwachs erfahren hatte. Freie Internodien ähnlicher Grösse hatten in dieser Zeit ihre Länge fast verdoppelt.

	Vor Eingipsen:	Nach Entgipsen:	Nach Eintauchen in heisses Wasser:
a	4,8 mm	5,0 mm	4,8 mm
b	12,3 -	12,6 -	12,2 -

Bei voller Entspannung, die nach den obigen Versuchen erreicht zu werden scheint, würden unsere Pflanzen allmählich die volle Turgorenergie gegen den äusseren Widerstand wenden, also für ein plasmolytisches Aequivalent von 2 Proc. Salpeter einen Druck von ungefähr 7,2 Atmosphären entwickeln. Das dürfte also ausreichend sein, um zur Besiegung der Hindernisse zu führen, welche diesen Pflanzen in der Natur der Regel nach in nicht zu hohem Grade entgegentreten. Spirogyra ist übrigens günstiger gestellt, als Chara, deren grosse Knospe relativ ansehnlichen Widerstand bedingt. In wie weit bei Spirogyra der geringe Durchmesser und die damit verknüpfte verhältnissmässig ansehnliche Reibung bei Durchwanderung eines widerstehenden Mediums ins Gewicht fällt, bleibt hier unerörtert (vgl. p. 278).

Nach einigen Versuchen scheinen allerdings Spirogyra crassa und bellis nicht im Stande den Widerstand eines Thones zu besiegen,

durch welchen die Wurzeln von Faba leicht ihren Weg finden. In Thon, der diesen Wurzeln 80 g resp. 40 g Widerstand entgegensetzte (p. 324), wurden Fadenstücke von Spirogyra so gebracht, dass sie dem aufgedrückten Deckglas angepresst und also dem Lichte und der mikrometrischen Messung zugänglich waren. Bei Aufenthalt im dampfgesättigtem Raum hatten nach 12 Tagen die Fäden in dem weicheren Thon 20—25 Proc. an Länge gewonnen, während in dem härteren Thon kein Zuwachs an den lebenden und nach dem Befreien wachsthumsfähigen Fäden eingetreten war.

XI. Versuche mit Grasknoten.

A. Allgemeines.

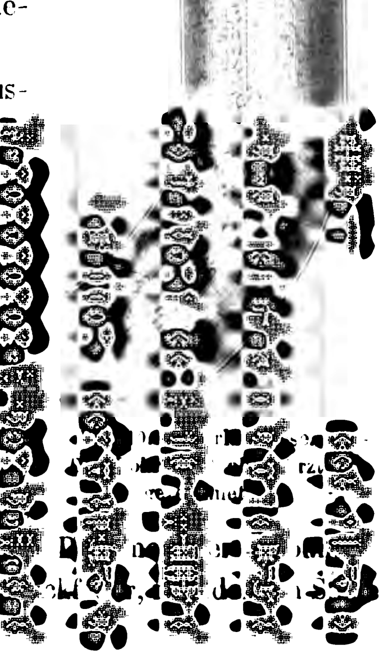
Trifft eine angestrebte Krümmung auf einen Widerstand, so kommt es zu einer erheblichen mechanischen Aussenleistung nur dann, wenn das Ausbiegen genügend vermieden ist. Deshalb üben die sich geotropisch krümmenden Wurzeln einen nur geringen Druck aus (p. 363), während die biegungsfesteren Stengel schon durch die Hebung der eigenen Last die Befähigung zu höherer mechanischer Arbeitsleistung demonstriren.

Wie hoch aber bei voller Vermeidung der Ausbiegung die Aussenenergie zu steigen vermag, habe ich nur für die geotropische Krümmung der Grasknoten studirt, welche in der That besondern Vortheil gewähren. Denn indem die geotropische Reizung nur das zur Krümmung nothwendige Wachsen veranlasst, schliesst sich diese Mechanik enger an die Variationsbewegung ausgewachsener Gelenke an. In anderen Pflanzen dagegen schreitet das Längenwachsthum während und nach der Krümmung fort und wenn man auch durch geeignete Anbringung eines Gipsverbandes die Ausführung der Krümmung auf eine kurze Strecke einschränken könnte, würde diese doch weiterhin so lange an Länge zunehmen, bis sie ausgewachsen ist. Würde man aber zwei aneinanderstossende Gipshüllen einseitig durch ein Gelenk verbinden, so wäre eine nach der Verbindungsstelle concave Krümmung die nothwendige Folge des nach Möglichkeit fortschreitenden Längenwachsthums und

... die entsprechend umgesetzte ... kung kommen. Durch solche ... bei fortwachsenden Pflanzen ... ümmungskraft nicht ermittelt

... bits ... gs- ... ben ... nde ... des ... uss, ... ein- ... rch ... ge- ... ung ... üm- ... tro- ... aus- ... ver- ... wohl ... von ... eide ... Re-

... Aus-

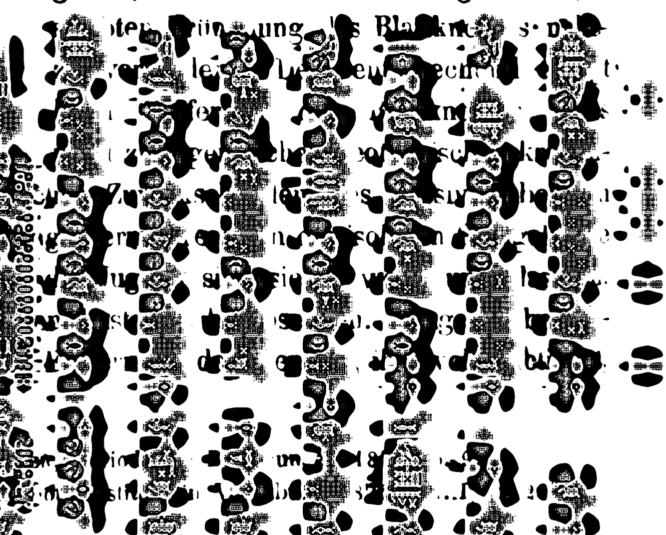


. 251) ein Häkchen angebracht war, theil-
eter[1]), das 16fach vergrösserte. Durch
itze des letzteren mit dem Messmikroskop
ausreichende Genauigkeit wie die Druck-
e, bis zur Erreichung des nöthigen Gegen-
e, zu vernachlässigende Krümmung aus-

schäftigenden Grashalmen wird bekanntlich
krümmung allein in den Knoten ausgeführt.
m sie in normaler Verticalstellung ausge-
keit, durch den geotropischen Reiz das zu
hsen aufzunehmen, eine Fähigkeit, die erst
t und die auch nur eine begrenzte Ver-
ne öftere Wiederholung der geotropischen



Geotropisch activ ist aber nur der der Blattscheide angehörende Theil des Knotens, sagen wir kurz der Blattknoten (*b* in Fig. 11). Der umschlossene Stengeltheil (*h*) verhält sich rein passiv. So lange er noch jugendlich und sehr wachsthumthätig ist, setzt derselbe keinen nennenswerthen Widerstand entgegen, allmählich aber nimmt letzterer zu, und kann mit dem Alter so weit gehen, dass er die Ausführung der ange-



gleichviel ob sie bei dieser Entfernung intact blieben oder in zwei oder mehrere Hälften gespalten wurden[1]).

Auf den besonderen biegungsfesten und wachsthumsfähigen Bau dieses Blattknotens müssen wir späterhin noch in etwas eingehen. Hier sei nur erwähnt, dass in dem Blattknoten und in der anschliessenden nur biegungsfest construirten Blattscheide[2]) der intercalar wachsende Halm eine volle Widerlage findet. Derselbe befindet sich also in einer analogen Lage, wie der in einem Gipsrohr gleitende Spitzentheil der Wurzel, dessen Plasticität er theilt. Wie die Wurzel vermag aber auch der Stengeltheil, bei solcher ein Ausbiegen verhindernden Widerlage, hohe Aussenenergie zu entwickeln und demgemäss unter Hebung der Last des Halmes in die Länge zu wachsen.

Obiges gilt zunächst für unsere Versuchsobjecte, für Triticum spelta; Tr. sativum; Hordeum vulgare; Secale cereale; Glyceria spectabilis und für die meisten Gräser. Indess gibt es auch Abweichungen. So sind im Knoten von Zea mais[3]) Halm und Blatttheil geotropisch activ und bei der mässigen Dicke des Blatttheils ist ein solches Zusammenwirken nöthig, um die hier in Betracht kommenden hohen Lasten zu überwinden. Ferner ist bei Mais das ganze junge Internodium mitsammt der Blattscheide merklich geotropisch, ein Verhalten, das in Andeutungen bei manchen anderen Gräsern gefunden wird. Die Wachsthumsrichtung z. B. der Rhizome von Triticum repens mag noch daran erinnern, dass nicht alle Grasknoten dieselben Eigenschaften besitzen müssen. Und für den Knoten von Tradescantia und Polygonum ist umgekehrt die Blattscheide der passive, das umschlossene Stengelstück der active Theil[4]).

B. Druckleistungen.

Sehen wir zunächst ab von der Ungleichwerthigkeit der Gewebecomplexe im Blattknoten, so ist doch die in diesem activen Gewebe-

1) Vgl. de Vries, Landwirthschaftl. Jahrbücher 1880, Bd. IX, p. 483.

2) Schwendener, Das mechan. Princip im anatom. Bau der Monocotylen 1874, p. 92.

3) Anatomisches über Zea mais bei de Bary, Vergleichende Anatomie 1877, p. 344; Strasburger, Bau und Verrichtung der Leitungsbahnen 1891, p. 340.

4) Ueber Passivität des Marks u. s. w., vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. II, p. 318.

ringe entwickelte Druckintensität aus den empirischen Druckbestimmungen noch weniger präcis ableitbar, als bei den in gerader Richtung fortwachsenden Organen.

Wie ich seiner Zeit in den Periodischen Bewegungen (1875, p. 99) entwickelte, ist auch der Krümmungsmechanismus in den Grasknoten einem Winkelhebel zu vergleichen, dessen Drehpunkt, resp. neutrale Achse, in unseren Knoten nahe unter der concav werdenden Flanke zu suchen ist. Man denke sich etwa an Stelle des Blattknotens einen Kautschuckcylinder gesetzt, der an der oberen Seite mit einem Stahlstreifchen verkittet ist, das mit den entsprechenden Theilen der den Blattknoten begrenzenden Gewebe fest verbunden ist. Der comprimirte Kautschuckcylinder ist an die Stelle des activ wachsenden Blattknotens getreten und entwickelt, wie dieser, eine Summe paralleler Kräfte gegen die plattenförmige Widerlage, die den einen kurzen Schenkel des Hebels bildet, dessen langer Schenkel das gegen den Messapparat wirkende Halmstück vorstellt.

Lässt man an Stelle des Kautschucks etwa ein cylindrisches Wurzelstück treten, so geht die Energie im Hebelsystem von diesem aus. Der Erfolg einer erzielten Krümmung aber mag ins Gedächtniss rufen, dass die mit dem Abstand von der neutralen Achse nothwendigerweise ungleiche Grösse des Zuwachses nichts über die Wachsthumsenergie und die potentielle Aussenenergie in den bezüglichen Bogenstücken aussagen kann, denn Wachsthum und Leistungsfähigkeit sind in diesem radiär gebauten Wurzelstücke symmetrisch vertheilt.

Die Höhe der Energie, welche gegen den Halm wirken muss, um die durch das Gelenk entwickelte Krümmungskraft zu äquilibriren, ist natürlich genau genug bestimmbar. Aus der Länge des Hebelarmes ergibt sich ferner das statische Moment für jeden Knotenquerschnitt. Das von uns für die Mitte des Knotens berechnete Moment fällt übrigens, bei Benutzung eines längeren Hebelarmes, für andere Zonen des Knotens nicht sehr verschieden aus.

Für eine exacte Berechnung der Energieentwicklung in dem activen Knotengewebe fehlt die correcte Kenntniss der Lage des Drehpunktes (der neutralen Achse) und die Angriffsweise der parallelen Kräfte, d. h. die Lage des Schwerpunkts.

Ein ziemlich sicherer Schluss auf die Lage der neutralen Achse ist aus den Krümmungen abzuleiten. Nach genauen mikrometrischen

Messungen an den sich schwach (20—25°) krümmenden Knoten von Triticum spelta und Hordeum vulgare ist die Verkürzung der Concavseite, gegenüber der Verlängerung der Convexseite gering, so dass hiernach bei einem 4 mm dicken Knoten die neutrale Achse etwa 0,25 mm unter der höchsten Stelle der Convexflanke su suchen ist[1]. Schwache Krümmungen aber sind zur Beurtheilung dieser Lage jedenfalls für unseren Zweck massgebender als stärkere Krümmungen. Doch ist zuzugeben, dass bei mechanischer Hemmung der angestrebten Bewegung die neutrale Achse eine Verschiebung erfahren könnte, die sie aber dann wahrscheinlich der Concavflanke nur noch mehr nähern würde.

Lassen wir aber die neutrale Achse mit dem höchsten Punkte der Concavseite zusammenfallen, so ist damit diejenige Lage des Drehpunktes angenommen, bei welcher eine gegebene Energiesumme den höchsten, möglichen Druck gegen den Messapparat entwickelt, also umgekehrt der gemessene Druck die geringste Energieentwicklung im Knoten erfordert.

Bei gleichmässiger Vertheilung der parallelen Kräfte im Knoten fällt der Schwerpunkt dieser in den Mittelpunkt des Knotenquerschnitts, während er bei bevorzugter Leistung der Unterseite nach der Convexflanke rückt, die er natürlich nie erreichen kann, da anderweitige Gewebe activ betheiligt sind. Der Schwerpunkt muss also zwischen diesen Extremen liegen. Demgemäss sind in der

1) Die Messungen wurden an Tuschmarken an zwei opponirten Stellen auf Strecken von etwa 0,6 mm ausgeführt (1 Mikrometerstrich = 0,013 mm), so dass bei der schwachen Krümmung die Differenz zwischen Sehne und Bogen vernachlässigt werden konnte. So ergab z. B. in einem Falle der 4 mm dicke Knoten von Triticum spelta nach einer Krümmung von 22° (auf den Winkel der beiden Halmstücke bezogen), wenn man den Abstand der Messmarken vor der Krümmung beiderseits zu 100 Mikrometerstrich annimmt, für die Concavkante einen Rückgang auf 96 Strich, für die Convexkante eine Verlängerung auf 164 Strich. Aus vier weiteren Versuchen berechnete sich in gleicher Weise annähernd die im Text erwähnte Lage der neutralen Achse. Uebrigens ergaben Messungen von Sachs (Arbeiten d. bot. Instituts in Würzburg 1872, Bd. I, p. 206) an den Knoten von Mais, welche der Methode wegen die Genauigkeit unserer Versuche nicht erreichen konnten, zumeist wohl auch sich auf stärkere Krümmungen beziehen, dass die Verlängerung der Convexseite 2,7- bis 20 mal ansehnlicher war als die Verkürzung der Concavseite. — Ueber die Lage der neutralen Achse in den nicht wachsenden Gelenken vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. II, p. 181.

folgenden Tabelle einmal die statischen Momente für diese Lage unter der Annahme berechnet, dass die neutrale Achse mit der Convexflanke zusammenfällt. Wahrscheinlicherweise ist der Schwerpunkt nahe der Mitte des Knotens zu suchen und die auf die Mitte bezogenen Werthe kommen deshalb wohl der Wahrheit am nächsten. Wenigstens ist der gesammte Blattknoten activ und bis dahin fordert keine Thatsache, dass bei Hemmung der Krümmung die untere Knotenhälfte in besonders bevorzugter Weise Energie entwickelt.

Thatsächlich ergeben die beiden Hälften eines längsgespaltenen Knotens gleiche Krümmung und gleiche Energie, doch ist, des möglichen Einflusses der Separirung halber, daraus kein vollgültiger Beweis zu entnehmen. Aus der nach der Concavseite abnehmenden Zuwachsgrösse kann aber, wie schon hervorgehoben wurde, kein Argument für eine gleichsinnige Abstufung der energetischen Leistung gegen eine Widerlage abgeleitet werden. Factisch müssen übrigens beim Krümmen alle Partieen des Blattknotens in einer ihrer Lage entsprechenden Weise activ, d. h. in correlativer Abhängigkeit wachsen, da, wie wir hören werden, die entwickelte Energie nicht ausreicht, um die Gefässbündelstränge passiv zu dehnen.

Mit der mechanischen Verhinderung des Krümmens, also bei unseren Messungen der Maximalleistung, fallen die passiven Widerstände des umschlossenen Halmstückes hinweg. Ebenso kommen die passiven Compressionen der Zellen der Concavflanke nicht zur Ausbildung, die bei ausgeführter Krümmung sich real einstellen[1]).

Nach diesen Gesichtspunkten sind in der Tabelle VII die in den Belegen unter gleicher Nummer aufgeführten Versuche zusammengestellt. Unter *a* steht die Versuchszeit, unter *b* der Durchmesser des Knotens, unter *c* die Querschnittsfläche der Mitte des Blattknotens. Columne *d* bezeichnet das aus der Druckmessung, in Bezug auf den Abstand der Mitte des Blattknotens und für den Hebelarm von 1 mm Länge, berechnete statische Moment. Die Division dieses durch den Radius des Knotens liefert das statische Moment, welches in der Mitte des Knotens wirksam sein muss, wenn in diesen der Schwerpunkt der parallelen Kräfte zu liegen kommt (Columne *e*), während bei Annahme des Schwerpunkts an der Convexkante das unter *f* verzeichnete,

1) Ueber Compressionen in Gelenken vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. II, p. 181.

also durch Division von *d* durch den Durchmesser erhaltene statische Moment erhalten wird. Der Quotient aus *e* und der Querschnittsfläche (*c*) kennzeichnet die Energie, welche, bei gleichmässiger Vertheilung dieser, für 1 qmm Querschnittsfläche in dem activen Blattknoten entwickelt werden muss, wenn der Schwerpunkt in der Mitte liegt und der Hebelarm dem Radius entspricht. In *h* ist dieser auf Atmosphärendruck ausgerechnete Werth aufgeführt.

In dem Versuche 42 mit Mais ist unter *c* die Querschnittsfläche des ganzen Knotens, also einschliesslich des umschlossenen Halmtheils, verzeichnet und in Bezug auf diesen Querschnitt sind auch die Werthe in der Columne *g* und *h* berechnet.

Tabelle VII.

Nr.	Versuchs-dauer	Durch-messer d. Knotens	Active Quer-schnitts-fläche	Statisches Moment für 1 mm	Statisches Moment f. d. Mitte d. Knotens	Statisches Moment für die Convex-kante	Energie e/c	
							pr. 1 qmm	in Atm.
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
				Triticum spelta				
38	159 Std.	4,2 mm	11,5qmm	3437 g	1637 g	818 g	141,7 g	13,7
39	94 -	4,4 -	12,0 -	4286 -	1948 -	974 -	162,3 -	15,7
				Triticum vulgare				
40	93 Std.	3,6 mm	8,2qmm	2291 g	1273 g	637 g	155,2 g	15,0
				Hordeum vulgare				
41	92 Std.	5,0 mm	13,4qmm	5006 g	2000 g	1001 g	149,3 g	14,4
				Zea maïs				
42	87 Std.	9,4 mm	69,4qmm	22110 g	4704 g	2352 g	67,8 g	6,6

Wie aus den Resultaten hervorgeht, findet in den Knoten eine sehr hohe Kraftentwicklung statt, zu der sie aber auch befähigt sein müssen, um z. B. unter Bewältigen des ansehnlichen Eigengewichts des Halmes die geotropische Hebung eines Halmes bewirken zu können (Kap. XI, E).

Dem entsprechend ist auch die in den activen Geweben entwickelte Intensität der Energie sehr ansehnlich. Wahrscheinlich wird

sie annähernd durch die in den Columnen *g* und *h* angeführten Werthe wiedergegeben. Jedenfalls kann diese Intensität nicht auf die Hälfte sinken, da dieses die unmögliche Lage des Schwerpunktes der Kräfte auf der Convexkante voraussetzt. Ja man darf sicher erwarten, dass dieser Schwerpunkt nicht um den halben Weg von der Mitte gegen die Convexkante vorrückt und selbst wenn dieses zuträfe, würde die Energie-Intensität doch nur von 15 Atmosphären auf 11,2 Atmosphären sinken. Dazu kommt, dass jede Verschiebung des Drehpunktes (der neutralen Achse), von der Concavseite gegen die Mitte hin für die Erzielung der gemessenen Leistung eine entsprechende Erhöhung der Energie-Intensität fordert.

Thatsächlich sind aber die heterogenen Elemente des Blattknotens nicht gleichwerthig und die unter Voraussetzung der Gleichwerthigkeit vorgenommene Reduction kennzeichnet deshalb nicht, wie schon bei Behandlung der Wurzeln (p. 276) erörtert wurde, die Leistung der einzelnen Zellen, welche theilweise sicherlich eine höhere Aussenenergie entwickeln.

Es ist deshalb auch nicht gesagt, dass in dem Knoten von Zea mais geringere Druckintensität erzeugt wird, da wir den Gesammtquerschnitt der Rechnung zu Grunde legten, während es wohl möglich ist, dass entweder der Blatttheil, oder der Stengeltheil des Knotens hervorragend in der Aussenleistung betheiligt ist.

Nach den Resultaten mit Triticum und Hordeum ist die Intensität der Aussenleistung in den geprüften Keimwurzeln geringer als in unseren Knoten, deren energetische Leistung die des Cambiums der Bäume erreicht, oder vielleicht übertrifft (p. 376).

Bei Hemmung des angestrebten Längenwachsthums kommt auch in den Grasknoten in correlativer Weise ein Dickenwachsthum zu Stande, das, wie längst bekannt ist, eine Hervorwulstung der unteren Gelenkhälfte herbeiführt[1]. Bringt man unsere Objecte so in einen Gipsguss, dass der Halm beiderseitig bis in die Nähe des Knotens fixirt, der Knoten selbst aber allseitig frei ist, so sind die Erfolge der geotropischen Reizung, bei Hemmung der Krümmung, schön zu beobachten. Nach 4—5 Tagen ist die genannte Hervorwulstung an mittelalten Knoten sehr gering und selbst an jüngeren Knoten oft

1) De Vries, Landwirthschaftl. Jahrb. 1880, Bd. IX, 482; Noll, Arbeit. d. botan. Instituts in Würzburg 1888, Bd. III, p. 509.

noch recht schwach, weiterhin kann sie aber sehr ansehnlich werden und selbst das Auftreten eines Spaltes zwischen oberer und unterer Knotenhälfte erzielen. Dieses ist wesentlich durch die entsprechenden Druck- und Zugcomponenten bedingt, welche durch das nach Thunlichkeit ausgeführte Längenwachsthum der Convexseite erzielt werden, ein Wachsthum, das auch die Abhebung des Blattknotens von dem umschlossenen Halm herbeiführen kann.

Eine Umgipsung des Knotens macht diese Wachsthumsvorgänge unmöglich, doch wird jetzt naturgemäss ein Druck gegen die Gipshülle ausgeübt. Ein näherer Verfolg dieses Druckes lag nicht in meinem Plane und so wurde nur ein Versuch mit einem Knoten von Cinquantino-Mais nach der Manier der Querdruckbestimmung ausgeführt. Es ergab sich dabei für den fixirten Knoten eine Energie des Querdrucks von 53,3 g pr. 1 qmm[1]).

Anders ist die Sachlage, wenn man den Halm durch Umgipsen zwischen zwei sich aneinander schliessende Gipsplatten bringt, von denen jede eine Längshälfte des Halmes und des Knotens umschliesst. Nach Horizontalstellung der Gipsplatten sucht dann der nach geotropischer Krümmung strebende Halm den oberen Gipsdeckel abzuheben und wenn die zur Verhinderung dieses Abhebens nöthige Energie bestimmt ist, so muss diese mit der Länge der im Gips steckenden Halmhälfte mutiplicirt werden, um das im Knoten krümmend wirkende statische Moment zu finden. Der Gewinnung exacter Resultate stellen sich indess einige Schwierigkeiten entgegen und so beschränke ich mich, ohne näher auf diese Versuchsanstellung einzugehen, darauf die Resultate eines Experimentes mit Hordeum vulgare mitzutheilen. Für den 4,2 mm dicken Knoten berechnete sich nach 7 Tagen für die Knotenmitte ein statisches Moment von 1814 g. Bei einer Querschnittsfläche des Blattknotens von 12,1 qmm ergibt sich daraus eine Druckintensität von 149,9 g, also zufällig ebensoviel wie in dem unter Nr. 41 in Tab. VII auf Hordeum bezüglichen Versuche.

Nach diesen und anderen Erfahrungen ist also eine geringe Hervorwulstung der abwärts gewandten Knotenhälfte ohne Bedeutung für die Aussenleistung. Die durch solches Wachsen erzielte, in den in Tab. VII

1) Wie und warum sich bei diesen vollen Wachsthumshemmungen die anatomischen Verhältnisse anders gestalten, als bei Ausbauchung des Knotens, wird in einer Arbeit von Dr. HEGLER dargethan werden.

mitgetheilten Versuchen kaum merkliche Vergrösserung der Querschnittsfläche wurde ohnedies mitbestimmt. Die geringe Verminderung des Querdurchmessers, welche das mit dem Aufhören des Gegendruckes sich vollziehende Krümmen bedingt, durfte ich ausser Acht lassen, da dadurch z. B. in einem concreten Falle eine Verkleinerung der Fläche von 12,6 auf 12,0 qmm bedingt war.

Die allmählich ansehnlicher werdende geotropische Anschwellung veranlasst während längerer Zeit ein langsames Ansteigen der gegen den Messapparat ausgeübten Druckwirkung. Ich habe indess dieses, sowie überhaupt den Gang der Druckzunahme nicht näher verfolgt. Die in den Tabellen (Anhang Abth. VI) berechneten stündlichen Zunahmen lassen denselben Verlauf erkennen, wie wir ihn für Wurzeln und Keimstengel fanden. Doch muss in diesem Reizvorgange im Grasknoten die Bewegung und somit auch der Druck zunächst langsam beginnen. Davon lassen aber unsere Versuche naturgemäss nichts erkennen, da die erste Ablesung erst lange nach Beginn des Versuches geschah und da zudem sogleich mit dem Beginn ein gewisser Gegendruck gegen den Halm eingestellt wurde.

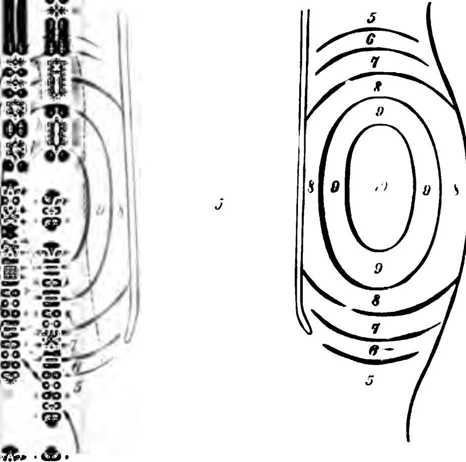
C. Turgorverhältnisse.

Die mechanische Vermittlung der Aussenleistung kommt in den Grasknoten ebenfalls durch entsprechende Entspannung zuwege, die, analog wie bei den Wurzeln, von einer Turgorschwellung begleitet sein kann. Eine solche wurde bisher bei der mechanischen Hemmung der geotropischen Bestrebungen im Knoten von Hordeum vulgare beobachtet, während unter gleichen Umständen der Turgor in den Knoten von Triticum vulgare und spelta unverändert blieb und nach flüchtigen Beobachtungen scheint es, dass sich wie die letztgenannten Pflanzen auch Triticum polonicum und Glyceria spectabilis verhalten.

Die Grasknoten sind schon deshalb keine günstigen Versuchsobjecte, da wohl die gleichen Gewebepartien in demselben Gelenk annähernd gleichen Turgor besitzen, in verschiedenen Gelenken derselben Pflanze aber erhebliche Differenzen bieten, so dass z. B. in Triticum und Hordeum der plasmolytische Grenzwerth des Aussen-

... zwischen 5—9, der des inter-
... —12 Proc. Kalisalpeter gefunden

... einzelnen Knoten eine Turgorver-
... Zügen durch die nebenstehende



... Darstellung der Turgorvertheilung in dem ...rten medianen Längsschnitt des Knotens ...um vulgare. In der linken Blattknoten- ... der Verlauf des Gefässbündels punktirt angegeben.

... Turgor sich nicht sprungweise

... Parenchym aus nimmt der Turgor
... Proc. Salpeter ab. Dieser Abfall
... Knotens noch weiter, so dass nach

hoch, dass in jedem Falle eine höhere osmotische Energie zur Verfügung steht als in den Wurzeln.

Schon die Erfahrungen mit Hordeum sprechen entschieden dafür, dass nicht etwa geotropisch eine transitorische, unter dem Einfluss von Salpeter schwindende Turgordifferenz inducirt wird (vgl. p. 295). Die directe empirische Bestätigung hierfür ergab sich durch Controle der Biegungsfestigkeit in den Knoten von Triticum vulgare, welche geprüft wurde: 1) nachdem die Knoten 3 Tage im Gipsverband horizontal gehalten worden waren; 2) nach darauf folgender einstündiger Behandlung mit 7proc. Lösung von Kalisalpeter und 3) nachdem die Knoten durch einstündigen Aufenthalt in Wasser wieder völlig turgescent geworden waren. Sie ergaben nun dieselbe Biegungsfestigkeit wie sogleich nach dem Entgipsen, d. h. die durch den Salpeter sehr stark deprimirte Biegungsfestigkeit kehrte im Wasser voll auf den ursprünglichen Werth zurück.

D. Die Mechanik der Aussenleistungen.

Auch in den Grasknoten wird die Aussenleistung erreicht, indem die Turgorenergie gegen die Widerlage gelenkt wird, doch ist diese Vermittlung, in Rücksicht auf die Verschiebung der ansehnlichen Gewebespannung, etwas näher zu betrachten.

Der allein active Blatttheil des Knotens wird bekanntlich von ringförmig angeordneten Leitbündeln durchzogen, welche durch das umgebende dünnwandige Parenchym in Zugspannung versetzt sind (Fig. 11 p. 390 und Fig. 13). Beim Isoliren verlängert sich dieses positiv gespannte Parenchym in unseren Objecten um 30 bis 40 Proc., während das Leitbündel sich um weniger als 1 Proc., also bei der geringen absoluten Länge in einer für das freie Auge nicht bemerklichen Weise verkürzt.



Fig. 13. Stück des Querschnitts aus dem Blatttheil des Knotens v. Tritic. spelta. Auf der Innenseite der Leitbündel ist der Xylemtheil markirt.

Diese Gefässbündel bestehen ganz vorwiegend aus dickwandigem Collenchym; Xylem und alle anderen Elemente sind also auf ein Minimum reducirt und es mag deshalb erlaubt sein, schlechthin von Collenchymsträngen zu reden. Mit dem Austritt aus dem Blattknoten

wird das Collenchym durch Sclerenchymfasern ersetzt und damit geht die biegungsfeste und zugleich wachsthumsfähige Construction verloren, welche in dem Knoten factisch erzielt ist[1]). Die bedeutende Mächtigkeit der Gefässbündel — sie nehmen bei Triticum etwa 30 Proc. des Querschnitts im Blattknotenringe ein (vgl. Fig. 13) — kommt der Festigung des Knotens des weiteren zu statten.

Die Collenchymstränge verbinden also, als genügend feste Pfeiler, die dem Blattknoten sich anschliessenden Gewebemassen, so dass diese als Widerlage dem positiv gespannten Parenchym des Knotens dienen können, das natürlich überall mit den Leitbündeln fest verkettet ist. Das Parenchym aber vollbringt die zur Erzielung der Zugspannung nöthige Aussenleistung in principiell gleicher Weise wie ein Gewebe, das gegen einen Gipsverband oder gegen einen umhüllenden Kautschuckschlauch zu arbeiten hat, d. h. also durch Entspannen der Zellhaut vermittelst des entsprechenden Flächenwachsthums (p. 379). Und zwar wurde dieses Entspannen hier so weit getrieben, dass ganz oder nahezu die volle Turgorkraft zur Wirkung gegen die lebendige Widerlage kam, eine Kraft, die indess bei der hohen Elasticität der Collenchymstränge nur eine sehr geringe Verlängerung dieser zur Herstellung einer äquivalenten Gegenspannung benöthigte. Mit dieser Zugkraft ist die Elasticitätsgrenze der Collenchymstränge noch lange nicht erreicht und wenn bei geotropischer Reizung des Grasknotens neues Wachsen beginnt, so ist eben durch diesen Reiz ein actives Wachsen in den Collenchymsträngen veranlasst, ein Wachsthum, welches diese Stränge mit dem Krümmen in der unteren Hälfte des Knotens auf die doppelte Länge zu bringen vermag.

Dieses durch die geotropische Reizwirkung veranlasste Wachsen im Collenchym wird auch aufgenommen, wenn die mechanische Hemmung die Ausführung der angestrebten Krümmung unmöglich macht. Mit Verlängerung des Bündels aber wird die bis dahin von dem Collenchym getragene Aussenenergie des Parenchyms disponibel und demgemäss gegen die Widerlage gerichtet. Diese Uebertragung schreitet so lange fort, bis endlich die ganze Druckkraft des Parenchyms gegen die Widerlage wirkt, bis also das Collenchym die Zugspannung verloren hat.

1) Vgl. Schwendener, Das mechan. Princip im Bau d. Monocotylen 1874, p. 92.

Bis dahin diente das Wachsthum im Collenchym nur dazu, die Aussenenergie des Parenchyms auf einen anderen Körper zu übertragen, und sofern schon gegen das Collenchym die höchste Aussenleistung entwickelt war, ist eine Steigerung über dieses Maass ausgeschlossen. Von da ab setzt aber das Collenchym sein Hautwachsthum fort und bringt hierdurch auch seine Turgorkraft gegen die Widerlage zur Wirkung. Das Collenchym kommt dadurch, ebenso wie das Parenchym, in positive Spannung gegen den äusseren Widerstand, der frühere Spannungsantagonismus zwischen beiden Geweben ist jetzt somit aufgehoben. Doch kehrt dieser sogleich nach Beseitigung des äusseren Hemmnisses wieder, da das hoch elastische Collenchym schon nach sehr geringer Verlängerung dem ansehnlichen Verlängerungsstreben des Parenchyms Schranken setzt[1]).

Selbstverständlich kommt es nur zu einer entsprechenden Verminderung besagter Gewebespannung, wenn der Grashalm schon durch das Aufbieten eines Theils seiner potentiellen Energie das Hemmniss besiegt und vor sich herschiebt. Jetzt wächst also das Collenchym, trotz der verminderten Zugspannung, weiter und um gegen einen grösseren Widerstand die eigene Turgorenergie zur Wirksamkeit zu bringen, hat das activ thätige Collenchym in derselben Weise zu verfahren, die auch sonst dazu dient, die bis dahin von der Zellwand getragene Turgorspannung nach aussen zu wenden. Die besagten Spannungsverschiebungen aber sind die naturgemässe Folge davon, dass das Flächenwachsthum der Haut bei unbesiegbarem mechanischen Widerstand nach Möglichkeit fortschreitet und dass demgemäss in dem schon auf seinen Grenzwerth zuvor angelangten Parenchym das fernere Wachsen ebensogut stille steht, wie in einer Wurzel, die auch nicht mehr weiter wächst, nachdem in einem Gipsverband die höchste Aussenleistung erreicht ist.

Der besprochene Erfolg sagt also nur aus, dass im Streben nach Wachsthum Collenchym und Parenchym gegen eine Widerlage in gleichem Sinne reagiren. Die normal gebotenen Spannungsverhältnisse und Eigenschaften bringen es aber mit sich, dass das Wachs-

1) Eine Verschiebung der Spannungsverhältnisse wird stets erzielt, wenn man Gewebe genügend comprimirt. Uebrigens spielen sich Verschiebungen und Umkehrungen der Gewebespannungen im Leben vielfach ab, so z. B. auch wenn ein Anfangs positiv gespanntes Mark späterhin negativ gespannt wird.

thum des Collenchyms die Uebertragung der Aussenenergie des Parenchyms gegen einen fremden Widerstand regelt und ebenso dafür sorgt, dass bei Aufhebung des Widerstandes das Parenchym in den ihm normal gezogenen Schranken gehalten wird. Bei den specifisch verschiedenen Reactionsvermögen muss es natürlich nicht jede Pflanze und nicht jedes Gewebe bei mechanischer Hemmung des Wachsens bis zur völligen Entspannung der Zellhaut bringen und so ist es auch verständlich, dass in den eingegipsten Keimstengeln sich das normale Spannungsverhältniss, wenigstens dem Sinne nach, erhält (p. 380), wie es anderseits auch klar ist, dass ein positiv gespanntes Parenchym so lange seine Aussenleistung steigern kann, als es nicht zur totalen Entspannung gekommen ist.

Mit Rücksicht auf die Zellmechanik der Aussenleistung bietet also der Grasknoten in principieller Hinsicht nichts Neues. Auch ist schon betont (p. 291), dass die Gewebespannung im Wesen der Druckleistung gegen einen Widerstand nichts ändert. In der That würde in dieser Hinsicht der Gesammteffect derselbe bleiben, wenn, unter Ausfall der Collenchymstränge und der Gewebespannung die einzelnen Zellwandungen des Parenchyms entsprechend verstärkt und elastisch gemacht wären, wenn also jetzt die von dem Wachsthum und der Elastizität der Haut besorgte Regulation bei steigendem und fallendem Aussenwiderstand von jeder einzelnen Zelle besorgt würde.

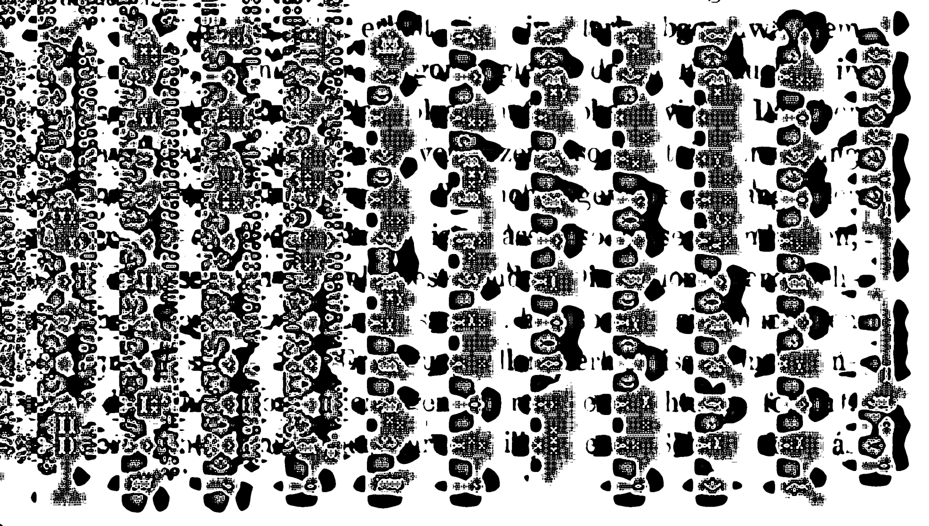
Für die gemessenen Leistungen reicht die sehr ansehnliche Turgorenergie aus, denn durch 8 Proc. Salpeter — dem ungefähren osmotischen Aequivalente im Parenchym — wird ein Druck von ungefähr 28 Atmosphären entwickelt. Bei solcher Intensität genügt aber schon das Parenchym, um z. B. die im Versuch 39 (Tab. VII) verzeichnete Leistung zu erzielen. Denn wenn die active Fläche auch nur $\frac{3}{4}$ des Blattknotenquerschnitts (also 9 qmm) ausmacht, fordert der Befund dieses Experimentes nur 21,6 Atmosphären Druckintensität. Thatsächlich ist aber auch das Collenchym activ, wenn auch, bei der Dicke der Zellwandungen, die wirksame osmotische Fläche nicht gross ausfüllt. Solche hohe Leistungen sind schon ohne jede Turgorschwellung möglich, die ohnehin nicht in allen Grasknoten bei Reaction gegen eine Widerlage eintritt.

… te möge noch Folgendes mitgetheilt

… Gefässbündels ergeben die noch mit-
… doch zeigen auch directe Messungen,
… rch die im Gelenk auf ihn wirkenden
… Dimensionsänderung erfährt. Denn
… en kommt beim Tödten oder Plasmo-
… chymstrang und mit ihm im Knoten,
… 1 Proc., d. h. von 0,05 mm in einem
… de.

… bemerkt, das umgebende Parenchym
… n einer Längslamelle des Knotens stellen
… ungen ein. Einen Einblick in den Sinn
… ungen gewährt auch eine nach Art von
… gestellte Lamelle. An der einst ebenen
… fläche sind nach *q* hin inneres (*i. p.*)
… es (*r. p.*) Parenchym convex hervor-
… nd haben durch ihre Zugwirkung die
… ave Krümmung des Gefässbündelquer-
… *c.* erzielt. Die Epidermis bewahrt, bei-
… rkt, beim Isoliren annähernd die Länge,
… im intacten Knoten besitzt.

… ge dieser Hervorwulstung des Paren-
… heinen an einem Querschnitt durch den
… Gefässbündel erheblich eingesenkt und





ganze Parenchymgewebe, mit Ausnahme der Epidermis und vielleicht der nächst anstossenden Zelllage.

Die constante Länge der vertical stehenden Grasknoten beweist unmittelbar, dass durch die auf das Gefässbündel wirkende Dehnkraft die Elasticitätsgrenze desselben nicht überschritten wird. Um eine solche Ueberschreitung zu erzielen, muss das Collenchym einen Zug von mehr als 1 bis 2 kg für 1 qmm erfahren[1]), eine Spannkraft, die thatsächlich in dem Grasknoten nicht erreicht wird. In einem concreten Falle betrug z. B. die Querschnittsfläche des Blattknotens von Triticum spelta 11 qmm, wovon 3,3 qmm auf das Gefässbündel, 7,7 qmm auf das Parenchym fielen. Dieses entwickelt eine absolute Kraft von etwa 2,3 kg, welche sich auf 3,3 qmm vertheilen, so dass 1 qmm des Gefässbündelstranges mit 0,7 kg gespannt wird. Selbst bei reichlicher Verdoppelung dieser Zugkraft, erreicht durch Anhängen eines Gewichts von 2,5 kg, erwies sich der Knoten noch vollkommen elastisch, während das Anhängen von 5 kg eine merkliche Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze erzielte[2]). Nach dem Tödten durch Eintauchen in heisses Wasser fällt die Turgorspannung hinweg und jetzt brachte eine Belastung mit 5 kg, d. h. ein Zug von ungefähr 1,5 kg für 1 qmm, keine Dehnung über die Elasticitätsgrenze hervor. Innerhalb der Elasticitätsgrenze lassen die Knoten und ebenso die thunlichst isolirten Leitbündelstränge eine Verlängerung von 1—1,5 Proc. zu.

Die in dem Knoten wirksame Spannkraft ist also nie im Stande, eine plastische Dehnung des Collenchyms herbeizuführen. Dieses bewahrt auch gleiche Elasticitätsverhältnisse während des geotropischen Wachsens oder wenn die Ausführung dieses durch mechanischen Widerstand unmöglich gemacht ist, d. h. es ändert seine Elasticität nicht in einer bleibenden, durch den Versuch nachweisbaren Art. Uebrigens wird auch das Wachsen thatsächlich nicht durch mechanische, plastische Dehnung vermittelt (Kap. XIII).

---

1) Nach Ambronn; vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. II, p. 11. — Ueber Einfluss von Tödten auf das Collenchym vgl. J. Cohn, Jahrb. f. wiss. Bot. 1892, Bd. 24, p. 171.

2) In diesen und ähnlichen Versuchen kann man mit Vortheil die Objecte durch Eingipsen in Glasröhren fixiren, die zum Befestigen an ein Stativ, resp. zum Anhängen des Gewichts dienen.

Das zum Entspannen führende Wachsen des lebensthätigen Collenchyms im Gipsverbande ist in keiner Weise merkwürdiger wie das entsprechende Wachsen anderer Zellen. Dieses Wachsen ist aber eine absolute Nothwendigkeit, um überhaupt die hohe Energie des Parenchyms gegen die Widerlage zu lenken. Mit dem Wachsen ist ferner eine Abnahme der Spannung zwischen Collenchym und Parenchym unvermeidlich und nach den vorliegenden Erfahrungen geht das Collenchym schliesslich in positive Spannung gegen die Widerlage über. Dieses ist zwar, bei den geringen elastischen Dimensionsänderungen, durch directe Messungen am Collenchymstrang vor und nach dem Eingipsen kaum sicher zu ermitteln, wohl aber auf andere Weise nachzuweisen.

Eingegipste und 2 bis 4 Tage horizontal gehaltene Halme krümmten sich nämlich gleich nach dem Entgipsen um 5 bis 8 Grad und dieses trat auch dann ein, wenn längsgespaltene und von dem umschlossenen Stengel befreite Knoten angewandt wurden, also wenn ein sehr vollständiges und allseitiges Anschmiegen an die Widerlage erreicht war. Beim Tödten durch heisses Wasser geht diese Krümmung auf 3 bis 4 Grad zurück und erscheint in dieser Ausdehnung auch dann, wenn dieses Tödten vor dem Entgipsen vorgenommen wurde. Ein solches Krümmen fordert aber eine Verlängerung, die für die Convexflanke, in annähernder Uebereinstimmung mit der Rechnung, durch mikrometrische Messung zu 11—16 Proc. gefunden wurde, und die in den der convexen Flanke näheren Partieen des Collenchymbündels eine Längenzunahme von mindestens 8—9 Proc. verlangt. Zu einer derartigen elastischen Verlängerung ist das Gefässbündel nicht befähigt; für ein plastisches Ausziehen fehlt die Kraft und so ist die Thatsache nur folgendermassen zu verstehen: das nach Wachsthum strebende Collenchymbündel stemmte sich, activ drückend, gegen die beiderseits gebotene Widerlage und in Folge dieses Längsdruckes kam ein gewisses seitliches Ausweichen zu Stande. Ein solches geringes Ausweichen ist in der That innerhalb des Gewebes des Blattknotens wohl möglich, ohne dass sich dieserhalb der äussere Umriss des Organes merklich ändern muss und es genügt hier wohl daran zu erinnern, dass neben gewissen Verschiebungen auch Compression von Parenchymzellen u. s. w. eine Rolle spielen kann.

Die positive Druckentwicklung des Collenchyms fordert aber wieder die mehr oder weniger weitgehende Lenkung der Turgorkraft gegen die Widerlage, wenn man nicht eine besondere, von den dünnwandigen Zellen abweichende Entwicklung der Aussenenergie annehmen will. Zugleich muss sich aber die Frage aufdrängen, ob nicht etwa, nach voller Entspannung der Haut, die Collenchymzelle noch fortwuchs und durch Intussusceptionswachsthum der Wandung, d. h. durch Ausscheidungsenergie, noch weitern Druck gegen die Widerlage entwickelte. Möglich wäre solches sehr wohl (Kap. XIII), doch fordern die bisherigen Erfahrungen diesen Vorgang nicht nothwendig und für die Aussenleistung der Knoten ist die zur Verfügung stehende osmotische Energie thatsächlich genügend.

E. Vorgänge beim Ausführen der Krümmung.

In der Action gegen eine unverrückbare Widerlage sind auch die Grundzüge für die Beurtheilung der Leistungen bei Realisirung der angestrebten Krümmungsbewegung gegeben, in der aber doch besondere Verhältnisse und Bedingungen geschaffen werden. Ganz abgesehen von der stets nur begrenzten Krümmungsfähigkeit, von der Abnahme der geotropischen Reizung mit zunehmender Aufrichtung u. s. w., ist u. a. zu bedenken, dass mit dem Wachsen die gesammte auf die Ausführung dieses berechnete regulatorische Thätigkeit ins Spiel tritt.

Hierzu gehört die je nach dem zu bewältigenden Widerstand ungleiche Abschwächung der negativen Spannung des Collenchymstranges (p. 402). Und wenn für die Leistung von Aussenarbeit die früher entwickelten Principien allgemein gelten, so ist doch im Speciellen den mit der Krümmung sich ändernden Verhältnissen Rechnung zu tragen. Dazu zählt u. a. die durch Faltungen kenntlich werdende, mit zunehmender Krümmung sich steigernde passive Compression der Concavseite. Während so an dieser der Widerstand wächst, nimmt die Action und die Wachsthumsthätigkeit in dem Parenchym der Convexseite ab, so dass schliesslich bis auf das Collenchym reichende Risse auftreten können, d. h. das Parenchym wurde endlich gegen das noch activ fortwachsende Collenchym in negative Spannung gebracht.

Besser als durch diese Einreissungen im Gewebe kann die Rissbildung in aufgetragener Tusche zeigen, dass die neutrale Achse sehr nach oben gerückt liegt, wie das die schon besprochenen Messungen (p. 392) lehrten. Diese bezogen sich freilich nur auf geringere Einkrümmungen und lassen, wie meine anderweitigen Untersuchungen, die Frage offen, ob mit dem Fortschreiten des Einkrümmens die neutrale Achse eine Verschiebung erfährt.

Trotz des Antagonismus in gewissen Geweben muss doch im Allgemeinen die Ausgiebigkeit des Wachsens in den von der neutralen Achse ungleich entfernten Zonen regulatorisch gelenkt werden. Insbesondere gilt dieses auch für das Collenchym, das durch die im Gelenk entwickelbare, maximale Energie nicht plastisch dehnbar ist, dessen active Wachsthumsfähigkeit also dem verschiedenen Abstand von der neutralen Achse entsprechen muss.

Als Folge der während des Krümmens fortbestehenden Gewebespannung kommt beim Längsspalten des Halmes eine Zunahme der Krümmung in der oberen Hälfte, eine Abnahme in der unteren Hälfte zu Stande, analog wie solches in anderen geotropisch wachsenden Stengelorganen gefunden wird. Deshalb wird aber doch in jedem Krümmungsbogen, resp. in der entsprechenden Lamelle, in activer Weise Krümmung erstrebt. Es ergiebt sich dieses aus verschiedenen, hier nicht zu discutirenden Thatsachen. Und in Uebereinstimmung hiermit krümmt sich nach dem Halbiren des Halmes jede der beiden Längshälften ungefähr gleich schnell, gleichviel ob die Schnittebene aufwärts oder abwärts gewandt ist[1]).

Die Schnelligkeit der Krümmung ist indess kein Maassstab für die Energie und speciell für die gegen eine unverrückbare Widerlage ausgeübte Druckleistung. Neben den durch das Spalten veranlassten internen Reactionen fallen rein mechanische Momente ins Gewicht, so schon der Umstand, dass das Gelenk und somit der in diesem liegende Hebelarm auf die halbe Höhe reducirt sind. Bei so verwickelter Sachlage kann ich auch auf einen Versuch kein Gewicht legen, in welchem die obere und untere Hälfte eines Halmes von Hordeum vulgare, jede für sich, in der dem intacten Halm entsprechenden Stellung gleichzeitig auf ihre geotropische Druckenergie geprüft wurden.

1) Vgl. de Vries, Landwirthschaftl. Jahrbücher 1880, Bd. 9, p. 483.

Nach 3 Tagen ergab sich als statisches Moment für die obere Knotenhälfte (6,4 qmm Querschnitt) 806 g, für die untere (6,2 qmm Querschnitl) 698 g. Die Summe der Leistungen = 1504 g bleibt also weit zurück hinter dem statischen Moment von 5006 g, welches ein nur sehr wenig stärkerer intacter Knoten von Hordeum vulgare erzielte (Versuch 41 p. 395). Diese Leistung wird auch nicht erreicht, wenn man obige Summe von 1504 g, mit Rücksicht auf den im halbirten Knoten kürzeren Hebelarm, verdoppelt.

Geotropisch activ ist, wie schon erwähnt (p. 390) zumeist nur der Blatttheil des Knotens. Der noch jugendliche Stengeltheil ist so plastisch wie die wachsende Wurzelspitze und setzt deshalb der Krümmung nur geringen Widerstand entgegen. Allmählich gewinnt aber der Stengeltheil mehr Elasticität und sein Widerstand kann so weit wachsen, dass er die Krümmung ganz hindert, was ich besonders schön an alten Knoten der Glyceria spectabilis beobachtete. In Folge solcher Spannung schnellt bei Entfernung des Blattknotens der elastisch gebeugte Stengel erheblich, bis 30 Grad und mehr, zurück. Die zur Wiederherstellung der Krümmung nöthige Kraft gibt aber ein Maass für den Widerstand, welcher der Krümmungsthätigkeit des Blattknotens entgegen wirkte. Dieser Widerstand entsprach in mittelalten und sich kräftig geotropisch krümmenden Halmen einem statischen Moment von 400 und von 730 g. In entsprechendem Maasse ist also die Arbeitsfähigkeit des sich krümmenden Halmes gegen ein anderes äusseres Hemmniss vermindert. Bei Vermeidung der Ausbeugung, also in unseren Druckmessungen kommt aber diese Hemmung nicht oder doch nur in geringem Grade in Betracht.

Die mit dem Alter ohnehin abnehmende Actionsfähigkeit der Knoten wird durch den mechanischen Widerstand des umschlossenen Stengeltheils noch mehr herabgedrückt; die alten Knoten verlieren eben an geotropischer Hubkraft, während sie an Tragfähigkeit und Biegungsfestigkeit gewinnen. Thatsächlich sind auch oft alte Gelenke nicht mehr fähig, den horizontal gelegten Halm durch geotropische Krümmung zu heben, während sie, wie auch der Halm überhaupt, dessen Last, natürlich mit entsprechender Ausbiegung, zu tragen vermögen. Freilich tritt auch mit dem Heranreifen der Frucht in der Aehre eine erhebliche Zunahme des Gewichtes ein, dem durch seine Lage am

Halmende, in Bezug auf den untersten Knoten, ein sehr hohes statisches Moment entspricht. Von diesem Gesichtspunkt ist der obere Knoten weit besser situirt und wenn in ihm, wie in jedem Knoten, mit der Hebung, resp. der Einkrümmung, die Energie schwächer wird, so vermindert sich doch zugleich mit der Annäherung an die Verticalstellung der Hebelarm und damit die dem Gelenke entgegenwirkende Last. Hand in Hand damit wird das statische Moment in Bezug auf jeden folgenden Knoten verringert, so dass jetzt vielleicht die Krümmung in einem Knoten beginnt, der bisher die Last nicht zu bewältigen vermochte.

Bei der apicalen Lage der Aehre und der ansehnlichen Länge des Halmes ist das statische Moment für den basalen Knoten eines horizontal gehaltenen Grashalmes sehr ansehnlich. Zur Ermittlung dieses statischen Moments bestimmt man den Schwerpunkt, den Punkt bei dessen Unterstützung der Halm in horizontaler Lage balancirt, ferner das Gesammtgewicht. Das Product dieses mit der Distanz des Schwerpunktes von der Basis ist das in Bezug auf diesen Punkt gesuchte statische Moment.

Ein kräftiger 1,46 m hoher Roggen, dessen Aehre der Reife entgegen ging, wog z. B. 8,5 g. Da der Schwerpunkt von dem basalen Knoten 630 mm entfernt war, so hatte, bei Horizontalstellung des Ganzen, das 5,5 mm dicke Gelenk einer Kraft entgegenzuwirken, die, in Bezug auf einen Hebelarm von 1 mm, einem statischen Moment von 5355 g entsprach.

Für ein etwas jüngeres Exemplar von Triticum vulgare, dessen basaler Knoten annähernd den in Versuch 40 (p. 395) angegebenen Dimensionen entsprach, ergab sich ein statisches Moment von 2500 g. Da der Versuch 40 aber als Maximalleistung ein statisches Moment von 2291 g verzeichnet, so ist zur Bewältigung des Momentes von 2500 g kaum ein jüngerer Knoten geeignet, ein älterer mit schon starrem Stengeltheil aber nicht mehr befähigt. Ohne weiteres Eingehen auf Details mag nur noch erwähnt sein, dass für einen blühenden, kräftigen, 1,04 m hohen Cinquantinomais, bei Horizontalstellung, für die Basis ein statisches Moment von 46,2 kg ermittelt wurde.

F. Bemerkungen über die Krümmungsmechanik.

Es dürfte hier am Platze sein, einen kurzen Ausblick auf die Mechanik der Krümmungsbewegungen anzuschliessen, wenn ich auch thatsächlich nichts principiell Neues den in der Physiologie (Bd. II, p. 177) entwickelten, aber öfters nicht genugsam beachteten Grundzügen hinzuzufügen habe.

Selbstverständlich ist zur Erzielung der Krümmung eine relativ ungleiche Verlängerung der antagonistischen Hälften nothwendig und dieses Ziel wird entweder durch entsprechende Vertheilung des Wachsthums (Wachsthumskrümmung) oder durch elastische Dehnung der Zellwände (Variationsbewegung) erreicht. Der Krümmung an sich aber vermag man, ebensowenig wie einer Bewegung überhaupt, anzusehen, mit welchen Energie- und Hilfsmitteln sie erreicht wurde. Die Aufdeckung dieser ist eben eine der Aufgaben und diese fällt bei Wachsthumsbewegungen mit der Ermittlung der Wachsthumsmechanik zusammen, die durchaus nicht in allen Fällen völlig identisch sein muss, ja im weitern Rückverfolg auf die Kette der maassgebenden und mithelfenden Factoren sicher sehr oft Differenzen aufzuweisen hat.

Da aber eine Turgorsteigerung keineswegs eine allgemeine Bedingung für die Beschleunigung des Wachsens ist, so ist eine Turgorsteigerung, resp. eine Turgordifferenz auch nicht als allgemeine oder primäre Ursache der das Krümmen herbeiführenden Wachsthumsvertheilung zu erwarten. Wo während des Krümmens eine Turgorsteigerung sich einstellt, werden wir dieselbe vielmehr als ein unterstützendes Mittel im analogen Sinn anzusehen haben, wie in den Leistungen gegen Widerstände, in denen ebensowohl Veränderlichkeit als Constanz des Turgors gefunden wird.

In Triticum vulgare und spelta, in deren Knoten bei voller mechanischer Hemmung der Krümmung eine Turgorschwellung fehlt, bleibt eine solche begreiflicherweise auch aus, wenn die Krümmung, unter Leistung geringer oder ansehnlicher Aussenarbeit, realisirt wird. In Hordeum dagegen wird die Turgorschwellung um so ansehnlicher, je höher der zu überwindende Widerstand ist. Fehlt deshalb eine Turgorsteigerung unter normalen Krümmungsbedingungen, so ist nicht

ausgeschlossen, aber nicht nothwendig, dass jene sich bei Steigerung des zu bewältigenden Widerstandes einstellt. Thatsächlich scheint eine Turgorsteigerung in normalen Wachsthumskrümmungen häufig nicht einzutreten und Wortmann[1]) sowie Noll[2]) vermissten eine solche in den von ihnen untersuchten geotropischen Krümmungen gänzlich. Ja diese Forscher beobachteten sogar bei Krümmungsbewegungen, in dem schneller wachsenden Gewebe der Convexhälfte, eine geringe Abnahme der Turgorkraft. Ein solches Verhalten ist übrigens gut zu verstehen, da auch das Constanterhalten der Turgorkraft eine regulatorische Thätigkeit fordert und schliesslich jede Selbstregulation nur innerhalb gewisser Grenzwerthe eine Differenz zu vermeiden vermag (vgl. p. 304).

Dagegen können bei constanter Elasticität der Zellwand Bewegungen nur durch Turgorveränderungen erzielt werden und dieses Mittel ist bei den Reizbewegungen der Staubfäden der Cynareen, der Gelenke von Mimosa u. s. w. in der Pflanze dienstbar gemacht. Auch die geotropischen und heliotropischen Variationskrümmungen der Gelenke von Phaseolus u. s. w. mag die real gefundene Turgoränderung[3]) betreiben, wenn es auch noch fraglich bleibt, ob letztere allein in diesen und den nyctitropischen Variationsbewegungen entscheidend ist[4]).

Schon der Vergleich der Variations- und Wachsthumsbewegungen lehrt, dass die mechanischen Mittel der Ausführung selbst dann

1) Berichte d. botan. Gesellschaft 1887, p. 961.

2) Arbeit. d. bot. Instituts in Würzburg 1888, Bd. III, p. 511. Vgl. auch Pfeffer, Energetik 1892, p. 227.

3) Hilburg, Untersuch. a. d. botan. Institut in Tübingen 1881, Bd. 1, p. 31. Die gefundenen Differenzen von 1 Proc. Kalisalpeter entsprechen einer Turgorintensität von 3,6 Atmosphären.

4) Eine nur transitorische und stets rückgängig werdende Turgorschwankung ist natürlich auf plasmolytischem Wege nicht zu erkennen. So liegt die Sache bei Mimosa u. s. w. und möglich wäre auch, dass aus solchem Grunde in den aus den Gelenken hergestellten Schnitten bei nyctitropischen Bewegungen eine Turgordifferenz nicht zu erkennen ist (vgl. Pfeffer, Energetik 1892, p. 228). Doch ist eine Vermittlung durch eine im Dienste des Lebens sich vollziehende Elasticitätsänderung in der nicht wachsenden Haut ebenfalls möglich und Torsionserscheinungen dürften eine solche bis zu einem gewissen Grade erfordern. Dass in Wurzeln und in Grasknoten sich die durch Widerstände reducirte Turgorsteigerung bei Plasmolyse erhält, wurde in dieser Arbeit speciell erwiesen.

nicht immer dieselben sind, wenn formell ähnliche Erscheinungen durch dasselbe äussere Agens veranlasst werden. Die immer und speciell auch in Bezug auf Krümmungsbewegung wiederkehrende Forderung, dass die Mechanik überall identisch sei, ist nur aus der natürlichen Neigung zu vereinfachendem Schematisiren oder aus engherziger Betrachtung der lebenden Natur zu verstehen. Denn in dem gesammten organischen Getriebe tritt allgemein eine bewunderns-werthe Mannigfaltigkeit uns entgegen und dieses auch in Bezug auf die Wege und Mittel, auf die Combinationen, mit denen die Ziele erreicht werden. Der morphologischen Betrachtungsweise drängt sich solches so unwiderstehlich auf, dass es längst anerkannt wurde, doch liefert auch die Verwendung der Blattorgane zum nahrungs-bereitenden grünen Laubblatt, zur Construction der Sexualorgane, zur Uebernahme der Functionen der Wurzel sprechende Beispiele dafür, dass mit demselben Ausgangsmittel Verschiedenes erzielt wird. Umgekehrt wird auch der functionellen Bedeutung nach Gleiches mit verschiedenen Mitteln erreicht. Dieses lehrt nicht minder die verschiedene Manier, in welcher organische Nahrung gewonnen, in welcher ferner dasselbe Product erzeugt wird und das Leben mit und ohne Sauerstoffathmung liefert ein schönes Argument, wie engherziges Schematisiren sich gegen eine physiologisch so bedeutungsvolle Thatsache verschloss, die auf differente Gewinnung der nöthigen Betriebsenergie hinausläuft.

Auch speciell die Wachsthumsmechanik der Zellhaut spielt sich sicher nicht in allen Fällen in ganz identischer Weise ab und selbst wenn die letzten Acte volle Uebereinstimmung bieten sollten, muss der causale weiter und weiter gehende Rückverfofg auf Differenzen führen, sofern überhaupt solche Differenzen, wie es Thatsache ist, in dem Stoff- und Kraftwechsel geboten sind. Krümmungsbewegungen aber können in der maassgebenden nächsten Mechanik noch dann Unterschiede bieten, wenn die Wachsthumsmechanik der Zellhäute sich in gleicher Weise vollzieht.

Es wäre aber nicht nur unpraktisch, sondern auch historisch ungerechtfertigt, den Begriff von Geotropismus, Heliotropismus u. s. w. auf eine ganz bestimmte einzelne Bewegungsmechanik einzuschränken. Denn diese Bezeichnungen wurden ohne jede Kenntniss der inneren Vermittlung eingeführt, um damit habituell ähnliche, durch einen

bestimmten äusseren Anstoss veranlasste Erscheinungsformen zu kennzeichnen. Eine solche generelle, auf leicht zugängliche Indicien gebaute Zusammenfassung ist aber absolut unerlässlich, wenn man nicht Gefahr laufen will, mit der fortschreitenden Erkenntniss von Differenzen in dem irgendwie vermittelnden Getriebe den wohlberechtigten Einheitsbegriff für Gruppen von Erscheinungen zu verlieren[1]. Auch der Name Dampfmaschine hat sich in generellem Sinne erhalten, obgleich die jetzt bekannten Maschinen von der ersten zu Bewegungen benutzten Maschine in ihren näheren Constructionen und Anordnungen wesentlich abweichen.

Was die nächste mechanische Vermittlung der Krümmung anbelangt, so ist klar, dass bei einzelligen Organismen im allgemeinen die Wachsthumsdifferenz in den antagonistischen Flanken der Zellwand eine nothwendige Bedingung ist. In Geweben dagegen kann eine Krümmung zu Stande kommen, ohne dass die einzelne Zelle ein actives Krümmungsstreben entwickelt. Denn es genügt, dass excentrisch situirte Elemente eine totale oder relative Wachsthumshemmung erfahren, um die Bedingungen für die Krümmung in analoger Weise herzustellen, wie in einer Wurzel, deren eine Flanke mit einem Stahlstreif oder Kautschuckstreif verkettet ist (p. 392). Die Einkrümmung erfolgt jetzt, obgleich die Wurzel für sich geradlinig zu wachsen strebt, und die dem Abstand von der neutralen Achse entsprechend geregelte Ausgiebigkeit des Wachsens mag daran erinnern, dass zu solcher harmonischen Regulation die mechanischen Wechselwirkungen und nöthigenfalls die daraus entspringenden Reizwirkungen zureichend sein können[2].

---

1) Heliotropismus, Geotropismus etc. bezogen sich zunächst nur auf entsprechende Krümmungen, das einzig mögliche Reactionsvermögen festgewurzelter Pflanzen. Historisch ist also nichts dagegen zu sagen, wenn man einer mit der freien Ortsbewegung anderen Erscheinungsform der Reaction die Bezeichnung Geotaxis, Phototaxis, Chemotaxis u. s. w. gibt. Ein solches Vorgehen ist aber praktisch, um stets zu kennzeichnen, ob man die Erscheinungsform der Krümmungsbewegung oder freien Ortsbewegung im Auge hat. Ueber die innere Vermittlung u. s. w. ist also damit gar nichts Näheres ausgesagt. Doch müssen bei aller physiologischen Uebereinstimmung gewisse Differenzen bestehen, schon weil beim Schwimmen die nächste mechanische Erzielung der forttreibenden Kraft in anderer Weise als beim Krümmen sich vollzieht.

2) Dieses gilt auch für die passiv mitgekrümmten Theile.

Ich bin weit entfernt, diese einfache Mechanik für alle Krümmungsvorgänge zu fordern. Für die Grasknoten habe ich im Gegentheil hervorgehoben, dass und warum eine active correlative Wachsthumsthätigkeit in den verschiedenen Collenchymsträngen nothwendig ist und analog wird es gewiss sehr gewöhnlich in den autonomen oder in den durch Reize inducirten Krümmungen sein. Ich wollte hier nur hervorheben, dass in Geweben eine Krümmung auch ohne Krümmungsbestrebungen der einzelnen Zelle möglich ist und es würde eher wunderbar sein, wenn diese Möglichkeit in der Pflanze nicht ausgenutzt wäre, z. B. indem die Retardirung des Wachsens in einzelnen geeignet gelegenen Elementen, oder die Ausbildung resistenterer Zellen die Veranlassung zu Krümmungen im oben angedeuteten Sinne abgibt.

Eine solche Mechanik ist aber nur in Geweben möglich und nur in solchem Sinne habe ich auf die ja unbestreitbare theoretische Möglichkeit einer derartigen Krümmung mit dem Bemerken aufmerksam gemacht, dass unter Umständen ein Unterschied zwischen der Krümmung einer einzelnen Zelle und eines Gewebes bestehen könne[1]. Uebrigens ist nicht zu vergessen, dass das Krümmungsbestreben der einzelnen Zellen für sich nicht ausreicht, um einen dicken Stengel zum Krümmen zu bringen, da zur Realisirung dieses zugleich eine relative Verschiebung der Wachsthumsschnelligkeit eintreten muss, also das schon oben erwähnte Fundament der Gewebekrümmung unerlässlich ist.

Es bezieht sich alles dieses — was offenbar vielfach nicht beachtet ist — ganz allein auf die Mechanik des Krümmens, nicht auf die des Wachsens. Ueber diese sagt keine Bewegungserscheinung an sich etwas aus und mit derselben Wachsthumsmechanik kann ebensowohl die Krümmung einzelliger, wie vielzelliger Organe erreicht werden, wenn nur, was immer Voraussetzung bleibt, die entsprechende Vertheilung des Zellhautwachsthums erreicht ist. Auch ist einleuchtend, dass es sich nur um einen Unterschied in der Krümmungsmechanik nicht aber in der Wachsthumsmechanik handelt, wenn als active Krümmungsursache die Wandung der einzelnen Zelle das einemal eine gleichmässige, das anderemal eine local verschiedene Aenderung des Wachsens anstrebt.

1) Physiologie Bd. II, p. 182, 322.

Was in einem concreten Falle zutrifft, ist nur schwer zu entscheiden, da die Realisirung der Krümmung jedenfalls eine ungleichseitige Verlängerung in der einzelnen Zelle herbeiführt. In dem Knoten der Gräser dürfte, so möchte ich glauben, in den einzelnen Elementen, insbesondere in den Collenchymzellen eine active Krümmungsthätigkeit durch die geotropische Reizung veranlasst werden. Entscheidende Beweise für diese Meinung kann ich freilich nicht beibringen und diese sind u. a. auch nicht aus der Thatsache abzuleiten, dass nach Entfernung des äusseren und inneren Parenchyms des Blattknotens die geotropische Reactionsfähigkeit noch vorhanden ist.

So viel ist aber hinsichtlich der Wachsthumsmechanik sicher, dass eine plastische Dehnung nicht die Ursache der geotropischen Krümmung im Grasknoten sein kann, denn die elastischen Verhältnisse des Collenchyms erhalten sich dauernd derartig, dass selbst eine viel höhere als die im Knoten zur Verfügung stehende mechanische Energie eine Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze nicht herbeizuführen vermag (p. 405). Das in diesem und in anderen Objecten im Gipsverband bis zum Entspannen fortschreitende Wachsen kann überhaupt nicht durch plastische Dehnung der Haut erklärt werden.

Als Folge dieses, trotz der mechanischen Hemmung fortschreitenden entspannenden Wachsens, kommt mit dem Entgipsen die Verlängerung der isolirten Wurzeln und analog die mässige Krümmung der zuvor horizontal gehaltenen Grasknoten zu Stande[1]). Doch ist natürlich nicht für jede sichtbar werdende Krümmung ein realisirtes Flächenwachsthum der Zellhaut nothwendig, denn die Krümmung kann, abgesehen von Turgordifferenzen, auch durch eine ungleiche Dehnbarkeit der Wandung veranlasst werden, welche im Näheren wiederum auf Differenzen in der Dicke oder in der Elasticität beruhen kann. Wenn aber in der Vertheilung solcher Verhältnisse eine Asymmetrie besteht, muss bei

1) Wird eine eingegipste Wurzel von Faba 3 Tage horizontal gehalten und dann, mit thunlichster Vermeidung von Zerrungen, entgipst, so tritt eine merkliche geotropische Krümmung weder sogleich, noch nach Injection mit Wasser ein. Die plastischen Eigenschaften der Wurzel fallen freilich in diesen Versuchen ins Gewicht, doch ist immerhin dem besagten Erfolge zu entnehmen, dass unter diesen Versuchsbedingungen, in welchen die Gesammtreaction gegen eine Widerlage zur Geltung kam, eine erhebliche Differenz in der Dehnbarkeit der Wandungen oder im Turgor zwischen Ober- und Unterseite sich nicht einstellte, da in diesem Falle eine Beugung hätte eintreten müssen.

symmetrischer Vertheilung der Turgorenergie eine entsprechende Beugung eintreten. Falls eine solche gänzlich fehlt, kann auch kein Unterschied in der Ausbiegung eintreten, wenn ein Object durch ein bestimmtes Gewicht abwechselnd nach der einen und andern Seite gebeugt wird, eine Methode, die zunächst nur auf leichtere Wahrnehmbarkeit der besagten Widerstandsdifferenzen berechnet ist.

Solche Beugungsunterschiede können aber immer noch das Resultat verschiedener Complicationen sein. Ohne näher hierauf einzugehen ist doch klar, dass man nicht aus denselben mit Noll[1]) auf eine Zunahme der Dehnbarkeit in der Convexseite schliessen darf, da jede relative Verschiebung, also auch eine Zunahme der Elasticität auf der Concavseite, den analogen Erfolg haben muss. Weiter aber darf eine gemessene Differenz der Dehnbarkeit als Ursache der Krümmung, d. h. des entsprechenden Wachsthums, doch erst dann angesprochen werden, wenn erwiesen ist, dass jene nicht selbst die Folge des Wachsens ist. Letzteres ist aber z. B. gewiss der Fall, wenn die Dehnbarkeit der Zellwandungen mit dem Eingipsen abnimmt oder wenn ein mechanischer Zug ziemlich schnell eine Steigerung der Tragfähigkeit in den Zellwandungen veranlasst[2]). In beiden Fällen ist dieser Unterschied schon physikalisch messbar, bevor man eine Verdickung der Wandungen unzweifelhaft zu erkennen vermag und Aehnliches kann sehr wohl bei geotropischen und anderen Krümmungen zutreffen. Zugleich kommen mit dem Anstreben der Krümmung antagonistische Wirkungen der Gewebe zur Geltung, die selbst wieder Veranlassung zu Wachsthumsunterschieden geben können.

Ohne die Möglichkeit leugnen zu wollen, dass Zunahme der Dehnbarkeit eine Ursache des Flächenwachsthums der Zellhaut in concreten Fällen werden kann (vgl. Kap. XIII), muss doch betont wer-

---

1) Arbeiten des bot. Instituts in Würzburg 1888, Bd. III, p. 514. Aehnliche Versuche wurden auch schon von Wiesner angestellt. Vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. II, p. 322.

2) Näheres wird die demnächst erscheinende Arbeit Hegler's bringen, über die ich eine vorläufige Mittheilung gab in Bericht. d. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften 1891, p. 638. — In dieser Arbeit Hegler's werden auch die anatomischen Aenderungen bei ausgeführten oder gehemmten Bewegungen der Grasknoten erörtert werden.

den, dass NOLL's Versuche diese Annahme nicht beweisen. Nur um auf dieses hinzuweisen, musste ich hier auf diese Beugungsversuche etwas eingehen, die auch wir, in methodisch ähnlicher Weise wie NOLL, mit Grasknoten anstellten, welche während 24 bis 48 Stunden in horizontaler Lage in einem anschliessenden Gipsverband zugebracht hatten.

Der Ausfall der Resultate lehrte indess, dass es sich hier um verwickelte Verhältnisse dreht, deren Zergliederung hier nicht versucht werden soll. An den direct dem Gips entnommenen intacten oder halbirten Knoten ergab sich keine sichere Bevorzugung der Ausbiegung nach der zuvor aufwärts oder abwärts gerichteten Seite[1]). Wenn aber auf die Objecte einige Zeit eine nicht plasmolysirende Salpeterlösung eingewirkt hatte, kehrte in Wasser wohl die frühere Biegungsfestigkeit zurück, die Ausbiegung nach der (geotropisch) oberen und unteren Seite zeigte aber jetzt Unterschiede, die wenigstens zumeist in demselben Sinne ausfielen.

XII. Rückblick.

Zum Schluss dürfte ein allgemeiner Ausblick am Platze sein, der zugleich eine Zusammenfassung der wesentlichsten Resultate unserer Studien bietet.

Es ist eine wichtige und wesentliche Eigenschaft der Pflanzen, dass sie beim Auftreffen auf Hemmnisse ihr Wachsthum fortzusetzen streben und Hand in Hand damit gegen Widerstände Druckwirkungen und Arbeitsleistungen zu vollbringen vermögen. Diese Fähigkeit ist sicherlich eine allgemeine Eigenschaft jedes wachsenden Pflanzentheils und jeder wachsenden Zelle, eine Fähigkeit, die erst mit dem Wachsthum erlischt, also auch dann, wenn etwa durch die von dem Widerstand ausgehende Reizwirkung das Wachsthum sistirt und so das Zustandekommen von weiterer Aussenleistung verhindert wird.

---

1) Nach vollständiger Aufhebung des Turgors sinkt die Biegungsfestigkeit im jungen Grasknoten etwa auf $\frac{1}{8}$ der normalen Grösse, während in älteren Grasknoten ein viel geringerer Rückgang eintritt.

Naturgemäss wird aber diese Fähigkeit in sehr verschiedenem Grade in Anspruch genommen. Denn ohne äusseren Widerstand gibt es keine Aussenleistung, die also gering ausfällt, wenn der Widerstand von Wasser oder Luft zu überwinden ist, während sie z. B. im Erdboden geringe, aber auch sehr hohe Werthe erreichen kann. Uebrigens ist auch die Hebung der eigenen Last, die Sprengung der Knospenschuppen durch den wachsenden Spross, der Durchbruch der Seitenwurzeln u. s. w. für das active Pflanzenorgan eine Aussenarbeit, wie denn überhaupt für jede einzelne Zelle in einem Gewebe die umgebenden Zellen eine Aussenwelt sind, welche thatsächlich sehr hohe Widerstände bieten kann.

Zu höherer Aussenleistung kann es nur dann kommen, wenn Ausweichen und Ausbiegen ausgeschlossen ist, und nur wenn die genügende Widerlage geboten ist, wird die Entwicklung des höchsten Druckes möglich. Diese Bedingungen wurden in unseren Versuchen durch den Gipsverband hergestellt, doch werden sie gelegentlich in der Natur realisirt, so z. B. wenn Wurzeln in enge Kanäle eindringen oder wenn ein Stamm in geeigneter Weise zwischen Felsen geräth. Auch in der Führung des wachsenden Grasstengels in der Halmscheide und in ähnlichen Verhältnissen sind die Bedingungen für hohe Leistungen (Gewichtshebung etc.) durch an sich wenig resistente Gewebe hergestellt.

Wie weit ohne allseitige Widerlage, aber bei zureichender Befestigung, das Ausbiegen vermieden wird, also die Aussenenergie der Pflanze steigen kann, hängt selbstverständlich von den Eigenschaften des Pflanzenorgans, insbesondere von dessen biegungsfestem Bau ab. Dieserhalb vermögen die leicht biegsamen und plastischen Wurzeln nur geringen, die Stengel aber schon höheren Druck in Richtung der Längsachse zu entwickeln. Auch müssen die Stengelorgane an sich genügend biegungsfest gebaut sein, da sie die Last der höher stehenden und ansitzenden Theile zu tragen und in deren geotropischer Hebung unter Umständen eine ansehnliche Arbeit zu leisten haben, ein Fall, der in Bezug auf die Grasknoten näher behandelt wurde. So kann auch die feste Widerlage des Holzkörpers die Entwicklung eines hohen Druckes durch die Thätigkeit des Cambiums und der wachsenden Zellen gestatten. Ferner vermögen selbst jugendliche Wurzeln durch ihr Dickenwachsthum mit hoher Energie gegen zwei Platten zu wir-

ken, wenn auch so, während seitliche Verbreiterung ausgeführt wird, der Druck nicht dieselbe Höhe zu erreichen scheint, wie bei allseitiger Widerlage. Eine solche kann übrigens vollständig durch Umhüllung einer nach Wachsthum strebenden Zelle mit anderen Elementen im Inneren eines Gewebes hergestellt werden.

Vermöge der biegsamen und plastischen Eigenschaften wird also eine Wurzel in einem Boden zumeist unter Umgehen von Steinen u. s. w. ihren Weg finden und demgemäss in dem Streben nach Längenwachsthum gewöhnlich geringe Aussenenergie entwickeln, die eben nur dann höher angespannt wird, wenn ein Ausweichen unmöglich ist. Höher steigt schon der Querdruck der in einen engen Spalt gerathenen Wurzel, die sich durch das nach Möglichkeit ausgeführte Wachsen abflacht. Ein solches thunlichstes Realisiren des Wachsens führt überhaupt zur festen Anschmiegung an eine Widerlage und ermöglicht der plastisch bildsamen Wurzel ihren Weg selbst durch eine recht enge Oeffnung zu finden. Analoges tritt übrigens in mehr oder minder auffälligem Grade allgemein ein. So ist z. B. der hervorbrechende Callus ebenso zur Ausfüllung einer Form, gleichsam wie eine plastische Masse, befähigt, und durch locale mechanische Hemmung des Dickenwachsthums kann man z. B. dem Stamme die mannigfachste Gestaltung des Umrisses ertheilen.

Die specifisch differente Fähigkeit zur Druckentwicklung gegen eine unnachgiebige, allseitige Widerlage wird zweifellos der Inanspruchnahme der Pflanzen mehr oder weniger angepasst sein. In unseren Versuchen entwickelten die Keimwurzeln in der Längsrichtung eine Druckintensität von etwa 7 bis 12 Atmosphären, während die Intensität des Querdruckes etwas geringer, annähernd zwischen 4½ bis 6½ Atmosphären (vielleicht zufällig) gefunden wurde. Eine solche Differenz zwischen Längs- und Querrichtung zeigen nicht die Versuche mit Keimstengeln, die als Druckintensität 5½ bis 7½ Atmosphären ergaben. Diese Intensität dürfte in der geotropischen Action der Grasknoten 15—16 Atmosphären erreichen, also derjenigen gleichkommen, welche nach Krabbe das angestrebte Dickenwachsthum der Bäume zu entwickeln vermag. Diese Mittelwerthe schliessen nicht aus, ja lassen sogar erwarten, dass die Intensität der Aussenleistung in einzelnen Zellen erheblicher ist und für die Wurzel wurde z. B. dargethan, dass diese Intensität nach der Spitze hin zunimmt.

Voraussichtlich sind die meisten Pflanzen zu erheblicher Energieentwicklung befähigt und wahrscheinlich wird die Druckfähigkeit wachsender Pflanzentheile selten unter 3 bis 5 Atmosphären sinken. Die absolute Energie ist natürlich bei kleinen Pflanzen gering, während sie mit Zunahme der wirksamen Fläche sehr hohe Werthe erreichen kann. So ist es möglich, dass grössere Wurzeln oder Stammstücke mit einer Kraft von mehr als 6000 kg wirken und es wird wohlverständlich, dass durch solche Aussenenergie selbst Felsen gesprengt werden können.

Nach dem Auftreffen auf eine Widerlage beginnt sogleich die Entwicklung von Aussendruck, dessen anfangs schnellere Zunahme allmählich langsamer und langsamer wird. So war z. B. bei Wurzeln schon nach 3 bis 4 Tagen die Druckzunahme sehr gering, doch nicht ganz, wenigstens nicht in der Querrichtung erloschen, da gelegentlich erst nach 2 bis 3 Wochen die Sprengung eines Gipscylinders erreicht wurde. Erfolgt aber die Durchbrechung des Hindernisses früher, so kommt es überhaupt nur zu der entsprechenden Drucksteigerung. Bei constantem Widerstand, also z. B. in einem Thonboden, wächst nunmehr die Pflanze unter gleich bleibender äusserer Arbeitsleistung weiter, während mit veränderlichem Aussendruck, also z. B. beim Uebergang aus einem resistenteren in einen weniger resistenten Boden, die Intensität des Aussendrucks und die Grösse der Aussenarbeit einen entsprechenden Wechsel durchzumachen haben. Dabei ereignet sich, z. B. bei Sprengungen, dass nach Erreichung der maximalen Aussenenergie der äussere Widerstand urplötzlich auf Null sinkt und es ist für die Pflanze wichtig, ja unerlässlich, dass sie solchen sprungweisen Wechsel der Inanspruchnahme, ebensowohl wie den langsamen Uebergang ohne Nachtheil zu ertragen vermag. Die Pflanze wächst in der That sogleich und ohne wesentliche Störung weiter, wenn sie plötzlich aus der Widerlage befreit wird.

Bei dem allmählichen Fortschreiten der Druckschwellung verstreicht eine je nach dem Widerstand kürzere oder längere Zeit, bis es zum Aequilibriren und dann zum Fortschieben der Widerlage kommt. Von da ab wächst die Pflanze gegen einen constanten, aber verhältnissmässig hohen Widerstand, also etwa in einem homogenen geeigneten Boden, jedenfalls verlangsamt und bei sehr hohem Widerstand sehr stark verlangsamt weiter, während bei relativ mässigem

Widerstand das Wachsthum der Wurzel — und ebenso wohl anderer Organe — nur wenig oder vielleicht gar nicht retardirt wird.

Zu der Energie, die nach wie vor für das Wachsen im Inneren der Pflanze aufzuwenden ist, ist nunmehr die Aussenarbeit hinzugekommen, d. h. die Pflanze vermag bei solcher Inanspruchnahme eine höhere Gesammtsumme von Energie in Arbeit umzusetzen.

Es waltet hier also eine ähnliche Beziehung wie in einem Menschen, welcher nach dem Aufladen einer mässigen Last mit derselben Schnelligkeit wie zuvor einen Berg hinaufzugehen vermag. Doch darf die Last nicht zu gross sein, denn sonst ist auch der Mensch genöthigt, seinen Gang zu verlangsamen, um mit der in jedem regulatorisch arbeitenden Organismus (und Mechanismus) doch stets begrenzten Energie gleichzeitig sich selbst und die Last fortbewegen zu können. Mit der Beseitigung des zu bewältigenden Widerstandes bedarf es aber wiederum im Menschen wie in der Pflanze eines geringeren Energieaufwandes, um die eigene Bewegung in der früheren Schnelligkeit aufzunehmen und in der That stellt sich, nach Aufhören der hemmenden Aussenarbeit, in der Pflanze die frühere Wachsthumsschnelligkeit wiederum ein.

In solchem Vergleich mit dem Menschen, oder auch mit dem Gasmotor, der den Gasconsum nach Maassgabe der Aussenarbeit in den zulässigen Grenzen regulirt, ist es wohl verständlich, dass trotz der regulatorisch gesteigerten Entwicklung von Energie, doch in der Zeiteinheit ein geringeres mechanisches Aequivalent für Innenarbeit aufgewandt wird, indem eben durch Verminderung der Bewegungsschnelligkeit eine entsprechende Energiesumme für die Aussenarbeit disponibel wird. Doch ist bei solcher regulatorischer Thätigkeit die Aussenarbeit nicht etwa dem Ausfall der Innenarbeit äquivalent und es ist auch ohne weiteres klar, dass ein constantes Verhältniss zwischen Innen- und Aussenarbeit nicht bestehen kann.

Da aber sowohl ohne, als bei unüberwindlichem Widerstand die Aussenarbeit Null wird, so muss diese bei einem bestimmten Widerstand einen Maximalwerth erreichen. Eine empirische Ermittlung dieses letzteren wurde indess nicht versucht und bei der verwickelten Sachlage ist theoretisch eine sichere Ableitung nicht zulässig.

Für die realen Leistungen kommen aber die jeweils gebotenen Verhältnisse, z. B. die Grösse, Biegungsfestigkeit, Gestalt des Organes,

sowie die Natur und Angriffsweise des Widerstandes wesentlich mit in Betracht. Es ist u. a. (p. 372) darauf hingewiesen worden, wie es dieserhalb von Umständen abhängt, ob ein dickerer oder dünnerer Pflanzentheil für Bahnung eines Wegs im Vortheil ist[1]). Die Spreng- und Keilwirkung der Wurzeln (p. 369) ist ein Beispiel, wie die Angriffsweise der Pflanze und die Cohäsion des Mediums ins Gewicht fallen. Die Grasknoten gaben Gelegenheit von einem Falle zu sprechen, in welchem die Hebelwirkung sehr hohe statische Momente für die activ krümmenden und bewegenden Theile verursacht.

Die Druckentwicklung bildet indess nicht den ganzen Inhalt der durch eine mechanische Hemmung des Wachsens erzielten Reaction. Abgesehen davon, dass dieses Sistiren des Wachsens auf die Gesammtheit der im Dienste des Wachsens thätigen Processe rückwirken muss, veranlasst auch die im Organismus allgemein thätige und nothwendige regulatorische Verkettung noch anderweitige correlative Reactionen.

Dazu zählt die bedeutende Beschleunigung des Wachsthums der Wurzelspitze, welche diese dann erfährt, wenn ihr allein die volle Freiheit geboten ist, alle übrigen Theile aber am Wachsen mechanisch gehemmt sind. Eine derartige Correlation dürfte wohl in mehr oder weniger auffallender Weise allgemein verbreitet sein und in dieses Gebiet zählt u. a. die Erfahrung, dass, wenigstens in concreten Fällen, die Hemmung des Längenwachsthums das Dickenwachsthum beschleunigt, und dass unter Umständen nur bei allseitiger mechanischer Widerlage die volle Druckenergie durch das angestrebte Dickenwachsthum erreicht wird. Ferner wurde besprochen, dass die mechanische Wachsthumshemmung, in analoger Weise wie das Decapitiren, beschleunigtes Produciren, resp. Austreiben von Wurzeln, und Knospen und ebenso Veränderungen der geotropischen Reactionsfähigkeit veranlassen kann. Die Gewebespannungen wiederum geben Veranlassung, dass sich im Inneren einer Pflanze Reactionen gegen die mechanischen Widerstände entwickeln, welche freilich durch den lebendigen Verband der Antagonisten vielfach modificirt werden mögen und schon deshalb eine Besonderheit bieten, weil

1) Ueber Spirogyra vgl. p. 387.

in den in Zugspannung gesetzten Geweben besondere Reizbedingungen hergestellt sein können.

Von hoher Bedeutung ist, dass bei mechanischer Hemmung des Wachsens die embryonalen Gewebe ihre Wachsthumsfähigkeit conserviren, dass also mit Entfernung des Gipsverbandes das Wachsen wieder aufgenommen wird. Diejenigen Zellen dagegen, welche bis zu einem gewissen Grade den embryonalen Zustand verliessen, gehen im Gipsverband in Dauergewebe über, das, bei der Unmöglichkeit das angestrebte Wachsen zu realisiren, gewisse anatomische Differenzen bieten kann.

Die Energie für die Aussenleistung wird in zartwandigen Geweben allein durch die Turgorkraft, also durch die osmotische Energie, geliefert, welche bis dahin durch die Spannung der Zellwand äquilibrirt war, nunmehr aber gegen die Widerlage gelenkt wird. Dieses wird durch die fortdauernde Wachsthumsthätigkeit der Zellhaut erreicht, welche mit der Flächenzunahme natürlich mehr und mehr an Spannung verliert. Diese Spannung kehrt aber sofort wieder, sobald durch Hinwegnahme der Widerlage der frühere Zustand hergestellt wird.

Zu solcher Aussenleistung bedarf es demgemäss keiner Turgorsteigerung, doch wird mit einer solchen die disponible osmotische Energie erhöht. Und wenn sich thatsächlich als Reaction gegen eine Widerlage vielfach eine Turgorschwellung einstellt, so bieten doch selbst verwandte Objecte Unterschiede und Abstufungen. Näheres ist an früherer Stelle mitgetheilt, wo auch zu ersehen ist, dass die Turgorschwellung das osmotische Aequivalent von 2 Proc. Kalisalpeter überschreiten kann.

Zur Erzielung der höchsten möglichen Energie muss die Zellhautspannung gänzlich aufgehoben werden. Dieses wird auch in der That in Wurzeln und in Grasknoten erreicht, während es in den Stengeln der Keimlinge und in Chara zwar zu weitgehender, jedoch nicht zur vollständigen Entspannung der Zellwand kommt. Dem schon erwähnten Gang der Drucksteigerung entsprechend geht dieses Entspannen, resp. das dazu führende Flächenwachsthum der Haut erst schneller, dann langsamer von statten, kann aber schon nach 2 bis 3 Tagen das Endziel ziemlich erreicht haben, und Hand in Hand mit

dieser Hautentspannung vollzieht sich, da wo sie vorkommt, die Steigerung des Turgors.

Für die gemessenen Drucke erscheint die Turgorenergie ausreichend. Dieses ergibt sich aus den (p. 321 und 403) angestellten Betrachtungen, aus welchen auch zu ersehen ist, warum sowohl die directe Druckmessung, als auch die plasmolytische Methode nur annähernde Werthe liefern. Nach diesen Annäherungswerthen kann also nicht sicher beurtheilt werden, ob im gegebenen Falle, neben der osmotischen Energie, durch actives Wachsen der Zellhaut — also durch Ausscheidungsenergie — Druck gegen die Widerlage erzeugt wird. Allerdings werden auf diesem Wege nur solidere Wandungen eine erhebliche Leistung vollbringen können, da zartwandige Gewebe, falls sie nach dem durch die Eigenthätigkeit erzielten Entspannen noch weiter wachsen, bald ausbiegen und Faltungen bilden müssen.

Abgesehen von der noch fraglichen Druckwirkung durch das active Wachsen dickerer Zellwände ist das Flächenwachsthum der Zellhaut nur das Mittel, um die Turgorenergie nach aussen wirksam zu machen. Demgemäss ist es für die Aussenleistung ohne Belang, wie das Wachsthum der Wandungen realisirt und ob eine geringere oder grössere Energiesumme darauf verwendet wird. Die Thatsache aber, dass das Flächenwachsthum der Haut sich trotz der abnehmenden Turgordehnung und bis zur gänzlichen Eliminirung dieser fortsetzt, ist für die Wachsthumsmechanik von hoher Bedeutung, wie noch im folgenden Capitel darzulegen sein wird. Hier sei aber hervorgehoben, dass die Haut während des entspannenden Wachsens, sowohl nach den Erfahrungen an Wurzeln, als an Grasknoten, ihre Elasticität eher vermehrt als vermindert. Ein solches Verhalten ist in der That nothwendig, damit die Zellwand der vollen Turgorenergie zu widerstehen vermag, wenn diese, nach Durchbrechung der Widerlage, wiederum durch die Hautspannung zu äquilibriren ist, eine Turgorkraft, welche da, wo Turgorschwellung die Reaction begleitet, nunmehr sehr viel höher als zuvor ausfällt.

Da der Aussendruck, resp. das zur Erzielung desselben nöthige Hautwachsthum, nur so lange fortschreitet, bis die Widerlage nachgibt, so ist damit erreicht, dass die Pflanze in regulatorischer Weise nur den jeweils nöthigen Aussendruck entwickelt. Bleibt dann der

Widerstand constant, so wächst die Pflanze trotz der verminderten Turgorspannung der Haut weiter, und dieses Wachsen wird erst bei erheblichem Widerstand in ausgesprochener Weise verlangsamt.

Das oben Gesagte gilt ebenso, wenn in der Reaction sich gleichzeitig Turgorschwellung einstellt. Denn thatsächlich nimmt diese ebenfalls mit dem Widerstande zu und die schwächere Turgorschwellung, welche sich in den gegen geringeren Widerstand fortwachsenden Organen erhält, hat nur zur Folge, dass die Spannung der Haut nicht ganz so weit herabgedrückt wird, als es ohne den Turgorzuwachs der Fall sein würde. Für Arbeitsleistung auf einer längeren Strecke ist aber natürlich Wachsthum unerlässlich, das im Grasknoten erst durch den geotropischen Reiz veranlasst wird, denn durch elastische Dehnung von Häuten vermag eine Turgorschwellung nur eine Arbeitsleistung auf einer begrenzten Strecke zu erzielen[1]).

Dem Wesen der Sache nach gilt Gleiches für den einzelligen Organismus und für einen Gewebecomplex mit oder ohne Gewebespannung. Denn thatsächlich bleibt stets das Flächenwachsthum der Haut das Mittel, um die Turgorenergie gegen eine Widerlage zu übertragen, und es hat keine principielle Bedeutung, wenn bei solcher Wandentspannung verschiedenwerthige Zellen in ungleichem Grade betheiligt sind.

Der Grasknoten gab Gelegenheit, die Gewebespannung in Bezug auf die Aussenleistung für einen concreten Fall zu besprechen. In dem normalen Grasknoten ist in dem parenchymatischen Grundgewebe des Blattknotens die Zellwand gänzlich entspannt und die ganze so disponibel gewordene Energie wird von dem negativ gespannten Gefässbündel äquilibrirt. Diese ganze Energie wird nun, indem das Gefässbündel wächst, allmählich ihrem vollen Betrage nach gegen eine unverrückbare Widerlage gelenkt, gegen welche dann ferner auch noch das Collenchym in üblicher Weise activ pressend wirkt.

Die frühere Gewebespannung im Knoten ist nunmehr gänzlich verschwunden, kehrt aber bei Wegnahme der Widerlage sofort wieder, indem das hoch elastische Gefässbündel bei minimaler Verlängerung die angestrebte Ausdehnung des positiv gespannten Parenchyms unmöglich macht. Dieses wirkt also gegen die Gefässbündel

1) Näheres Pfeffer, Energetik 1892, p. 234.

in einem analogen mechanischen Sinne, wie eine wachsende Wurzel, die den umhüllenden Kautschuckschlauch durch die volle nach aussen gewandte Turgorenergie in Zugspannung versetzt, während zugleich durch den Gegendruck des negativ gespannten Schlauches das fernere Wachsthum unmöglich gemacht wird. In analoger Lage befinden sich aber die nach Wachsthum strebenden Gewebe gegenüber dem nicht nachgebenden Widerstand der Gefässbündel. Diese zügeln also, wenn sie selbst wieder das Wachsthum aufnehmen, die Wachsthumsschnelligkeit der positiv gespannten Zellen und sind zugleich in dem beschriebenen Sinne regulatorisch thätig, wenn eine Widerlage entgegentritt. Doch ist wohl zu beachten, dass die Gewebespannung nur die Folge einer durch die Bildungsthätigkeit hergestellten Gewebedifferenzirung und Arbeitstheilung ist, und dass die regulatorische Arbeitsfähigkeit gegen Widerstände in anderen Pflanzen ebenso gut ohne die Zuhilfenahme der Gewebespannung erreicht wird.

Schiebt der sich krümmende Grashalm einen Widerstand vor sich her, so wird bei mässiger Inanspruchnahme der Aussenenergie die negative Spannung entsprechend vermindert, bleibt aber dem Sinne nach erhalten. Es ist aber auch ohne weiteres klar, dass nicht eine jede Pflanze befähigt sein muss, die normal vorhandene Gewebespannung, bei mechanischer Hemmung des Wachsens, ganz aufzuheben, so wie nicht jede Zelle unter diesen Verhältnissen die gänzliche Aufhebung der Turgorspannung der Zellhaut erreicht. In der That hatte sich in den untersuchten Keimstengeln bei Aufenthalt im Gipsverband die übliche Gewebespannung, wenigstens dem Sinne nach, erhalten.

In jedem Falle ist aber die mechanische Hemmung nur die äussere Veranlassung, dass die Pflanze mit den ihr zu Gebote stehenden Mitteln den auf Beseitigung des Hemmnisses hinzielenden Aussendruck entwickelt und mit Hilfe dieses die nöthige Arbeit während des Fortschiebens leistet. Der äussere Widerstand wirkt also, wie p. 333 ausgeführt wurde, nur auslösend, nur als Reiz, der nicht nur die Druckentwickelung, sondern Hand in Hand damit Modificationen in der Gesammtthätigkeit veranlasst, Modificationen, welche z. B. in den besprochenen correlativen Productionen zu äusserlich hervorstechenden Erfolgen führen. Da aber bei der regulatorischen Verkettung des Gesammtgetriebes, nahe und ferne von dem Angriffs-

punkt der Aussenwirkung, Thätigkeiten beschleunigt, verlangsamt oder auch erst hervorgerufen werden, so lässt sich nicht übersehen, ob in einem gegebenen Falle der gesammte Energieumsatz gesteigert oder vermindert wird. Schon in der Erwägung, dass die Pflanze in der Reaction gegen Widerstände in modificirter Weise arbeitet, ist klar, dass, wie auch schon früher ausgeführt wurde, die genau bemessene Aussenleistung keinen sicheren Maassstab für diejenige Energie geben kann, welche unter normalen Verhältnissen auf die Wachsthumsarbeit verwendet wird. Vielmehr reagirt die Pflanze in analogem Sinne wie der Mensch, wie der Gasmotor, in welchem mit der höheren Inanspruchnahme regulatorisch die Energieentwickelung zunimmt, aber natürlich immer nur bis zu einem gewissen Grenzwerth gesteigert werden kann.

Ein vollständiger Einblick in das verwickelte und verkettete Innengetriebe des Organismus ist noch in keinem Falle gewonnen und man muss sich schon glücklich schätzen, wenn es wenigstens, wie hier in Bezug auf die Aussenleistung, gelingt, die zunächst zur Action führenden Factoren aufzudecken. So viel ist übrigens sicher, dass der äussere Widerstand nicht etwa, wie in den Ranken[1], als ein specifischer Stossreiz wirkt, sondern dass vielmehr von der Hemmung des Wachsens die Veranlassung zu den besprochenen Reactionen ausgeht. Mit dem Wachsen wird auch die Gesammtheit der auf das Wachsen berechneten Thätigkeiten sistirt oder in Mitleidenschaft gezogen, und von diesen Veränderungen gehen regulatorisch, direct oder indirect, die verschiedenen Ketten von Wirkungen und Anstössen aus, die in den mannigfachen Erfolgen einen wahrnehmbaren Ausdruck finden, ebenso wie auch während des Wachsens die in diesem dienstbaren Factoren regulatorisch wirksam sind.

Wenn z. B. in Pflanzen dieselbe Turgorhöhe bei schnellem und langsamem Wachsen sich erhält, so ist damit gesagt, dass jedwelche Abweichung eine entsprechende Beschleunigung oder Verlangsamung in der Production der osmotisch wirkenden Stoffe veranlasst. Ebenso erklärt sich, dass der Turgor mit gänzlicher Wachsthumshemmung nicht oder bis zu einem gewissen Grenzwerth ansteigt. Diese

---

1) Pfeffer, Untersuch. a. d. botan. Institut in Tübingen 1885, Bd. I, p. 483.

Differenz hinsichtlich der Turgorregulation ist indess nur der Ausdruck specifischer Eigenheiten, ebenso wie die Turgordifferenz, die in benachbarten ungleichwerthigen Zellen gefunden wird. Der causale Rückverfolg dieser Verhältnisse hat aber im Näheren die regulatorische Wirkung des Turgors aufzudecken. In dieser Hinsicht muss sich u. a. die Frage aufdrängen, ob die Production eines bestimmten Körpers, etwa nach dem Principe der Massenwirkung, durch die in der Flüssigkeit gelöste Menge gelenkt wird[1], oder ob der osmotische Druck mechanisch oder als Reiz regulatorisch wirksam wird. Auch letzteres ist wohl denkbar, da z. B. der gegen die Zellwand gepresste Protoplast mit dem Wechsel der osmotischen Energie Druck- und Volumschwankungen erfährt[2], die fortdauern, wenn auch die auf eine fremde Widerlage gestützte Zellhaut gänzlich entspannt ist.

Fragen dieser und anderer Art tauchen auch auf, sobald man zu eruiren sucht, in welcher Weise das verlangsamte oder aufgehobene Flächenwachsthum der Zellwand regulatorisch wirksam wird. Doch kann man aus den beigebrachten Thatsachen sicher entnehmen, dass die sinkende Turgordehnung der Haut nicht allein in rein mechanischem Sinne reguliren kann, da die Zellwand trotz Nachlassens dieser mechanischen Dehnung und bis zur gänzlichen Eliminirung dieser zu wachsen vermag.

XIII. Ergebnisse in Bezug auf die Wachsthumsmechanik der Zellhaut.

In dieser Arbeit sollte und konnte nicht die Gesammtheit der zahlreichen Fragen behandelt werden, welche sich an die durch die mechanische Wachsthumshemmung direct und indirect erzielten Erfolge knüpfen. Doch kam im Laufe dieser Studien Verschiedenes nebenbei zur Sprache, und an dieser Stelle soll noch kurz auf die

1) Auf die hohe Bedeutung der Massenwirkung für die Regulation habe ich z. B. in den p. 332 citirten Stellen hingewiesen.

2) Vgl. Pfeffer, Zur Kenntniss d. Plasmahaut u. d. Vacuolen 1890, p. 291, und die dort citirte Literatur. — Nicht zu vergessen ist, dass die plasmolytische Entspannung der Zellwand in physiologischer Hinsicht eine andere Bedeutung haben kann.

für die Wachsthumsmechanik bedeutungsvolle Erscheinung eingegangen werden, dass die Zellwand zur Erzielung von Aussenenergie bis zur Entspannung wächst, dass also die Turgorkraft nicht die Energie für die Flächenvergrösserung der Zellwand liefern kann.

Die Energie für das Flächenwachsthum der Zellwand muss, wie ich in der Energetik näher auseinandersetzte, entweder durch die Turgorkraft, d. h. durch osmotische Energie, oder durch Intussusception, d. h. durch Ausscheidungsenergie (Volumenergie Ostwald's) geliefert werden, da einfache Quellung (= Oberflächenenergie) für dauerndes Wachsen unzureichend ist[1]. Bei Intussusception, und ebenso bei Quellung, entspringt die Wachsthumskraft einer activen Bethätigung der Zellhaut, und ich schlug vor, in diesem Falle von activem Wachsthum der Zellhaut zu reden, im Gegensatz zu passivem Wachsthum, in welchem das Flächenwachsthum durch eine Dehnung über die Elasticitätsgrenze erreicht wird. In letzterem Falle liegt in jedem Falle eine plastische Vergrösserung vor, gleichviel ob sich dieselbe bei Constanz der elastischen Eigenschaften der Wand vollzieht oder ob erst eine entsprechende Herabsetzung der Cohäsion der Zellwand, also eine Variation der Haut, die plastische Dehnung durch die von aussen angreifende Kraft ermöglicht. Diese Energie entstammt normalerweise der Turgorkraft und es ändert nichts an der Sachlage, wenn die nöthige Energie durch die Gewebespannung oder auch durch andere aus der Aussenwelt stammende Kräfte geliefert werden sollte.

In den »Studien zur Energetik« konnte ich in ganz unzweifelhafter Weise darthun, dass das normale Wachsen zumeist nicht in einer plastischen Dehnung der invariablen Haut besteht, dass vielmehr eine Veränderung in dieser Bedingung für das Flächenwachsthum ist. Doch musste ich dahingestellt lassen, inwieweit diese Variation in einer Herabsetzung der Elasticität besteht, ob also passives Wachsen vorliegt, oder ob und inwieweit actives Wachsen durch Intussusception das Flächenwachsthum der Zellwand erzielt. Und wenn auch verschiedene Thatsachen an der Realität der Intus-

---

1) Pfeffer, Studien zur Energetik 1892, p. 218, 240. — Die Kenntniss dieser Studien muss hier unbedingt vorausgesetzt werden, da ich andernfalls zu weit ausholen müsste.

susception in concreten Fällen nicht zweifeln liessen, so lag doch kein Fall vor, in welchem unzweifelhaft feststand, dass das Flächenwachsthum durch Ausscheidungsenergie (Intussusception) erreicht wird. Ein solcher Modus ist aber nothwendig, um in der Reaction gegen mechanischen Widerstand das Entspannen der Zellwand, durch Flächenwachsthum dieser, zu erzielen.

Wie unsere Untersuchungen mit vollster Sicherheit ergeben, schreitet nach Herstellung einer unverrückbaren Widerlage das zur Aussenleistung führende Wachsthum der Zellhaut so weit fort, dass endlich, z. B. in Wurzeln und Grasknoten, die frühere Turgorspannung der Zellwand gänzlich aufgehoben ist (vgl. p. 339, 354, 405, 425 u. s.w.). Hierbei vermindert sich also die Turgordehnung der Haut mehr und mehr und die endlich auf Null zurückgehende Dehnkraft kann unmöglich die plastische Dehnung von Zellwänden erzielen, deren Elasticität während dieser ganzen Zeit nicht herabgeht und derart ist, dass selbst die volle Turgorkraft eine Dehnung über die Elasticitätsgrenze nicht herbeizuführen vermag. Eine solche Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze trat in den Wurzeln von Vicia faba selbst dann nicht ein, als auf die Wandungen, mit dem Entgipsen, plötzlich die sehr erheblich, in gewissen Zonen fast auf das Doppelte gesteigerte Turgorkraft spannend wirkte. In den Grasknoten aber bewahren die Collenchymstränge bei der Ausführung und bei der Verhinderung der geotropischen Krümmung jederzeit eine so hohe Cohäsion, dass selbst eine Verdoppelung der normal auf sie wirkenden Zugkraft sie nicht über die Elasticitätsgrenze zu dehnen vermag. Und doch wachsen, wie gesagt, auch diese Collenchymstränge bei mechanischer Hemmung der geotropischen Krümmung trotz abnehmender, endlich auf Null reducirter Spannung der Haut. Aber auch bei Realisirung der Krümmung ist die auf die Collenchymstränge spannend wirkende Kraft ganz und gar unzureichend, um eine plastische Verlängerung zu erzielen, das erhebliche Längenwachsthum kann also nur durch active Verlängerung der Zellwand erzielt werden.

Während sich die völlige Entspannung der Zellhaut empirisch sicherstellen liess, musste es für den Augenblick fraglich gelassen werden, ob nach diesem Entspannen das Flächenwachsthum der Zellhaut unter Umständen noch fortdauert. Es ist dieses sehr wohl möglich, ja sogar wahrscheinlich, und vielleicht ist solches Fortwachsen in den Collen-

chymsträngen der Grasknoten Thatsache, doch sind die derzeitigen Erfahrungen unzureichend, um diese wichtige Frage zu entscheiden (vgl. p. 406). In zartwandigen Geweben würde ein solches Fortwachsen keine wesentliche Drucksteigerung gegen die Widerlage erzielen, weil eben die Zellwände ausweichen und sich falten[1]). Die Verlangsamung des Wachsens mit zunehmender Entspannung vermag aber nach keiner Seite in unserer Frage zu entscheiden, da eben die Wachsthumsthätigkeit, wie schon wiederholt hervorgehoben wurde, ein complexer, regulatorisch gelenkter Process ist.

Wegen des Stillstandes des Wachsens mit dem Entspannen ist die Verlängerung der Zellwände bei unverrückbarer Widerlage natürlich gering. Doch geht aus dem Verhalten beim Isoliren aus dem Gipsverband hervor, dass immerhin dieses Wachsen die Wandungen der Wurzeln um 8—17 Proc., die der Collenchymstränge um 8—9 Proc. zu verlängern vermag (p. 310, 406). Diese Verlängerung wird aber ansehnlich, sobald der Widerstand bewältigt wird, und solches Wachsen würde, wenn auch stark verlangsamt, fortdauern, wenn die Höhe des Widerstandes nahezu die maximale Aussenenergie fordert, falls also dauernd eine beinahe vollständige Entspannung während des Wachsens unterhalten wird (vgl. p. 327). Uebrigens ist wohl möglich, dass in Pflanzen öfters, wie in den Grasknoten (p. 401), positiv gespannte Gewebecomplexe mit ihrer vollen Turgorenergie gegen die in Zugspannung gesetzten Gewebe wirken und dass dieser vollständig entspannte Zustand sich längere Zeit während des Wachsens erhält. In dieser Richtung habe ich indess besondere Untersuchungen nicht angestellt, in welchen wohl zu beachten ist, dass allein aus der Existenz hoher Druckspannung noch nicht der Mangel von Turgorspannung in der Haut folgt.

Die Erwägung dieser Verhältnisse lässt aber klar erkennen, dass das bei aufgehobener oder minimaler Turgorspannung erzielte Flächenwachsthum nicht der Erfolg einer Quellung sein kann, die doch immer nur begrenzte Verlängerung zu erzielen vermag. Zudem nimmt mit

---

1) Dass aber die Existenz von Wandfaltungen nicht ohne weiteres auf solches Wachsen nach dem Entspannen zu schliessen erlaubt, wurde schon in der »Energetik« p. 246 hervorgehoben. Uebrigens dürften thatsächlich manche Wandfaltungen durch solches nach dem Entspannen fortgesetztes Wachsen entstanden sein.

der Quellung die Cohäsion ab[1]), während in Wurzeln und Grasknoten weder eine solche Abnahme eintritt, noch eine compensirende Dickenzunahme der bezüglichen Zellwände zu bemerken ist.

Die Elasticität der Wandungen wird durch die Reaction gegen eine Widerlage in Wurzeln und Grasknoten eher erhöht als vermindert. Dieses Verhalten ist aber in biologischer Hinsicht nothwendig, da andernfalls, nach weitgehender Herabsetzung der Cohäsion, bei einem plötzlichen Durchbrechen des Widerstandes die nun voll auf die Zellwand wirkende Turgorkraft eine weitgehende plastische Dehnung und nöthigenfalls ein Zerreissen der Zellwände herbeiführen müsste[2]).

Dem experimentellen Nachweis könnte sich nur eine transitorische und mit dem Entlasten augenblicklich rückgängig werdende Herabminderung der Elasticität entziehen, eine Herabminderung die ungemein weit, ja bis zu breiartiger Consistenz gehen müsste, wenn sie ermöglichen sollte, dass die auf ein Minimum reducirte Turgorspannung ein Wachsthum der Zellhaut herbeiführt. Ich glaube, dass eine solche Annahme Niemand wagen wird und unterlasse es deshalb auszumalen, zu welchen absonderlichen Consequenzen eine solche Voraussetzung führt, mit der unerbittlich die Forderung verknüpft ist, dass die hohe Elasticität mit dem Hinwegräumen der Widerlage augenblicklich zurückgebildet wird[3]). Und wenn, was in concreten Fällen wahrscheinlich zutrifft, das Wachsthum der Zellwand nach völliger Entspannung auch nur ein wenig fortschreitet, so kann die Turgorkraft doch keinenfalls die Energie für diese Flächenvergrösserung liefern.

Mit dem Entspannen der Haut sind eben wesentlich andere Bedingungen geschaffen, als bei voller Turgorspannung der Haut. Bei Existenz dieser letzteren ist es theoretisch wohl zu verstehen, dass durch vitale Thätigkeit die Herabminderung der Cohäsion in der Zellhaut derart geleitet werden kann, dass ein Zuwachs durch

---

1) Vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. I, p. 27.

2) Vgl. Energetik 1892, p. 249.

3) Man beachte wohl, dass zur Erreichung der plastischen Dehnung durch die Turgorkraft die Cohäsion so herabgesetzt sein muss, dass jedwelcher äquivalente Zug ebenfalls dauernde Verlängerung erzielt. Eine entsprechende Veränderung in einer einzelnen Ringzone kann also dieser Forderung genügen, während die Verflüssigung einzelner Punkte in der ausserdem resistent bleibenden Zellhaut keinen Erfolg haben kann.

plastische Dehnung erreicht und regulatorisch gelenkt wird[1]). Der Beweis freilich ist bis dahin nicht erbracht, dass das Wachsthum in einem concreten Falle in dieser Weise zu Stande kommt und es ist ebenso möglich, dass in dem Flächenwachsthum der Haut zumeist durch Ausscheidungsenergie die Betriebskraft geliefert wird.

Da nun die Turgorkraft unzureichend ist, um ein Flächenwachsthum der Zellhaut durch plastische Dehnung zu erzielen, so muss die Energie für die ansehnliche Arbeitsleistung in dem Flächenwachsthum in der Wandsubstanz selbst entwickelt werden[2]).

Dieser Anforderung vermag in jeder Weise ein Wachsthum durch Intussusception zu genügen, denn das Auskrystallisiren oder eine durch chemischen Umsatz erzielte Ausscheidung wird mit so ungemein hoher Energie ausgeführt, dass im Vergleich zu dieser Ausscheidungsenergie (Volumenergie) die Intensität der Turgorkraft im Allgemeinen nur sehr gering ist (Energetik p. 252). In der Energetik habe ich ferner auseinandergesetzt, wie in der Continuität der Intussusception, d. h. in der stetigen Wiederholung dieses Auseinandertreibens der Zellhautpartikel durch die sich einkeilende Substanz, alle Bedingungen für ein fortdauerndes und regulatorisch gelenktes Flächenwachsthum gegeben sind.

Dagegen kann durch Aufquellen immer nur eine begrenzte Vergrösserung einer Zellhautlamelle erreicht werden und nur wenn die fortwährend neu apponirten Lamellen plastisch dehnend auf die übrige Zellsubstanz wirkten, wäre ein fortgesetztes Wachsthum der Zellhaut ebenfalls denkbar[3]). Doch ist theoretisch die Realisirung eines solchen Flächenwachsthums an verschiedene, nicht so einfache Bedingungen

---

1) PFEFFER, Energetik 1892, p. 249. — Auf p. 117 ist auch schon angedeutet, dass die bezüglichen Versuche von NOLL und WIESNER eine wirkliche Cohäsionsabnahme in der Zellwand nicht sicher erweisen, welche übrigens, die Interpretationen dieser Forscher als richtig vorausgesetzt, eine permanente wäre. Wenn aber solche Cohäsionsabnahme zutrifft, so muss doch immer erst erwiesen werden, dass sie zureichend ist, um eine plastische Dehnung durch die gegebene Turgorkraft zu ermöglichen.

2) Gewebespannungen, von denen wir absehen dürfen, werden erst durch das Wachsthum erzielt.

3) Vgl. Energetik 1892, p. 222. — In gleichem Sinne kann auch ein Intussusceptionswachsthum von Lamellen mechanisch gegen die übrige Wandsubstanz wirken.

geknüpft und die empirischen Erfahrungen sprechen entschieden gegen das ausgedehnte Vorkommen dieses Wachsthumsmodus[1]. Wir dürfen deshalb unsere Betrachtungen um so mehr auf Wachsthum durch Intussusception beschränken, als auch die Quellungskraft (Oberflächenenergie) schliesslich einer Intussusception von Wasser entspringt und eine solche Energieentwicklung in der schon imbibirten Membran wiederum an active physikalische oder chemische Veränderungen in der Wandsubstanz gekettet ist[2].

Bei der Geringfügigkeit der Turgorenergie gegenüber der Ausscheidungsenergie muss es fraglich erscheinen, ob die constant erhaltene Turgorspannung eine rein mechanische Bedeutung in der Art hat, dass durch sie die Einlagerung neuer Substanz durch Intussusception erleichtert wird[3]. Sollte dieses aber zutreffen — und die Möglichkeit ist immerhin zuzugeben — so würde doch die eigentliche Wachsthumsarbeit durch die Intussusception, d. h. durch die Ausscheidungsenergie geleistet werden. Jedenfalls folgt aber eine derartige mechanische Betheiligung der Turgorkraft nicht aus der Verlangsamung des Wachsthums mit der Entspannung der Haut. Denn solcher Erfolg ist ebensogut mit einer formalen Bedeutung des Turgors verträglich, der in zartwandigen Geweben durch Herstellung genügender Tragfähigkeit stets eine anderweitige mechanische Bedeutung hat.

Auf Grund der energetischen Erfahrung ist also vollkommen

---

1) Die erhebliche Quellung müsste mikroskopisch wahrnehmbar werden. Zudem pflegen die Zellwände gerade nach ihrer Bildung am wasserreichsten zu sein.

2) Ebenso würde es auf eine Energieentwicklung in der Wandsubstanz selbst herauskommen, wenn irgendwie durch eine Umlagerung in den aufbauenden Partikeln die Flächenvergrösserung erreicht würde, gleichviel ob dabei Auflösung und Wiederbildung, Zertrümmern von Molekularcomplexen etc. im Spiele wäre. Durch solche Modalitäten könnte unter Umständen auch eine Ortsverschiebung durch eine Art Wandern der Wandung erreicht werden, wie solches in der That in künstlichen Niederschlagsmembranen durch den Antagonismus von Lösung und Wiederbildung erzielbar ist.

3) Vgl. PFEFFER, Physiologie Bd. II, p. 57. — Hier ist übrigens schon darauf hingewiesen, dass die Turgordehnung eine nothwendige Bedingung in allen Fällen nicht sein muss. — Vgl. ausserdem meine Energetik p. 252. — Ferner wäre in gegebenen Fällen eine correlative Vertretung von Turgorenergie und Ausscheidungsenergie für den Betrieb des Flächenwachsthums denkbar. Vgl. auch p. 339.

sicher gestellt, dass die Turgorenergie vielfach (und wohl zumeist) für die Erzielung eines plastischen Flächenwachsthums unzureichend ist, dass also die Energie für das Flächenwachsthum durch Intussusception geliefert werden muss. Damit ist also auch die Realität des Intussusceptionswachsthums für bestimmte Fälle erwiesen, ohne dass etwas Bestimmtes über die nähere Modalität dieses Wachsens ausgesagt wäre. In dieser Hinsicht lehren Entscheidendes aber auch nicht anderweitige Erfahrungen, die ohnedies das Wachsen durch Intussusception nur im hohen Grade wahrscheinlich machen konnten, ohne für dasselbe einen so unbedingt zwingenden Beweis zu erbringen, wie unsere energetischen Studien. Die Sachlage ist genugsam in meiner Energetik (p. 250) gekennzeichnet und ich füge nur hinzu, dass in jüngster Zeit noch weitere Argumente für ein Wachsen durch Intussusception durch Correns[1]) und Zimmermann[2]) beigebracht wurden. Letzterer lässt übrigens (wie alle anderen Forscher) unentschieden, ob nicht die Turgorspannung der Haut eine mechanische Bedingung für deren Wachsthum durch Intussusception ist.

Wiederholen kann ich hier nur — was ich an verschiedenen Stellen aussprach[3]) — dass die Wachsthumsmechanik nicht in jedem Falle dieselbe sein muss, ja die Thatsachen lehren auch in diesem Falle, dass der Organismus, wie üblich, seine Ziele je nach Umständen mit verschiedenen Mitteln erreicht. So scheint mir in einzelnen Fällen ein Wachsthum durch einfache plastische Dehnung unzweifelhaft zu sein. Auch ist es wohl möglich, dass öfters eine Herabsetzung der Elasticität der Haut benutzt wird, um ein Flächenwachsthum durch die Turgorkraft zu ermöglichen, ja dass solches in gegebenen Fällen Hand in Hand mit dem Wachsen durch Intussusception geht, einem Wachsthumsmodus, der allem Anscheine nach nicht nur vereinzelt, sondern sogar sehr gewöhnlich das Flächenwachsthum vermittelt und zugleich mechanisch betreibt. Ebenso erfolgt nicht aus der Sicherstellung des Appositionswachsthums dessen Allmächtigkeit. Und wenn Apposition vielleicht sogar das gewöhnlichste Mittel ist, um das Dickenwachsthum der Haut zu erreichen,

---

1) Beiträge zur Morphologie und Physiologie herausgegeben von Zimmermann 1893, Heft 3, p. 302.

2) Ebenda p. 198. Vgl. auch Kny, Berichte d. bot. Gesellschaft 1893, p. 377.

3) Physiologie II, p. 57 ff.; Energetik l. c.

so ist damit nicht ausgeschlossen, dass gleichzeitig Intussusceptionswachsthum die Energie für das Flächenwachsthum derselben Zellwand liefert oder lieferte. Von denjenigen Forschern aber, welche alle Massenzunahme der Zellwand durch Apposition und alles Flächenwachsthum durch plastische Dehnung zu Stande kommen lassen, darf man billigerweise fordern, dass sie in Erwägung ziehen, ob die für diese Dehnungsarbeit nöthige Energie in zureichender Weise zur Verfügung steht[1]).

Wie alles Wachsen resultirt auch speciell das Wachsthum der Zellhaut aus dem Zusammengreifen verschiedener Factoren, und so ist klar, dass das Getriebe des Wachsens verlangsamt wird oder ganz zum Stillstand kommt, wenn auch nur eine der Bedingungen ungenügend erfüllt ist. Demgemäss ist aus der Retardirung des Wachsens mit abnehmender Turgordehnung der Haut nicht zu folgern, dass der Turgor die Wachsthumsarbeit leistet[2]). Denn dieses thut auch nicht die Wärme, mit der ebenfalls die Zuwachsbewegung steigt und fällt, und in irgend einer analogen Weise kann auch, wie schon p. 339 bemerkt wurde, eine gewisse Turgorspannung der Haut eine Bedingung für die Herstellung und Erhaltung des wachsthumsfähigen Zustandes sein. In der That kommt diese Bedeutung in irgend einer Weise der Turgorspannung da zu, wo die gesammte Arbeit des Flächenwachsthums nicht durch die osmotische Energie, sondern durch die Ausscheidungsenergie geleistet wird. Thatsächlich steigt auch das Flächenwachsthum nicht mit der mechanischen Dehnung, ja eine Steigerung dieser veranlasst sogar eine Retardirung des Flächenwachsthumes der Haut (HEGLER), und ferner besteht in wachsenden Wurzeln und Stengeln keine Coincidenz zwischen Turgorenergie, Hautdehnung und Wachsthumsschnelligkeit (p. 308). Die Turgorspannung ist übrigens in zartwandigen Geweben für Herstellung der genügenden Tragfähigkeit nothwendig, und schon hierdurch, sowie als Energiemittel für Aussenleistungen, gewinnt die Turgorkraft eine hervorragende mechanische Bedeutung.

---

1) Leider begegnet man in der botanischen Literatur nicht so selten Forderungen, die mehr oder weniger offenkundig gegen das Princip der Erhaltung der Kraft verstossen, indem sie mechanische Actionen ohne zureichenden Energieaufwand postuliren.

2) So schon aufgefasst in PFEFFER, Physiologie Bd. II, p. 57.

Es wurde auch schon wiederholt betont, dass das Wachsthum in gegenseitiger Abhängigkeit vom Gesammtgetriebe regulatorisch gelenkt wird. Diese Regulation betrifft die Gesammtheit der im Wachsen zusammenwirkenden Factoren und wird nie allein durch mechanische Uebertragungen, sondern auch durch directe und indirecte Auslösungsverkettungen (Reize) geregelt. Eine solche Regulation ist ebenso klar ausgesprochen, wenn das Wachsthum langsamer oder schneller sich abspielt, als wenn es zum Stillstand gebracht und damit die das Wachsthum unterhaltenden Processe selbstregulatorisch sistirt oder modificirt werden. Auf diese wechselseitige Verkettung ist in dieser Arbeit und auch schon in der Energetik (p. 248) so nachdrücklich hingewiesen, dass eine nochmalige ausgedehnte Erörterung dieses Themas unnöthig erscheint.

Diese Selbstregulation ist in allgemeinen Zügen in der That so offenkundig, dass jede Wachsthumstheorie, welche sie entbehren zu können glaubt, eben den realen Thatsachen keine Rechnung trägt. Leistet z. B. die Turgorenergie die Arbeit im Flächenwachsthum, so muss nicht nur die Turgorhöhe, sondern auch der Widerstand der Zellhaut entsprechend gelenkt werden, gleichviel ob ein statischer elastischer Zustand angenommen wird, oder ob das Wachsthum von einem Herabsetzen der Elasticität der Haut abhängig gemacht wird. Nicht minder steht einige Zeit nach einer mechanischen Hemmung die Intussusception stille, obgleich der Wiederbeginn des Wachsens nach Hinwegnahme des Hindernisses lehrt, dass die Fähigkeiten für diesen Wachsthumsmodus potentiell in bester Weise vorhanden waren.

Aus Betrachtungen dieser Art lässt sich aber nicht ein Schluss auf die specielle Wachsthumsmechanik ziehen, denn dem Erfolge allein ist nicht anzusehen, welche Factoren zur Erreichung des Endresultates zusammengriffen. Zu diesen Factoren zählen auch die unbekannten specifischen Eigenheiten, welche es bewirken, dass z. B. die einzelnen Zellen sich verschieden in Bezug auf den Umriss und die Dicke der Wand gestalten, dass in der einen Zellwand früher als in einer anderen ein dauernder oder transitorischer Wachsthumsstillstand sich einstellt. Erwacht dann das Wachsthum wieder, ohne dass eine Steigerung der Turgorkraft eintritt — wie es z. B. bei geotropischer Reizung der Knoten von Triticum zutrifft —, so ist nur soviel zunächst gewiss, dass irgend eine Action in der Zellhaut

sich abspielen musste, ohne dass sich sogleich sagen lässt, ob es sich um ein Erweichen der Wand oder um einen Betrieb durch Intussusceptionswachsthum handelt. Dass aber das gewöhnliche Flächenwachsthum nicht ohne eine Veränderung oder Action in der Wandung möglich ist, wurde in der Energetik so unwiderleglich nachgewiesen, dass andere Theorien (so die von WORTMANN) ihre Existenzberechtigung verloren haben.

Die Forschung muss natürlich dahin streben, die Gesammtheit der im Wachsthum sich abspielenden Vorgänge mehr und mehr aufzudecken, und wie sich auch speciell in Bezug auf die Selbstregulation sogleich bestimmte Fragestellungen aufdrängen, wurde früher (p. 428) beispielsweise dargelegt.

XIV. Belege.

Abth. I. Druckversuche mit Wurzeln von Keimpflanzen.

Die Resultate der in dieser Abtheilung aufzuführenden Versuche über Längs- und Querdruck der Wurzeln sind in Tab. I u. II (p. 264, 266) zusammengestellt worden. Ausserdem ist unter Nr. 22 die Druckentwickelung einer nicht eingegipsten Wurzel mitgetheilt.

Ueber die Methodik ist in Kap. II das Nöthige gesagt und nur das zur Charakterisirung des einzelnen Experiments Nothwendige wird an entsprechender Stelle mitgetheilt. So ist auch jeweils angegeben, ob zur Messung des Querdrucks die Schraubklemme (Apparat B) oder der Zangenapparat (Apparat C) diente, während zur Bestimmung des Längsdrucks, mit alleiniger Ausnahme des Kautschuckversuchs (Nr. 7), stets die Messfeder (Apparat A) benutzt wurde.

Die erste Zahl der Zeitcolumne kennzeichnet diejenige Zeit, in welcher der Messapparat fertig angepasst war. Bis dahin war, vom Beginn des Eingipsens ab, durchschnittlich ½ bis ¾ Stunde verflossen. Der zu Beginn eingestellte Gegendruck der Feder wurde nicht angeführt, da dieser für die nächste Zeit sich durch Ausdehnung des Gipsgusses änderte, eine Eigenschaft, die, wie an geeigneter Stelle (p. 286) entwickelt wurde, auf die endlichen Druckwerthe keinen Einfluss hat, sofern die Wurzel eine gewisse active Abhebung des Gipsdeckels weiterhin ausführt. Die Länge der auf dem Tisch der Messfeder senkrecht stehenden Achse des Gipsgusses wurde nicht angegeben. Uebrigens ist diese Achse nennenswerth kürzer als die jeweils notirte Wurzellänge und beträgt für die Querdruckversuche meist weniger als 35 mm.

Während der Versuche standen die Objecte in einem matt erleuchteten Zimmer. Dabei war für ausreichend constante Temperatur und für genügende Feuchtigkeit in früher beschriebener Weise gesorgt. Die Wurzeln befanden sich also in der Gipshülle fast im Dunkeln, während die Sprosse, wenn solche aus der Erde oder den Sägespänen hervorkamen, sich, besonders in den Wintermonaten, in mässiger Beleuchtung entwickelten. Dieses hat indess wenig Bedeutung, da innerhalb der von uns benutzten Versuchsdauer nur ein kleiner Theil der Reservestoffe consumirt wurde, ein Nährstoffmangel also ausgeschlossen war. Nähere Angaben über den Entwickelungsgrad der nicht eingegipsten Theile sind nur soweit gemacht, als es Interesse zu haben schien.

Die Ablesungen sind durchweg in verkürzter Form wiedergegeben. Nur in Vers. 1 ist, als Beispiel, der direct abgelesene Spitzenabstand der Nadeln angeführt, während ausserdem nur der entsprechende Druck in Gramm mitgetheilt ist. In der nächsten Verticalreihe steht die für den markirten Zeitintervall sich berechnende stündliche Druckzunahme. Ebenso sind, mit Ausnahme von Versuch 1, nur die Extreme angegeben, in welchen sich die Temperatur bewegte.

Unter »Federstärke« ist das zur Annäherung der Nadelspitzen um einen Theilstrich des Mikrometers nöthige Gewicht in Gramm, unter »Weite des Gipsspalts« oder »Spaltweite« die Distanz notirt, um welche sich der Gipsdeckel von seiner Unterlage abhob. Wie einige directe Controlmessungen ergaben, wird diese Weite des Gipsspaltes durch das in den Ablesungen bemessene Nachgeben der Feder genügend genau bestimmt.

Ueber die Bestimmung des activen Querschnitts findet sich das Nöthige p. 277 und 280. Ebenso ist aus Früherem zu entnehmen, wie und warum in manchen Versuchen zwei verschiedene Querschnittsflächen angenommen wurden.

Die in Gramm angegebenen Druckwerthe sind bei den Versuchen über Längsdruck um das Gewicht des ebenfalls auf der Feder lastenden Gipsdeckels zu gross. Dieses meist 2—3 g betragende Gewicht ist demgemäss zur Gewinnung des realen Druckes abzuziehen, und die Angabe z. B. in Vers. 1: Enddruck 260 — 2,5 = 257,5 g, trägt dieser Reduction Rechnung.

A. Messungen des Längsdrucks der Wurzeln von Keimpflanzen.

Versuche I—XII.

Versuch I. *Vicia faba.*

Wurzellänge 35 mm. Der Kanal im Gipsdeckel wurde so verlängert, dass die Wurzelspitze zur Ausfüllung 1,2 mm in die Länge wachsen musste und dass dann ein 6,2 mm langer Spitzentheil im Gipsdeckel steckte.

Federstärke: 1 Strich à 0,0169 mm = 13,33 g. — Ohne Druck betrug in der Messfeder der Abstand der Nadelspitzen 54 Strich. Gipsspalt am Schluss = 0,5 mm. Der Querschnitt der mässig angeschwollenen Krause = 3,4 qmm; der mittlere Durchmesser = 2,1 mm, d. h. um 0,2 mm grösser als der Durchmesser des Gipskanals. Enddruck = 260—2,5 = 257,5 g. Druckintensität = 7,04 Atmosphären = 72,8 g p. 1 qmm.

Zeit	Abstand der Spitzen in Theilstrichen à 0,0169 mm	Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde	Temperatur ° C.
26./XII. 1892. 10½ Mo.	. . . .			
12 »	52,5 Str.	20 g		18,8° C.
2 Ab.	51,0 »	40 »	13,5 g	18,9 »
4 »	48,8 »	69,3 »		19,1 »
6 »	46,4 »	101,3 »		19,4 »
8 »	44,1 »	132,0 »	15,3 »	18,6 »
10 »	42,0 »	160,0 »	14,0 »	19,3 »
27./XII. « 7 Mo.	37,0 »	226,6 »	7,4 »	20,2 »
12 »	36,0 »	240,0 »	2,7 »	19,5 »
7 Ab.	35,5 »	246,7 »	0,95 »	18,9 »
28./XII. « 8 Mo.	35,0 »	253,3 »	0,60 »	18,6 »
29./XII. « 8 »	34,5 »	260,0 »	0,56 »	19,2 »

Versuch II. *Vicia faba.*

Wurzellänge = 42 mm, davon 5 mm im Gipsdeckel. — Temp. 19,1—20,3° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0169 = 13,33 g. — Gipsspalt = 0,4 mm. — Krause sehr mässig; Durchm. = 2,2 mm; Querschnitt = 3,7 qmm.

Enddruck = 296,7—2,4 = 294,3 g. — Druckintensität = 7,7 Atm. = 79,5 g p. 1 qmm.

Zeit				Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
17./XII.	1892.	7½	Mo.	. . . .	
		10	»	33,3 g	14,78 g
		12	»	66,5 »	
		2	Ab.	93,3 »	13,4 »
		6	»	139,9 »	11,65 »
		10	»	173,1 »	8,3 »
18./XII.	»	7	Mo.	219,4 »	5,14 »
		7	Ab.	253,6 »	2,85 »
19./XII.	»	7	Mo.	276,9 »	1,94 »
		7	Ab.	290,2 »	1,11 »
20./XII.	»	7	Mo.	296,7 «	0,54 »

Versuch III. *Vicia faba.*

Wurzellänge = 35 mm, davon 4 mm in der Gipskappe. — Temp. 18,6—19,5° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,021 mm = 2,7 g. — Gipsspalt = 0,55 mm. — Krause: Durchmesser = 2,0 mm (0,2 mm mehr als Gipskanal); Querschnitt = 3,2 qmm.

Enddruck = 356,9—4,2 = 352,7 g. — Druckintensität = 10,67 Atm. = 110,2 g p. 1 qmm.

Zeit			Druck	Druck-zunahme p. 1 Stunde
28./X. 1892.	8½	Mo.	. . . .	
	10	»	230 g	12,74 g
	10	Ab.	235,4 »	
29./X. »	7	Mo.	286,7 »	
				5,85 »
	1	Ab.	321,8 »	
				4,86 »
	6	»	346,1 »	
				2,7 »
	10	»	356,9 »	

Versuch IV. *Vicia faba.*

Wurzel 37 mm lang, davon 3,5 mm in der Gipskappe. — Temp. 18,2—19,8° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0169 = 13,33 g. — Gipsspalt 0,07 mm. — Krause: Durchmesser = 1,8 mm (0,05 mm mehr als im Gipskanal); Querschnitt = 2,6 qmm.

Enddruck = 262,6—2,0 = 260,6 g. — Druckintensität = 9,7 Atm. = 100,2 g p. 1 qmm.

Zeit			Druck	Druck-zunahme p. 1 Stunde
12./I. 1893	8	Mo.	. . . .	
	10	»	191,6 g	
	10	Ab.	206,6 »	6,28 g
13./I. »	8	Mo.	206,6 »	
	7	Ab.	219,9 »	
				1,27 »
14./I. »	8	Mo.	236,6 »	
				0,47 »
15./I. »	8	»	247,8 »	
				0,33 »
16./I. »	8	»	254,7 »	
				0,11 »
18./I. »	8	»	260,0 »	
				0,05 »
20./I. »	8	»	262,6 »	

Versuch V. *Vicia faba.*

Wurzel 32 mm lang. Gipskappe derart ausgebohrt, dass die hineingewachsene Wurzel cylindrisch wird und einen Durchmesser erreicht, der erst 12 mm rückwärts vom Gipsspalt wiederkehrt (vgl. p. 274). Das in den Gipsdeckel ragende Wurzelstück ist zu Beginn 2,8 mm lang und wächst auf 4,2 mm, bis zur Ausfüllung heran. — Temp. 17,6—19,1° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0114 mm = 14,08 g. — Gipsspalt sehr gering. Der diesem entsprechende Querschnitt hat ungefähr gleichen Flächeninhalt wie das cylindrisch geformte Spitzenstück im Gipsdeckel; nämlich Durchm. = 2,0 mm; Fläche = 3,1 qmm.

Enddruck 274,5 — 2,5 = 272,0 g. — Druckintensität = 8,49 Atm. = 87,7 g p. 1 qmm.

Zeit			Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
9./X. 1892.		8 Mo.	. . . .	
		10 »	169,3 g	
		10 Ab.	190,4 »	6,25 g
10./X.	»	8 Mo.	190,4 »	
		7 Ab.	218,6 »	
				1,95 »
11./X.	»	8 Mo.	244,0 »	
				0,84 »
12./X.	»	8 »	264,1 »	
				0,30 »
13./X.	»	8 »	271,2 »	
				0,14 »
14./X.	»	8 »	274,5 »	

Versuch VI. *Vicia faba.*

Wurzel = 34 mm lang. — Temp. 18,2—19,2° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0182 mm = 22,8 g.

Die Wurzel ist nach p. 247 so eingegipst, dass die wachsende Wurzelspitze auf die Glasplatte oberhalb der Druckfeder stösst. Der Spalt zwischen Gips und Glasplatte ist sehr gering, etwa 0,09 mm. Die Wurzelspitze ist am Schlusse des Versuches abgeflacht und der Glas-

platte angeschmiegt. Die Contactfläche misst 1,13 qmm, bei einem mittleren Durchmesser von 1,2 mm. Da wo der Gipsdeckel angegipst wurde, d. h. 4,8 mm von der Contactfläche mit der Glasplatte entfernt, hatte sich an der Wurzel eine geringe Krause ausbilden können, die also jedenfalls an dieser Stelle die Wurzel fixirte. Der Querschnitt dieser Krause mit 2,01 qmm (Durchm. 1,6 mm), ist der unter B. verzeichneten Rechnung zu Grunde gelegt, während sich A. auf die Fläche der abgeflachten Spitze bezieht (vgl. p. 263).

Enddruck. A. 226 g. Druckintensität 19,36 Atm. = 200 g p. 1 qmm,
B. 226 » » » 10,44 » = 107,9 g p. 1 qmm.

Zeit		Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
14./XII. 1892.	10 Mo.	. . . . .	
	10 Ab.	148,2 g	5,42 g
15./XII. »	8 Mo.	148,2 »	
	7 Ab.	178,8 »	
16./XII. »	8 Mo.	194,8 »	1,23 »
17./XII. »	8 »	217,0 »	0,92 »
18./XII. »	8 »	226,0 »	0,37 »

Versuch VII. *Vicia faba.* Messung mittelst Gummischlauchs.

Die 30 mm lange Wurzel war in der (p. 260) beschriebenen Weise in den Gummischlauch eingesetzt. Nach 1½ Stunden, also nachdem schon ein gewisser Druck bestand, begannen die Ablesungen, die, wie auch die stündliche Zunahme, in Theilstrichen mitgetheilt sind. Der Abnahme um 1 Theilstrich entspricht eine mittlere Druckzunahme von 7,14 g. Die Verlängerung war nicht genau proportional zum spannenden Gewicht. Der Enddruck wurde zu ca. 250 g gefunden.

Von der Wurzel befand sich der 3 mm lange Spitzentheil in der Glashülse *a* (vgl. Fig. 6 p. 260). Die anschliessende Strecke in dem Kautschuckschlauch war 6 mm lang. Zum Schluss ergaben sich für diesen Theil der Wurzel folgende Maasse:

A) für das spitzenwärts liegende Ende: Querschnitt = 3,46 qmm; Durchmesser = 2,4 mm.

B) für das basalwärts liegende Ende: Querschnitt = 4,71 qmm; Durchmesser = 3,0 mm.

Hiernach berechnet sich die Druckintensität

für A = 6,98 Atm. = 72,2 g p. qmm,
» B = 5,16 » = 53,1 » » »

Temp. 17,4—18,4° C.

Ein zweiter nicht ganz so günstig verlaufener Versuch gab ein ähnliches Resultat.

Zeit		Distanz der Nadelspitzen	Differenz in Theilstrichen p. 1 Std.
10./XII. 1892.	9 Mo.	57	
			1
	10 »	56	
			1
	1 Ab.	53	
			1,3
	6 »	46,5	
			0,88
	10 »	43,0	
			1,2
11./XII. »	8 Mo.	31,0	
			1,8
	1 Ab.	22,0	
			0,71
	8 »	17,0	
			0,09
12./XII. »	7 Mo.	16,0	
			0
	7 Ab.	16,0	

Versuch VIII. *Zea Mais.*

Zu den Versuchen 8, 9, 10 diente Cinquantino-Mais. In diesem Versuch war die Wurzel 36 mm lang und hiervon befanden sich 3,0 bis 3,2 mm im Gipsdeckel. — Tpt. 19,1—20,2° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0169 m = 13,33 g. — Gipsspalt = 0,06 mm. — Krause: Durchm. = 1,4 mm, Querschnitt = 1,54 qmm. Die Wurzel misst oberhalb und unterhalb des Gipsspaltes: Durchm. = 1,2 mm, Querschnitt = 1,23 qmm.

Enddruck 160 — 2 = 158 g. Druckintensität berechnet für:

A: unterhalb Gipsspalt (1,23 qmm) = 12,51 Atm. = 129,2 g p. qmm,
B: Krause (1,54 ») = 9,93 » = 102,6 » » »

Zeit		Druck	Druckzunahme p. 1 Std.
11./I. 1893.	10 Mo.	. . . .	
	10 Ab.	120,0	4,4 g
12./I. »	8 Mo.	120,0	
	7 Ab.	133,3	1,03 »
13./I. »	8 Mo.	146,7	
14./I. »	8 »	157,3	0,97 »
15./I. »	8 »	160,0	0,23 »

Versuch IX. *Zea Mais.*

Wurzel = 24 mm lang, davon 2,6 mm im Gipsdeckel. — Tpt. 18,8 — 20,1° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0169 = 13,33 g. — Gipsspalt 0,3 mm. — Krause: Durchm. 1,8 mm. Fläche 2,52 qmm. Die anschliessende Wurzelspitze misst: Durchm. = 1,2 mm, Fläche = 1,13 qmm.

Enddruck 293,2 — 2,1 = 291,1 g. Druckintensität berechnet für:
A: unterhalb Krause im Gips = 24,94 Atm. = 257,7 g p. 1 qmm,
B: Krause = 11,18 » = 115,5 » » 1 »

Zeit		Druck	Druckzunahme p. 1 Std.
3./I. 1892.	9 Mo.	. . . .	
	6 Ab.	86,5 g	5,21 g
	10 »	86,5 »	
4./I. »	8 Mo.	119,9 »	4,76 »
	9 Ab.	181,8 »	4,27 »
5./I. »	8 Mo.	233,1 »	4,78 »
	8 Ab.	290,5 »	0,22 »
6./I. »	8 Mo.	293,2 »	

Versuch X. *Zea Mais.*

Wurzel 25 mm lang, davon 2,3 mm im Gipsdeckel. — Tpt. 19,4—20,2° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0169 = 2,94 g. — Gipsspalt = 0,4 mm. — Krause: Durchm. = 1,6 mm, Querschnitt = 2,0 qmm. Der an die Krause basipetal anschliessende, im Gips steckende Wurzeltheil misst: Durchm. = 1,4 mm, Querschnitt = 1,54 qmm.

Enddruck 198,8 — 1,7 = 197,1 g. — Druckintensität für
A: unterhalb Krause im Gips = 12,39 Atm. = 128 g p. qmm,
B: Krause = 9,53 » = 98,5 » » »

Zeit		Druck	Druck-zunahme p. 1 Std.
21./XII. 1892.	9 Mo.	. . . .	
	6 Ab.	126,3 g	8,0 g
22./XII. »	8 Mo.	184,1 »	
	7 Ab.	198,8 »	1,34 »

Versuch XI. *Vicia sativa.*

Wurzel = 23 mm, davon im Gipsdeckel 2,2 mm. — Tpt. 18,7—19,5° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0169 = 2,94 g. — Krause: Durchm. 0,8 mm; Querschnitt 0,5 qmm. Wurzel unterhalb Gipsspalt im Gips: Durchm. 0,6 mm, Querschnitt 0,31 qmm.

Enddruck 44,1 — 1,5 = 42,6 g. Druckintensität für
A: Wurzeltheil im Gips (0,31 qmm) = 13,33 Atm. = 137,7 g p. qmm,
B: Krause (0,5 ») = 8,26 » = 85,3 » » »

Zeit		Druck	Druck-zunahme p. 1 Std.
18./I. 1893.	10 Mo.	. . . .	
	10 Ab.	29,4 g	6,4 g
19./I. »	8 Mo.	29,4 »	
20./I. »	8 »	35,3 »	0,61 »
21./I. »	8 »	42,6 »	0,12 »
22./I. »	8 »	44,1 »	

Versuch XII. *Aesculus hippocastanum.*

Wurzel 45 mm lang, davon 3,2 mm in der Gipskappe. — Tpt. 17,6—19,4° C. — Federstärke: 1 Strich à 0,0182 mm = 22,8 g. — Gipsspalt gering und Wurzel an dieser Stelle kaum angeschwollen. Durchm. = 2,5 mm, Querschnitt = 4,9 qmm.

Enddruck 340 — 3,2 = 336,8 g. — Druckintensität = 6,65 Atm. = 68,7 g p. qmm.

Zeit			Druck	Druckzunahme p. 1 Std.
22./XI. 1892.		11 Mo.	....	
		10 Ab.	205,2 g	5,55 g
23./XI.	»	8 Mo.	205,2 »	
24./XI.	»	8 »	250,8 »	2,33 »
25./XI.	»	8 »	306,8 »	1,38 »
26./XI.	»	8 »	340,0 »	0,0 »
27./XI.	»	8 »	340,0 »	

B. Messungen des Querdrucks an Wurzeln von Keimpflanzen.

Versuche XIII—XXI.

Versuch XIII. *Vicia faba.*

Activ gegen den Gipsdeckel wirkt der 8 mm lange Spitzentheil der 45 mm langen Wurzel. Der Deckel wird nur um 0,06 mm abgehoben und die Wurzel hat eine kaum merkliche Ausbauchung nach diesem Spalt hin gebildet. Flächeninhalt des Medianschnitts des activen Theiles = 29 qmm. Seitenwurzelanlagen bilden sich in üblicher Weise in allen diesen Gipsversuchen (vgl. Kap. VII). Bis zum Schluss hat sich der Stengel 92 mm hoch über den Boden erhoben.

Apparat: Schraubklemme. — Federstärke: 1 Strich à 0,0182 mm = 57,17 g. — Tpt. 17,3—18,9° C.

Enddruck 1830 g. Druckintensität = 6,11 Atm. = 63,1 g p. qmm.

Zeit		Druck	Druck-zunahme p. 1 Std.
12./I. 1893.	9 Mo.	. . . .	4,36 g
	10 Ab.	1401 g	
13./I. »	8 Mo.	1401 »	
	6 Ab.	1458 »	4,07 »
14./I. »	8 Mo.	1515 »	
Druck durch Anschrauben verstärkt auf			10,75 »
	8 Mo.	1716 g	
15./I. 1893.	8 »	1773 »	1,17 »
16./I. »	8 »	1801 »	0,5 »
17./I. »	8 »	1813 »	0,71 »
18./I. »	8 »	1830 »	0 »
19./I. »	8 »	1830 »	

Versuch XIV. *Vicia faba.*

Activ gegen den Gipsdeckel wirkt der 5,5 mm lange Spitzentheil der 38 mm langen Wurzel. Der Deckel wurde nur um 0,05 mm abgehoben und die Wurzel zeigte kaum eine Ausbauchung nach dem Spalt. Flächeninhalt des Medianschnitts im activen Theil = 10,5 qmm.

Apparat: Schraubklemme. — Federstärke: 1 Strich à 0,0099 mm = 24,2 g. — Temp. 17,0—18,9° C.

Enddruck = 500 g. — Druckintensität = 4,61 Atm. = 47,6 g p. qmm.

Zeit		Druck	Druck-zunahme p. 1 Stunde
12./XI. 1892.	8 Mo.	. . . .	8,04 g
»	9 Ab.	339 g	
13./XI. »	8 Mo.	341 »	
14./XI. »	8 »	386 »	
Nun Druck gesteigert auf:			4,04 »
14./XI. 1892.	8 Mo.	458 g	
15./XI. »	8 »	483 »	0,5 »
16./XI. »	8 »	495 »	0,02 »
17./XI. »	8 »	500 »	

Versuch XV. *Vicia faba.*

Gegen den Gipsdeckel wirkt der 5 mm lange Spitzentheil der 30 mm langen Wurzel. Der Deckel wurde um 0,17 mm abgehoben und die Wurzel hatte sich etwas nach dem Spalt hin ausgebaucht. Der Flächeninhalt dieses grössten Medianschnittes im activen Spitzentheil betrug 9,5 qmm.

Apparat: Zangenapparat. — Federstärke: 1 Strich à 0,0204 mm = 9,4 g. — Temp. 17,9—19,6° C.

Enddruck 599,6 g. — Druckintensität = 6,11 Atm. = 63,1 g p. qmm.

Zeit			Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
5./XI.	1892.	8½ Mo.	.....	
	»	6 Ab.	394,8 g	
6./XI.	»	7 Mo.	399,5 »	6,11 g
7./XI.	»	8 »	399.5 »	
8./XI.	»	8 »	437,1 »	
Druck gesteigert auf 502,9 g				
8./XI.	1892.	8 Mo.	502,9 g	5,68 »
9./XI.	»	8 »	573,4 »	
10./XI.	»	8 »	592,6 »	0,8 »
11./XI.	»	8 »	597,3 »	0,2 »
12./XI.	»	8 »	599,6 »	0,09 »

Versuch XVI. *Vicia faba.*

Dieser hier nicht näher mitgetheilte Versuch wurde mit demselben Apparat und mit derselben Feder wie Versuch 5 ausgeführt. — Temp. 18,4—20,1° C. Gegen den Gipsdeckel wirkte der 6,2 mm lange Spitzentheil der Wurzel. Der Versuch dauerte 6 Tage. Der Gipsspalt erreichte 0,2 mm und eine Ausbauchung der Wurzel in jenen war merklich. Der grösste Medianschnitt der activen Partie ergab = 12,2 qmm.

Enddruck = 542 g. — Druckintensität = 4,3 Atm. = 44,4 g p. qmm.

Versuch XVII. *Vicia faba.*

Von der 44 mm langen Wurzel war der 7 mm lange Spitzentheil fix eingegipst, so dass die Wurzelstrecke von 7 bis zu 15,7 mm gegen den Gipsdeckel wirkte. Dieser wurde um 0,16 m abgehoben und eine nur mässige Hervorwulstung entstand. Der entsprechende grösste Medianschnitt hatte 15,8 qmm Flächeninhalt. Am Schluss war über dem Boden ein 70 mm hohes Stengelstück erschienen.

Apparat: Zangenapparat. — Federstärke: 1 Strich à 0,0204 = 13,9 g. — Tpt. 17,8—19,2° C.

Enddruck = 897,3 g. — Druckintensität = 5,5 Atm. = 56,8 g p. qmm.

Zeit		Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
3./X. 1892.	12 Mo.	. . . .	6,77 g
	7 Ab.	587,7 g	
4./X. »	8 Mo.	594,7 »	
5./X. »	8 »	594,7 »	
6./X. »	8 »	594,7 »	
7./X. »	8 »	622,5 »	
Druck gesteigert auf		733,7 »	7,36 »
8./X. 1892.	8 Mo.	733,7 »	
	6 Ab.	872,7 »	1,56 »
9./X. »	8 Mo.	894,6 »	0,11 »
10./X. »	8 »	897,3 »	

Versuch XVIII. *Vicia faba.*

Die 38 mm lange Wurzel wurde so eingegipst, dass ein 7,5 mm langer Spitzentheil frei aus dem Gipse hervorsah, während die anschliessende 10,7 mm lange Strecke, also von 7,5—18,2 mm, gegen den Gipsdeckel zur Wirkung kam. Die frei hervorsehende Wurzelspitze wurde zunächst zwischen nassem Fliesspapier gehalten und, nachdem sie 10 mm Länge überschritten hatte, in einen Topf mit feuchten Sägespänen gelenkt. In diesem wuchs während der zehn-

tägigen Versuchsdauer der Spitzentheil zu einer Länge von 130 mm heran und producirte Nebenwurzeln bis zu einer Länge von 60 mm. Der aus dem Topf hervorsehende Stengel war inzwischen 120 mm lang geworden und das Hypocotyl, sowie die Basis vom Epicotyl hatten Nebenwurzeln in die umgebenden Sägespäne getrieben.

Die Basis des freien Wurzeltheils war bei Schluss des Versuches nur wenig, etwa um 0,2 mm, dicker als das angrenzende unter dem Gipsdeckel eingeengte Wurzelstück. Dieses hatte nur eine minimale Ausbuchtung gegen den geringen, etwa auf 0,15 mm erweiterten Spalt entwickelt. Der dem Spalt entsprechende Medianschnitt des unter dem Deckel befindlichen Wurzelstückes betrug 17,1 qmm.

Apparat: Zangenapparat. — Federstärke: 1 Strich à 0,0204 mm = 12,5 g. — Tpt. 17,1—19,0° C.

Enddruck = 689,2 g. — Druckintensität = 3,9 Atm. = 40,3 g p. qmm.

Zeit		Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
16./X. 1892.	10 Mo.	. . . .	
	5 Ab.	430 g	
17./X. »	7 Mo.	432,5 »	8,22 g
18./X. »	7 »	432,5 »	
	8 Ab.	477,2 »	
Druck erhöht auf		530,5 »	
19./X. 1892.	8 Mo.	530,5 »	2,24 »
20./X. »	7 »	555,5 »	
Druck erhöht auf		605,5 »	2,34 »
21./X. 1892.	7 Mo.	611,7 »	
22./X. »	7 »	649,2 »	1,56 »
23./X. »	7 »	674,2 »	1,04 »
24./X. »	7 »	684,2 »	0,42 »
25./X. »	7 »	688,0 »	0,16 »
26./X. »	7 »	689,2 »	0,05 »

Versuch XIX. *Vicia faba.*

Wie in Versuch 17 wurde die 42 mm lange Wurzel so eingegipst, dass der 8 mm lange Spitzentheil in Gips fixirt war und die anschliessende Strecke von 8—21 mm gegen den Gipsdeckel wirkte. Dieser wurde bis zum Schluss des Versuches um 0,4 mm abgehoben. In Folge des so gewonnenen Spielraums gelang es einigen Seitenwurzelanlagen auszuwachsen und sich durch den Spalt hindurch nach aussen zu drängen. Die erste hervortretende Nebenwurzel wurde am 12. Juni, also nach 9tägiger Versuchsdauer sichtbar. Am Schluss, also nach 13 Tagen, ergab sich, dass von den Nebenwurzelanlagen es 5 Stück zum Auswachsen gebracht hatten. Die drei längsten (10—20 mm lang) traten aus dem Deckel heraus, während unter diesem die 3 mm und 5 mm langen Würzelchen verborgen blieben.

Die Hauptwurzel selbst hatte sich gegen den Gipsspalt erheblich ausgebaucht, so dass die Durchmesser in dieser Richtung 2,1—2,4 mm, senkrecht dazu 1,8—2,0 mm betrugen. Auch die entstandenen Seitenwurzeln, besonders die länger gewordenen, waren durch Anpressen an den Deckel deutlich abgeflacht.

Der der Spaltfläche entsprechende Medianschnitt des Stückes der Hauptwurzel unter dem Deckel wurde zu 24 qmm bestimmt. Für den Medianschnitt der gegen den Deckel pressenden Stücke der Seitenwurzeln ergab sich der ungefähre Werth von 25 qmm.

Nehmen mir demgemäss die gesammte wirksame Fläche zu 49 qmm an, so berechnet sich aus dem Enddruck von 1511 g eine Druckintensität: B von 2,98 Atm. = 30,8 g p. qmm.

Diese Nebenwurzeln konnten aber nur mit der Zeit und mit entsprechender Abhebung des Deckels auftreten. Da nun zwischen dem 7. und 8. Juni die Druckzunahme minimal geworden war (0,05 g p. 1 Std.), dann aber zunächst wieder beschleunigt wurde (2,17 bis 3,71 g p. 1 Std.), um endlich späterhin wieder zu sinken, so ist anzunehmen, dass vom 8. Juni ab die Action der Seitenwurzeln ins Spiel trat. Die spätere Senkung der Druckzunahme ist dann die natürliche Folge der mit der Zeit auch in den Nebenwurzeln verlangsamten Druckanschwellung. Unter dieser allerdings unsicheren Annahme wurde zur Veranschaulichung aus dem am 8. Juni erreichten Druckwerth von 877 g die Druckintensität unter der Voraussetzung

berechnet, dass bis dahin nur die 24 qmm grosse Fläche der Hauptwurzel gegen den Gipsdeckel wirksam war. Als Druckintensität ergibt sich dann: A 3,53 Atm. = 36,5 g p. qmm.

Am Schlusse des Versuchs ragte der Sprosstheil 100 mm über den Boden.

Apparat: Zangenapparat. — Federstärke: 1 Strich à 0,02 mm = 12,5 g. — Temp. 22,2—24,0° C.

Zeit			Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
3./VI.	1892.	10 Mo.	. . . .	
3./VI.	»	6 Ab.	682 g	
4./VI.	»	8 Mo.	688 »	11,16 g
5./VI.	»	8 »	688 »	
6./VI.	»	8 »	781 »	
7./VI.	»	8 »	845 »	2,67 »
8./VI.	»	8 »	877 »	0,05 »
9./VI.	»	8 »	929 »	2,17 »
10./VI.	»	8 »	1018 »	3,71 »
Druck nun erhöht auf 1370 g				
11./VI.	1892.	8 Mo.	1370 g	5,5 »
12./VI.	»	8 »	1370 »	
13./VI.	»	8 »	1414 »	
14./VI.	»	8 »	1471 »	2,37 »
15./VI.	»	8 »	1498 »	1,12 »
16./VI.	»	8 »	1511 »	0,54 »

Versuch XX. *Vicia faba.*

In diesem Versuch wurde die aus dem Bodenloch des Topfes hervorsehende 27 mm lange Wurzel zwischen 2 planggeschliffene Platten aus porösem Thon gelenkt. Durch zwei angegossene Gipsleistchen war dafür gesorgt, dass diese Platten höchstens auf 1 mm

gegenseitig genähert werden konnten. Der so bleibende Spalt war bei verticaler Aufstellung der Platten nach oben und unten offen und diesen Spalt hatte die eingeklemmte Wurzel bei ihrem erdwärts gerichtetem Wachsen zu durchwandern. Zum Zwecke des Zusammenstellens wurde der 3 mm lange Spitzentheil der etwas angewelkten Wurzel in den erweiterten Spalt der Platten gebracht, welche mit Hilfe von Gips in der Schraubklemme (Fig. 4) fixirt waren. Dann wurde mittelst der Druckschraube allmählich die Compression und die Herstellung des gewünschten Druckes herbeigeführt.

Erst 4 Tage nach der Zusammenstellung, am 26. October, erschien am unteren Ende des Spaltes die normal aussehende Wurzelspitze, welche nun wie in Versuch XIX behandelt und in einen Topf mit Sägespänen gelenkt wurde. Bis zum Schlusse des Versuchs, d. h. in 5 Tagen, war dieser freie Wurzeltheil auf eine Länge von 85 mm herangewachsen und hatte Nebenwurzeln gebildet. Solche waren inzwischen auch am Hypocotyl, am freien basalen Wurzeltheil und auch zwischen den Thonplatten entstanden. Da letztere einen Abstand von 1,0—1,2 mm boten, die Nebenwurzeln aber dünner blieben, kam durch diese eine Druckentwicklung gegen die Platten nicht zu Stande.

Der gemessene Druck fällt also auf den zwischen den Platten steckenden Theil der Hauptwurzel. Da die parallel zu den Platten durch dieses Wurzelstück gelegte grösste Schnittebene 43 qmm maass, so ergibt sich aus dem Enddruck von 959,2 g eine Druckintensität von 2,16 Atm. = 22,3 g p. qmm.

Dieser Wurzeltheil hatte beim Durchwachsen einen etwas bogigen Weg eingeschlagen und war stark abgeflacht. Während er senkrecht zu den Platten nur 1,0 bis 1,2 mm dick war, hatte er parallel zu den Platten oben eine Breite von 3,2 mm, unten von 2,2 mm aufzuweisen.

Der im diffusen Licht entwickelte Spross hatte sich ca. 100 mm aus dem Boden erhoben.

Angewandt die Schraubklemme mit einer solchen Federstärke, dass 1 Strich = 29,5 g entsprach. — Temp. 18,5—20,4° C.

Zeit			Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
22./X.	1893.	10 Mo.	. . . .	
26./X.	»	9 »	885 g	9,32 g
27./X.	»	8 »	929,7 »	1,9 »
28./X.	»	8 »	938,6 »	0,37 »
30./X.	»	8 »	953,3 »	0,31 »
2./XI.	»	8 »	959,2 »	0,12 »

Versuch XXI. *Zea Mais.*

Die 30 mm lange Wurzel so eingegipst, dass der 11,2 mm lange Spitzentheil der Wurzel activ gegen den Gipsdeckel wirkte. Der Deckel wurde nur um 0,07 mm abgehoben. Dem entsprechend hatte sich der Wurzeltheil kaum nach dem Spalt ausgebaucht und maass in der Spaltebene 11 qmm im Medianschnitt. Seitenwurzeln hatten sich an dem kurzen freigebliebenen Basalstück der Wurzel gebildet. Die Blätter der Keimpflanze waren schliesslich bis 60 mm lang geworden.

Apparat: Schraubklemme. — Federstärke: 1 Strich à 0,0169 mm = 41,7 g. Temp. 18,0—19,0° C.

Enddruck = 749,3 g. — Druckintensität = 6,59 Atm. = 68,1 g p. qmm.

Zeit			Druck	Druckzunahme pro 1 Stunde
21./I.	1893.	10 Mo.	. . . .	
		9 Ab.	604,6 g	
22./I.	»	8 Mo.	604,6 »	
23./I.	»	8 »	604,6 »	
24./I.	»	8 »	708,9 »	10,14 g
25./I.	»	8 »	742,2 »	1,39 »
26./I.	»	8 »	749,3 »	0,3 »

C. Druckentwicklung der nicht eingegipsten Spitze.

Versuch XXII. *Vicia faba.*

Die Zusammenstellung ist in der p. 271 beschriebenen Weise so ausgeführt, dass bei A ein 7 mm, bei B ein 23 mm langer freier Spitzentheil der Wurzel gegen die nasse Gipsplatte wirkte.

Ein Strich des Mikrometers entspricht einer Druckzunahme von 1,5 g.

In Versuch A kam der Maximaldruck von 13,5 g in 3½ Stunden zuwege, die mittlere stündliche Zunahme betrug also 3,86 g. In B stellte sich dieser stündliche Mittelwerth auf 6,3 g, da es 1 Std. 40 Min. zu einer Druckentwicklung von 10,5 g bedurfte.

A.

Zeit	Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
13./X. 1892. 1 U. — Min. Ab.	0 g	3,86 g
2 » — » »	0,7 »	
3 » — » »	4,5 »	
3 » 30 » »	8,2 »	
4 » — » »	11,2 »	
4 » 30 » »	13,5 »	
5 » — » »	6 »	
6 » — » »	3 »	
8 » — » »	2,2 »	

B.

Zeit	Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
14./X. 1892. 8 U. 15 Min. Mo.	0,8 g	6,3 g
8 » 25 » »	2,3 »	
8 » 55 » »	4,5 »	
9 » 25 » »	8,3 »	
9 » 55 » »	10,5 »	
10 » 25 » »	9,0 »	
11 » — » »	7,5 »	
1 » — » Ab.	4,5 »	
3 » — » »	1,5 »	
8 » — » »	1,5 »	
15./X. » 8 » — » Mo.	1,5 »	

Abth. II. Vergleichende Versuche über die Wachsthumsschnelligkeit von Keimwurzeln in flüssigem und festem Thon, resp. in Gelatine. (Zu Kap. VI. A.)

Versuch XXIII—XXVII.

Zweck und Ausführung der Versuche ist p. 323 angegeben. In den Tabellen steht in der ersten Verticalreihe die Länge der Keimwurzeln zu Beginn des Versuchs, und zwar derart, dass die links stehende Zahl für die weichere, die rechts stehende für die härtere Masse gilt. Die beiden folgenden Verticalreihen geben die gemessenen Zuwachse in mm an, sowie die Summe des Zuwachses und die Mittelwerthe für je eine Wurzel in der näher bezeichneten Zeit. Danach folgt die in 24 Stunden geleistete Arbeit in Grammmillimeter. In der Signatur dieser Horizontalreihe ist der Widerstand des härteren Thons, resp. der härteren Gelatine in g angegeben. Der Widerstand des weicheren Mediums ist zu 1 g angenommen. In der letzten Horizontalreihe ist die Arbeit in dem weicheren Medium = 1 gesetzt worden.

Versuch XXIII. *Vicia faba.*

Medium: Thon.

Länge bei Beginn	Zuwachs nach 28 Std. in weichem Thon	Zuwachs nach 28 Std. in hartem Thon
26 und 25 mm	16,5 mm	12,0 mm
27 » 25 »	15,0 »	11,0 »
31 » 31 »	21,0 »	11,0 »
31 » 32 »	17,0 »	17,0 »
36 » 34 »	14,0 »	11,5 »
42 » 41 »	15,5 »	12,0 »
43 » 46 »	18 »	12,5 »
	117,0 mm	87,0 mm
Mittel für 1 Wurzel in 23 Std.	16,7 »	12,4 »
» » » » » 24 »	17,4 »	12,9 »
Von 1 Wurzel in 24 Std. geleistete Arbeit (Thonwiderstand 1 resp. 100 g)	17,4 gmm	1290 gmm
	1	: 74,2

Temp. 17,8—18,4° C.

Versuch XXIV. *Vicia faba.*

Medium: Thon.

Länge bei Beginn	Zuwachs nach 48 Std. in weichem Thon	Zuwachs nach 48 Std. in hartem Thon
30 und 31 mm	40 mm	30 mm
38 » 37 »	38 »	29 »
48 » 50 »	37 »	20 »
60 » 59 »	34,5 »	23 »
	149,5 mm	102 mm
Mittel für 1 Wurzel in 48 Std.	37,4 »	25,5 »
» » » » » 24 »	18,7 »	12,7 »
Arbeit einer Wurzel in 24 Std. (Thonwiderstand 1 u. 120 g)	18,7 gmm	1524 gmm
	1	: 81,5

Temp. 17,8—19,0° C.

Versuch XXV. *Vicia faba.*

Medium: Thon.

Dieser Versuch wurde wie Nr. 24 mit je 4 Wurzeln angestellt, deren Längen zwischen 35 und 43 mm lagen. Ich beschränke mich auf Angabe der Mittelwerthe für je eine Wurzel.

	Zuwachs in	
	weichem Thon	hartem Thon
Mittel für 1 Wurzel in 48 Std.	39,8 mm	29,0 mm
» » » » » 24 »	19,9 »	14,5 »
Arbeit einer Wurzel in 24 Std. (Thonwiderstand 1 u. 120 g)	19,9 gmm	1740 gmm
	1 :	87,4

Temp. 18,0—18,7° C.

Versuch XXVI. *Vicia faba.*

Medium: 0,6- und 13 proc. Gelatine.

Länge bei Beginn	Zuwachs nach 24 Std. in	
	weicher Gelatine	härterer Gelatine
28 und 26 mm	22 mm	18,5 mm
32 » 34 »	16 »	16 »
35 » 33 »	18,5 »	15,5 »
39 » 41 »	20,0 »	22 »
	76,5 »	72 mm
Mittel für 1 Wurzel in 24 Std.	19,1 »	18 »
Arbeit einer Wurzel in 24 Std. (Gelatinewiderstand 1 u. 25 g)	19,1 gmm	450 gmm
19,1 gmm = 1.	1 :	23,6

Temp. 18,1—19,2° C.

Versuch XXVII. *Zea Mais.*

Medium: Thon.

Länge bei Beginn	Zuwachs nach 24 Std. in weichem Thon	Zuwachs nach 24 Std. in hartem Thon
31 und 33 mm	25 mm	16 mm
36 » 34 »	20 »	18 »
35 » 37 »	18 »	13 »
42 » 40 »	21 »	17 »
	84 mm	64 mm
Mittel für 1 Wurzel in 24 Std.	21 »	16 »
Arbeit einer Wurzel in 24 Std. (Thonwiderstand 1 u. 70 g)	21 gmm	1120 gmm
	1	: 53,3

Temp. 19,4—20,6° C.

Abth. III. Wachsthumsbeschleunigung in der Wurzelspitze nach Einschmelzen in Gelatine. (Zu Kap. VI, B.)

Versuch XXVIII—XXXIII.

Die Versuche wurden in der p. 342 angegebenen Weise mit Keimwurzeln von Vicia faba ausgeführt. In Vers. 28, 29, 30, 31 und 32 wurden die Wurzeln in die 13proc. Gelatine eingeschmolzen, in Vers. 33 aber in die schon erstarrte Gelatine eingestossen. Gemessen wurde mit dem Horizontalmikroskop, und zwar entsprach ein Theilstrich in den Versuchen 28, 29, 30, 31 und 32 0,045 mm, im Versuch 33 = 0,043 mm.

Die Tabellen sind schon p. 342 erläutert. Angegeben sind die jeweils gemessenen Theilstriche. Nur in der ersten Horizontalreihe,

d. h. in den auf den Spitzentheil bezüglichen Messungen, ist die entsprechende Länge in mm in den Vers. 28—32 hinzugefügt. Unter den Tabellen ist ausserdem der gemessene resp. berechnete Gesammtzuwachs des Spitzentheils innerhalb 24 Stunden angegeben und ausserdem der Zuwachs, welchen die übrige gemessene Strecke in der Versuchszeit ergab.

In Vers. 33 ist in der letzten Verticalreihe der Zuwachs der einzelnen Zonen verzeichnet.

Versuch XXVIII. *Vicia faba.*

In Gelatine gebracht 23. Jan. 1893 Morgens 8½ Uhr. Von der 38 mm langen Keimwurzel befinden sich 28 mm in der Gelatine. — Temp. 17,8—18,6° C.

Lage der Zone	23./I. 9 Mo.	10 Mo.	1 Na.	7 Na.	24./I. 8 Mo.
0,0 — 0,67 mm	0,67 mm 15 Str.	0,67 mm 15 Str.	0,67 mm 15 Str.	3,64 mm 81 Str.	11,2 mm 250 Str.
0,67— 4,99 »	97 »	96 »	94 »	96 »	98 »
4,99— 9,44 »	99 »	98 »	99 »	100 »	101 »
9,44—13,35 »	88 »	87 »	88 »	89 »	90 »

Die Spitzenzone verlängerte sich von 1 Na. bis 8 Mo., also in 19 Stunden um 10,53 mm.

Der Zuwachs in 24 Stunden stellt sich also auf 13,3 mm.

Die folgenden Zonen von 0,67 mm bis 13,35 mm nehmen während 23 Stunden zusammen um 0,225 mm an Länge zu.

Versuch XXIX. *Vicia faba.*

Eingeschmolzen in Gelatine 24. Jan. 1893 Morgens 8 Uhr. Von der 50 mm langen Keimwurzel befanden sich 36 mm in der Gelatine. Temp. 17,3—18,7° C.

Lage der Zone	24./I. 8½ Mo.	9 Mo.	10 Mo.	11 Mo.	12 Mo.	2 Na.	4 Na.	7 Na.	25./I. 8 Mo.
0 — 1,03 mm	1,03 mm	1,03 mm	1,03 mm	1,03 mm	1,75 mm	2,65 mm	3,69 mm	4,59 mm	11,02 mm
	Str. 23	Str. 23	Str. 23	Str. 23	Str. 36	Str. 59	Str. 82	Str. 112	Str. 245
1,03— 5,03 »	89	91	92	91	91	94	93	94	103
5,03— 9,35 »	96	96	93	94	95	95	96	97	102
9,35—13,35 »	89	90	92	93	95	95	96	96	101

Die apicale Zone verlängerte sich von 11 Mo. bis 8 Mo., also in 21 Std. um 9,99 mm, also in 24 Std. um 11,4 mm.

Die Zonen von 1,03 bis 13,35 mm nahmen in 23 Std. zusammen um 1,44 mm an Länge zu.

Versuch XXX. *Vicia faba.*

Eingeschmolzen in Gelatine am 25./I. 1893 um 8½ Mo. Die Keimwurzel ist 55 mm lang und hiervon befinden sich 37 mm in Gelatine. Temp. 17,9—19,0° C.

Lage der Zone	25./I. 9 Mo.	10 Mo.	11 Mo.	12 Mo.	1 Na.	2½ Na.	4 Na.	7 Na.	26./I. 9 Mo.
0 — 0,49 mm	0,49 mm	0,49 mm	0,49 mm	0,49 mm	0,49 mm	0,81 mm	1,30 mm	2,65 mm	10,17 mm
	Str. 11	Str. 11	Str. 11	Str. 11	Str. 11	Str. 18	Str. 29	Str. 59	Str. 226
0,49— 1,39 »	21	21	21	21	21	21	22	23	23
1,39— 4,22 »	63	65	66	68	68	66	64	62	62
4,22— 8,40 »	93	93	101	104	107	108	109	109	111
8,40—12,81 »	98	98	98	98	98	98	98	98	98

Zuwachs der apicalen Zone von 1 Na. bis 9 Mo., also in 20 Std. = 9,68 mm. Daraus berechnet sich für 24 Std. ein Zuwachs von 11,6 mm.

Der Gesammtzuwachs der übrigen Zonen beträgt in 24 Std. = 0,85 mm.

Versuch XXXI. *Vicia faba.*

Von der 37 mm langen Keimwurzel befinden sich 30 mm in Gelatine. Das Einschmelzen geschah am 27. Jan. 1893 7½ Mo. Temp. 17,6—18,8° C.

Lage der Zone	27./I. 8 U. 10 M. Mo.	9 Mo.	10 Mo.	11 Mo.	12 Mo.	1 Na.	2 Na.	5 Na.	8 Na.	28./I. 8 Mo.	9 Mo.
0 — 0,58 mm	0,58 mm	0,58 mm	0,58 mm	0,63 mm	1,43 mm	2,38 mm	3,28 mm	5,17 mm	7,54 mm	17,1 mm	17,9 mm
	Str. 13	Str. 13	Str. 13	Str. 14	Str. 32	Str. 53	Str. 73	Str. 115	Str. 167	Str. 380	Str. 399
0,58— 1,21 »	14	14	15	16	16	15	15	15	15	15	15
1,21— 5,17 »	88	88	91	92	88	87	86	84	84	86	86
5,17— 9,76 »	102	104	109	109	110	112	112	112	113	115	115
9,76—14,62 »	108	107	108	108	107	108	108	108	108	108	108

Die apicale Zone nimmt in 22 Std. (11 Mo.—9 Mo.) um 17,27 mm zu, also in 24 Std. um 18,8 mm.

Der Gesammtzuwachs der übrigen Zonen stellt sich während der Versuchsdauer auf 0,54 mm.

Versuch XXXII. *Vicia faba.*

Die älteren Theile der Wurzelhaube wurden an dieser Wurzel abgeschabt (vgl. p. 346 Anmerkg. 2). Darauf wurde am 29. Jan. 1893 um 7½ Mo. die 50 mm lange Wurzel so eingeschmolzen, dass sich 38 mm in Gelatine befanden. — Temp. 18,0—19,2° C.

A.

Lage der Zone	29./I. 8½ Mo.	9½ Mo.	10½ Mo.	11½ Mo.	12½ Na.	2½ Na.	5½ Na.	30./I. 8½ Mo.	9½ Mo.
0, — 0,45 mm	0,45 mm	0,45 mm	0,58 mm	0,99 mm	1,62 mm	3,01 mm	4,77 mm	15,75 mm	16,42 mm
	Str. 10	Str. 10	Str. 13	Str. 22	Str. 36	Str. 67	Str. 106	Str. 350	Str. 365
0,45— 1,12 »	16	16	16	16	16	15	15	15	15
1,12— 1,75 »	14	14	14	14	14	14	14	14	14
1,75— 4,36 »	58	60	60	59	59	59	59	58	59
4,36— 8,05 »	82	85	80	75	75	78	79	81	81
8,05—12,69 »	103	104	105	107	109	112	115	116	116

Die apicale Zone ist in 23 Std. (10½—9½ Mo.) um 15,84 mm gewachsen. Hieraus ergibt sich für 24 Std. ein Zuwachs von 16,5 mm.

B.

Vor dem Eingipsen war in der apicalen Zone eine grössere Zahl dicht aneinander stehender Marken angebracht worden. Nachdem der Spitzentheil sich bis 2½ Na. auf 3,01 mm verlängert hatte, befanden sich die nun gemessenen Marken innerhalb dieses Spitzentheils in den in der ersten Verticalreihe in mm angegebenen Positionen. Der entsprechende Abstand in Theilstrichen ist in der zweiten Verticalreihe verzeichnet. In der dritten Verticalreihe ist dann der Abstand derselben Marken nach 2½ Std. (5½ Na.) angeführt.

Lage der Zone	2½ Na.	5½ Na.
0 —0,54 mm	12 Str.	12 Str.
0,54—0,76 »	5 »	5 »
0,76—1,08 »	7 »	7 »
1,08—1,39 »	7 »	7 »
1,39—3,01 »	36 »	75 »
Summa	67 Str.	106 Str.

Versuch XXXIII.

Die 40 mm lange Keimwurzel wird am 27. Jan. 1893 in die schon erstarrte Gelatine so eingestossen, dass sich in dieser 31 mm befinden. — Temp. 17,7—18,5° C.

Lage der Zone	27. I. 8½ Mo.	9 Mo.	10 Mo.	12 Mo.	2 Na.	5 Na.	8 Na.	28. I. 8½ Mo.	Zuwachs in 24 Std.
	Str.	Str.	Str.	Str.	Str.	Str.	Str.	Str.	mm
0 — 1,46 mm	34	33	33	33	33	34	34	43	0,39
1,46— 5,16 »	86	90	92	100	117	137	173	395	13.29
5,16— 9,42 »	99	100	106	123	140	153	159	159	2,58
9,42—13.42 »	93	94	94	95	97	97	97	99	0,26

Gesammtzuwachs in 24 Std. = 16,52 mm.

Abth. IV. Wachsthum nach längerem Eingipsen.

(Zu Kap. VI, C.)

Versuch XXXIV. *Vicia faba.*

Zuwachs nach einstündigem und nach 48stündigem Eingipsen. Die unter A. verzeichneten Zuwachse beziehen sich auf 5 Wurzeln die nach einstündigem Eingipsen, die unter B. bezeichneten auf 5 gleichartige Wurzeln die nach 48stündigem Eingipsen in Sägespänen cultivirt wurden. Die erste Messung und das Einsetzen in feuchte Sägespäne geschah in beiden Fällen, nachdem die befreiten Wurzeln ½ Stunde im Wasser zugebracht hatten. Die Culturbedingungen waren in beiden Fällen dieselben. Die Wurzellänge betrug zu Beginn 32 bis 38 mm. Temp. 18,8—20,2° C. — Vgl. p. 352.

A. Vorübergehend eingegipste Wurzeln.

	Zuwachs in den ersten 24 Sunden	Zuwachs in den folgenden 24 Stunden
	26 mm	26 mm
	27,5 »	21,5 »
	24 »	20 »
	21 »	23 »
	21 »	21 »
Mittel für 1 Wurzel:	23,9 mm	22,3 mm

B. Nach 48stündigem Eingipsen.

	Zuwachs in den ersten 24 Stunden	Zuwachs in den folgenden 24 Stunden
	10 mm	19 mm
	11 »	22 »
	14 »	26 »
	8 »	23 »
	13 »	26 »
Mittel für 1 Wurzel:	11,2 mm	23,2 mm

Abth. V. Druckversuche mit Keimstengeln.

Versuch XXXV—XXXVII.

Die Ausführung der Versuche geschah, unter entsprechender Anpassung (vgl. p. 249), nach der in Abth. I (p. 440) angegebenen Weise. Ebenso ist aus dem p. 375 und 440 Gesagten das Nöthige über die tabellarische Zusammenstellung zu ersehen. Das Gewicht des Gipsdeckels, welches hier zu dem gemessenen Federdruck hinzu addirt werden müsste, wurde vernachlässigt. Die Pflanzen waren sämmtlich im Dunklen erzogen und standen während der Versuche in sehr stark gedämpftem Licht, so dass in das Innere der Gipshülle nur sehr wenig Licht eindringen konnte.

Versuch XXXV. *Vicia faba.* Längsdruck des Epicotyles.

Das Epicotyl ragt 43 mm aus dem Boden, und zwar befinden sich 9 mm (von dem Scheitel der Krümmung ab gerechnet) in dem Gipsdeckel. — Federstärke: 1 Strich à 0,0182 mm = 22,8 g — Gipsspalt bei Schluss des Versuchs 0,25 mm. Der Stengel ist in dieser Zone kaum angeschwollen. — Durchmesser der activen Zone = 5 mm; Querschnitt = 19,6 qmm. — Enddruck 1190 g. — Druckintensität 5,88 Atm. = 60,7 g p. qmm. Temp. 19,3—20,8° C.

Zeit	Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
30./X. 1892. 9 Mo.	. . . .	11,86 g
31./X. » 8 »	520 g	
1 Na.	554 »	
Druck gesteigert auf	1070,5 g	
1./XI. 1892. 7 Mo.	1070,5 g	
2./XI. » 8 »	1070,5 »	
3./XI. » 8 »	1127 »	1,67 »
4./XI. » 7 »	1167 »	0,71 »
5./XI. » 8 »	1184 «	0,25 »
6./XI. » 8 »	1190 «	

Versuch XXXVI. *Helianthus annuus.* Längsdruck des Hypocotyls.

Das Epycotyl ragt aus dem Boden 47 mm; davon befinden sich in dem Gipsdeckel 3 mm. — Federstärke: 1 Strich à 0,0182 mm = 22,8 g. — Gipsspalt am Schluss 0,18 mm. Stengel in dieser Zone so gut wie nicht geschwollen. — Durchmesser des activen Querschnitts = 2,6 mm; Fläche = 5,2 qmm. — Enddruck = 400 g. — Druckintensität 7,45 Atm. = 76,9 g p. qmm. Temp. 17,9—20,1° C.

Zeit	Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
29./XI. 1892. 12 Mo.	. . . .	8,07 g
30./XI. » 8 »	342 g	
Druck gesteigert auf	351 »	
1./XI. » 8 Mo.	355 »	
2./XI. » 8 »	388 »	1,37 »
3./XI. » 8 »	400 »	0,5 »

Versuch XXXVII. *Vicia faba.* Querdruck des Epicotyls von *Vicia faba.*

Das Epicotyl ragt 54 mm aus dem Boden. Activ gegen den Gipsdeckel wirkt eine Zone, welche 5,5 mm von dem Scheitel des Bogens beginnt und 7,5 mm lang ist. Der Deckel wurde etwa

0,18 mm abgehoben und der Stengel war kaum nach dem Spalt hin ausgewachsen. Flächeninhalt des Medianschnitts im activen Theil 37,5 qmm.

Apparat: Klemmschraube. — Federstärke: 1 Strich à 0,0182 mm = 31,2 g. — Enddruck 2154 g. — Druckintensität 5,56 Atm. = 57,5 g p. qmm. — Temp. 17,9—20,4° C.

Zeit	Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
1./II. 1893. 10 Mo.	. . . .	
2./II. » 8 »	2396 g	
3./II. » 8 »	2396 »	22,57 g
4./II. » 8 »	2396 »	
Druck erniedrigt auf	2010 »	
5./II. » 8 Mo.	2122 »	
6./II. » 8 »	2138 »	0,67 »
7./II. » 8 »	2154 »	0,67 »

Abth. VI. Druckmessungen mit Grasknoten.

Versuch XXXVIII—XLII.

Die Versuche sind in der p. 389 angegebenen Weise angestellt. Ob zur Messung das Hebeldynamometer oder die Druckfeder diente, ist bei den einzelnen Versuchen gesagt. Die Genauigkeit war in beiden Fällen dieselbe, denn durch das erwähnte mikroskopische Ablesen am Hebeldynamometer wurde auch erreicht, dass der Ablesungsfehler den Werth von 1 g nicht erreichte.

Das Gewicht des freien Halmtheiles, einschliesslich des umgipsten Glasröhrchens (c. in Fig. 10 p. 389), betrug 2 bis 3 g und erreichte nur in dem Versuche mit Mais (Versuch 42) einen höheren Werth, nämlich 12 g. Dieses Gewicht, resp. das entsprechende statische Moment, wirkt ebenfalls dem Knoten entgegen, muss also zu den Angaben des Messapparates hinzuaddirt werden. Es ist zu diesem Zwecke dieses statische Moment für die am Messapparat angreifende Hebellänge berechnet und die in den Tabellen verzeichneten Druck-

leistungen in g sind schon in der Weise vergrössert worden, dass sie durch Multiplication mit der angegebenen Hebellänge, dem Abstand der Drahtschleife *d* von der Mitte des Knotens, das volle statische Moment für die Hebellänge 1 ergeben.

Zu Beginn des Versuches wurde ein gewisser Gegendruck hergestellt, wodurch der freie Halmtheil etwas abwärts gebogen wurde. In Folge der geotropischen Reaction wurde nach Ausgleichung dieser Beugung die entgegengesetzte Krümmung im Knoten erzielt, die indess bis zum Schluss der Versuche nicht mehr als 5 bis 8° betrug.

Die Tabellen sind für sich verständlich. Hinsichtlich der Verwerthung der Zahlen vgl. p. 349.

Einige hier nicht mitgetheilte Versuche ergaben ganz gleiche Resultate.

Versuch XXXVIII. *Triticum spelta.*

Der Knoten ist 4 mm lang und hat in der Mitte einen Durchmesser von 4,2 mm. Die, wie überall, mit Hilfe der Papiermethode bestimmte Fläche des Querschnitts im Blatttheile des Knotens beträgt 11,5 qmm.

Der gemessene Enddruck von 71,6 g wirkt an einem Hebelarm von 48 mm Länge. Statisches Moment also = 3437 g. Ueber die aus diesen Daten berechneten Grössen vgl. die Tabelle VII, p. 395. Apparat: Hebeldynamometer. — Temp. 19,5—21,8° C.

Zeit	Druck	Druckzunahme p. 1 Stunde
13./VII. 1892. 3 Na.	. . . .	
7 »	19,5 g	
		1,93 g
14./VII. » 6 Mo.	40,7 »	
		0,63 »
15./VII. » 6 »	56,0 »	
		0,32 »
16./VII. » 6 »	63,6 »	
		0,25 »
17./VII. » 6 »	69,7 »	
		0,03 »
18./VII. » 6 »	70,5 »	
		0,03 »
19./VII. » 6 »	71,2 »	
		0,02 »
20./VII. » 6 »	71,6 »	

Versuch XXXIX. *Triticum spelta.*

Länge des Knotens 4,2 mm. Durchmesser in der Mitte = 4,4 mm. Flächengrösse des Blattknotens an dieser Stelle = 12 qmm.

Hebellänge 47 mm. Also statisches Moment bei Schluss des Versuchs 91,2 . 47 = 4286 g.

Apparat: Hebeldynamometer.

Temp. 20,2—22,0° C.

Zeit			Druck	Druckzunahme in 1 Std.
9./VII.	1892.	8 Mo.	12,4 g	2,88 g
		7 Na.	44,1 »	1,47 »
10./VII.	»	6 Mo.	60,3 »	0,83 »
11./VII.	»	6 »	80,3 »	0,39 »
12./VII.	»	6 »	89,6 »	0,07 »
13./VII.	»	6 »	91,2 »	

Versuch XL. *Triticum vulgare.*

Länge des Knotens 3,5 mm. Durchmesser in der Mitte 3,6 mm. Querschnittsfläche der Knotenmitte 8,2 qmm.

Hebellänge 46 mm. Also statisches Moment = 49,8 . 46 = 2291 g.

Apparat: Druckfeder.

Temp. 20,5—22,0° C.

Zeit			Druck	Druckzunahme in 1 Std.
10./VII.	1892.	9 Mo.	18,8 g	
		7 Na.	19,1 »	0,67 g
11./VII.	»	6 Mo.	26,5 »	0,44 »
12./VII.	»	6 »	37,1 »	0,34 »
13./VII.	»	6 »	45,2 »	0,19 »
14./VII.	»	6 »	49,8 »	

Versuch XLI. *Hordeum vulgare.*

Länge des Knotens 5 mm. Durchmesser 5 mm. Querschnittsfläche der Knotenmitte = 13,4 qmm.

Hebellänge 41 mm. Statisches Moment am Schluss = 122,1 . 41 = 5006 g.

Apparat: Hebeldynamometer.

Temp. 19,0—20,1° C.

Zeit		Druck	Druckzunahme in 1 Std.
3./VII. 1892.	10 Mo.	. . . .	
	10 Na.	79,3 g	
			1,57 g
4./VII. »	6 Mo.	91,9 »	
			0,84 »
5./VII. »	6 »	112,0 »	
			0,26 »
6./VII. »	6 »	118,2 »	
			0,16 »
7./VII. »	6 »	122,1 »	

Versuch XLII. *Zea Mais* (Cinquantino-Mais).

Durchmesser des Knotens 9,4 mm; Dicke der Halmscheide 1 mm. Querschnittsfläche des ganzen Knotens (Blatttheil + Stengeltheil) = 69,4 qmm.

Hebellänge 55 mm. Statisches Moment am Schluss 402.55 = 22110 g. — Apparat Hebeldynamometer. — Temp. 20,5—21,8° C.

Zeit		Druck	Druckzunahme in 1 Stunde
25./VII. 1892.	3 Na.	. . . .	
			12,0 g
26./VII. »	6 Mo.	180 g	
			4,83 »
27./VII. »	6 »	296 »	
			3,58 »
28./VII. »	6 »	382 »	
			0,83 »
29./VII. »	12 »	402 »	

ZUR

HISTOLOGIE DER FALTENZÄHNE

PALÄOZOISCHER STEGOCEPHALEN

VON

HERMANN CREDNER,

ORD. MITGLIED DER K. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MIT VIER TAFELN UND FÜNF TEXTFIGUREN.

Einleitung.

Einer Kalksteinbank des Rothliegenden im Plauenschen Grunde bei Dresden werden seit nun 13 Jahren die fossilen Reste zahlreicher, aber meist kleiner, amphibien- und reptilienartiger Geschöpfe entnommen. Dieselben haben sich im Laufe dieser Zeit zu einer der formenreichsten Faunen von Urvierfüsslern verkörpert, die bisher bekannt geworden und beschrieben worden sind[1]).

Ausser seltenen rhynchocephalenartigen Sauriern (Palaeohatteria und Kadaliosaurus) wurden von den nur wenig mächtigen Kalkniederschlägen einer dortigen, verhältnissmässig kleinen Wasserlache der älteren Permperiode die Skelete vieler Hunderte von Individuen verschiedenartiger Stegocephalen umhüllt und conservirt, von kleinsten salamanderähnlichen Branchiosauren mit ihren nur wenige Centimeter langen Larven, an denen selbst noch Reste der Kiemenbogen erhalten sind, bis zu dem riesenhaften Sclerocephalus mit fast zolllangen Zähnen, in denen jedes Dentinröhrchen und die feinste Globularstructur der Dentingrundmasse überliefert ist.

Trotzdem nun diese Fauna aus einer so frühen Periode der

---

1) H. Credner, Die Stegocephalen und Saurier aus dem Rothliegenden des Plauenschen Grundes bei Dresden. Zeitschr. d. Deut. geolog. Gesellschaft. I. Theil: 1881 S. 298. — II. Theil: 1881 S. 574. — III. Theil: 1882 S. 213. — IV. Theil: 1883 S. 275. — V. Theil: 1885 S. 694. — VI. Theil: 1886 S. 576. — VII. Theil: 1888 S. 488. — VIII. Theil: 1889 S. 319. — IX. Theil: 1890 S. 240. — X. Theil: 1893 (in Drucklegung). Ferner: H. Credner, Die Urvierfüssler (Eotetrapoda) des Sächsischen Rothliegenden. Berlin 1891; sowie H. Credner, Stegocephalen des Rothliegenden. Zwei Wandtafeln nebst Erläuterungen. Leipzig 1888. — H. B. Geinitz u. J. V. Deichmüller, Nachträge zur Dyas II u. III. Kassel 1882 u. 84.

irdischen Entwicklungsgeschichte stammt, dass nur wenig vor ihr die ersten Anfänge der Erzeugung eines Knochenskeletes aus knorpeliger Anlage zu suchen sein dürften, so besitzen doch die Stegocephalen des Plauenschen Grundes bereits eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit. In ihrer äusseren Gestaltung, in dem Grade der Ossification des Knorpelskeletes, im Wirbelbau, in der Berippung, im Aufbau des Schultergürtels, in der Schuppenbedeckung und in der Bezahnung giebt sich eine so hochgradige Differenzirung und zugleich eine so verschieden stark nach dem Reptilienskelet gerichtete Divergenz kund, dass die Ahnen unserer permischen Stegocephalen in noch weiter zurückliegenden Zeiträumen zu erwarten sein müssen.

Verhältnissmässig am geringsten ist die Verschiedenartigkeit, die sich in der Bezahnung geltend macht.

Die Zähne der Stegocephalen des sächsischen Rothliegenden sind ausnahmslos einspitzig, schlank kegelförmig, vollkommen gerade oder schwach gebogen, zuweilen an der Spitze stumpf zweischneidig und stets mit einem grossen Pulpkegel ausgestattet. Sie sind entweder durch Vermittlung von Cement auf gerader oder schräg medianwärts geneigter Basis mit den zahntragenden Dermalknochen verwachsen, oder gehen an ihrem Sockelrande direct in deren, dem Ganoin homologe Deckschicht über, so dass sie nur kegelförmige Ausstülpungen derselben bilden.

Nach ihrem Bau und ihrer inneren Structur gehören diese Zähne zwei Typen an, indem die einen nur aus einem glatten Dentinhohlkegel bestehen, während die anderen einen einfachen radiärfaltigen Aufbau besitzen, der sich nie zu der mäandrischen Labyrinthodontenstructur z. B. der triadischen Stegocephalen steigert. Das Auftreten von Schmelzkäppchen ist bisher nur in wenigen Fällen mit Sicherheit erwiesen, ohne deshalb bei den Zähnen der übrigen Gattungen ausgeschlossen oder selbst unwahrscheinlich zu sein.

Wie bei den verwandten Urodelen, so ist die Zahl der zahntragenden Knochen auch bei den Stegocephalen oft eine grosse, doch geben sich bei deren einzelnen Geschlechtern in dem Maasse der Bezahnung der Mundhöhle grosse Verschiedenheiten kund. Während auf der Gaumenfläche von Branchiosaurus, trotz deren sehr günstiger Erhaltung an zahlreichen Exemplaren, nie Zähnchen be-

obachtet werden konnten, ihre Bezahnung sich vielmehr auf die Kiefer beschränkt, tragen bei Pelosaurus ausser letzteren die Pterygoidea und das Parasphenoid, bei Acanthostoma ausserdem noch die Vomero-Palatina Zahnhecheln, bis endlich bei Melanerpeton und Discosaurus die ganze Gaumenfläche von einer dichten Hechelbezahnung starrt. Bei allen aber tragen die Kiefer nur eine einzige Reihe von Zähnen.

Gleichzeitig macht sich bei den aufgezählten Geschlechtern die Regel geltend, dass, falls überhaupt Faltenzähne auftreten (wie bei Pelosaurus, Acanthostoma, Melanerpeton, Discosaurus), diese auf die Kieferreihe beschränkt sind, während sämmtliche Zähnchen der Gaumenknochen aus einfachen spitzen Kegeln von minimalen Dimensionen bestehen. Hiervon machen nur Archegosaurus[1]) und Sclerocephalus eine Ausnahme, bei denen auch 1—2 grosse Faltenzähne auf dem Vomer und eine Reihe solcher auf dem Palatinum auftreten und an Grösse die Kieferzähne erreichen, z. Th. sogar noch übertreffen können.

Unter allen Stegocephalen des sächsischen Rothliegenden ragt Sclerocephalus labyrinthicus Gein. sp. nicht allein durch seine gewaltige Grösse hervor, sondern zeichnet sich zugleich auch durch die intensive Verknöcherung seines Gesammtskeletes aus. Beide Eigenschaften gelangen namentlich beim Vergleiche mit Branchiosaurus, dem häufigsten Vertreter der dortigen Urvierfüssler zur Geltung. Erreicht dieser Lurch nur eine Maximallänge von 13 cm, so muss diejenige von Sclerocephalus auf mindestens 1,50 m geschätzt werden, — Dimensionen, die ihn zum Riesen unter seinen Aufenthaltsgenossen stempeln.

Mit der Grösse von Sclerocephalus steht die Solidität seines Gesammtskeletes in Einklang und zwar fällt sowohl die Dickknochigkeit und Ausdehnung seines Hautskeletes, wie die intensive Verknöcherung seines inneren Skeletes auf.

Was die letztere anbetrifft, so ist sie bis zur vollständigen Ossification des Knorpelgerüstes gediehen, so dass sich das Glied-

1) H. BURMEISTER, Die Labyrinthodonten aus d. Saarbrück. Steinkohlengebirge. Berlin 1850. S. 24. Taf. IV, Fig. 1; F. A. QUENSTEDT, Neues Jahrb. f. Min. 1861. S. 298. Taf. III, 5; H. v. MEYER, Reptilien aus d. Steinkohlenformation. Cassel 1858. S. 21.

maassenskelet aus lauter soliden Knochen mit knöchernen Gelenkenden, die Hand- und Fusswurzel aus knöchernen Carpalien und Tarsalien aufbaut, — alles dies im schroffsten Gegensatze zu sämmtlichen übrigen Stegocephalen des dortigen Rothliegenden, deren Extremitäten durch z. Th. nur hautartig dünne Knochenröhren mit knorpeligen Gelenkenden gestützt werden und bei fast allen denen Hand- und Fusswurzel vollkommen knorpelig verblieben sind, während letztere nur bei einigen, schon lebhafte Anklänge an das Reptilienskelet verrathenden Geschlechtern eine schwache, und ausschliesslich bei dem unserem Sclerocephalus nahe verwandten Archegosaurus eine intensivere Verknöcherung erfahren haben.

Ebenso setzt sich die rhachitome Wirbelsäule von Sclerocephalus, trotz dieses ihres primitiven Baues aus einem massigen oberen Bogen mit knöchernen Dorn-, Gelenk- und Querfortsätzen, sowie aus eben solchen Inter- und Pleurocentren zusammen und trägt solide Rippen. Auch die beiden Coracoidea und Ischia sind zu kräftigen Knochenplatten ossificirt.

Fast mehr noch als das enchondrale gelangt bei Sclerocephalus das Hautskelet zur Geltung. In hohem Maasse ist dies zunächst beim Schädel der Fall, der bis auf das die Articulation des Unterkiefers vermittelnde Quadratum und Articulare ausschliesslich von dicken, sculpturirten oder bezahnten Hautknochenplatten bedeckt ist und zwar in der Ausdehnung, welche den Schuppenlurchen die Benennung »Dachschädel« (Stegocephala) eintrug. Von knöchernen Hinterhauptsbeinen, durch deren doppelten Gelenkhöcker bei den Urodelen und mesozoischen Labyrinthodonten die Articulation mit der Wirbelsäule bewirkt wird, fehlt jede fossile Ueberlieferung, so dass diese Verbindungsstelle bei Sclerocephalus keine beträchtliche Ossification erlitten haben kann.

Auch die Elemente seines Schultergürtels bis auf die Coracoidea erweisen sich noch als Theile des Hautskeletes. Jedenfalls waren das Episternum und die Claviculae noch nicht in das innere Skelet aufgenommen, bildeten vielmehr gewaltige Panzerplatten vom histologischen Bau der Ganoidschuppen. Auf die abgeschrägten Ränder des Episternums legen sich dicke Knochenschuppen, deren divergirende Strähnen die gesammte Bauchfläche und die Unterseite der Extremitäten panzerartig bedecken.

Die Bezahnung dieses permischen Riesenlurches, des Sclerocephalus, ist es, welche in Folgendem einer speciellen Beschreibung unterworfen werden soll.

Herrn Dr. F. Etzold, Custos der Sammlungen der k. S. geologischen Landesuntersuchung, schulde ich für seine verständnissvolle Beihülfe bei der durch 4—5 Jahre fortgesetzten Aufsammlung, Sichtung und Präparirung des jetzt zur Bearbeitung gelangten Materiales, sowie für die von ihm auf Grund meiner Handzeichnungen nach der Natur ausgeführten graphischen Darstellungen auf den beigegebenen Tafeln dankende Anerkennung.

I. Ueber die zahntragenden Knochen und die Bezahnung von Sclerocephalus.

1. Histologie der Knochen der Mundhöhle und Homologie derselben mit den Ganoidschuppen.

In der Mundhöhle von Sclerocephalus sind die Zwischen-, Ober- und Unterkiefer, die Vomera, die nach vorn gewandten Flügel der Pterygoidea und die Palatina mit Zähnen besetzt. Vom Parasphenoid ist nichts überliefert, so dass seine etwaige Bezahnung nicht zu constatiren, aber auch nach Analogie mit nächst verwandten grossen Stegocephalen (z. B. Archegosaurus) überhaupt nicht wahrscheinlich ist.

Freilich sind auch alle erstgenannten Knochen ebenso wie diejenigen der Schädeldecke an den vorliegenden Exemplaren ihrer Masse nach fast überall der Vernichtung durch die Sickerwässer verfallen. Von ihnen ist meist nichts geblieben als der Abguss ihrer tief sculpturirten Aussenfläche und der Abdruck ihrer glatten Innenseite, jedoch beide von so ausserordentlicher Schärfe, dass aus diesen Negativen die ursprüngliche äussere Erscheinungsweise dieser Knochenplatten bis in's Kleinste reconstruirt werden kann. Doch auch für die Erhaltung der inneren Structur des verschwundenen Knochen-

gewebes ward bis zu einem gewissen Grade gesorgt, indem vor dessen Vernichtung das gesammte die Knochenmasse durchziehende System von Gefässcanälen mit deren zartesten Verzweigungen und feinsten Ausläufern mit Kalkspath ausgefüllt worden ist, — ein Ausguss, welcher der Auslaugung widerstand und entging und deshalb als natürliches, jetzt vollkommen freigelegtes Injectionspräparat des Canalsystems erhalten geblieben ist. Dasselbe liefert ein so klares körperliches Bild des letzteren, wie es durch keinerlei Längs- und Querschliffe erzielbar sein würde.

Diese zierlichen Steinkerne ergeben sich als Ausdruck einer für fast sämmtliche Knochen des Schädels, also auch der Gaumenfläche sowie des Unterkiefers höchst charakteristischen Structur, durch welche sich dieselben als den Ganoidschuppen nahestehende Hautknochen kennzeichnen. Ihr eigenthümliches Gepräge erhalten diese Ossificationen im Gegensatze zu den enchondralen Knochen des Rumpfskeletes, sowie dem das Unterkiefergelenk bildenden Quadratum und Articulare, in erster Linie durch ein dichtes und derbes System von Blutgefässcanälen, sogenannten Haversischen Canälen[1]), welches sich in horizontaler Richtung, nämlich in der Fläche der grössten Ausdehnung des Knochens ausbreitet. In dieser liegen sämmtliche Gefässcanäle so dicht neben einander und nehmen einen so überwiegenden Theil des Knochens ein, dass man auf den ersten Blick versucht sein könnte, ihre spathige Ausfüllungsmasse für die Knochenstrahlen zu halten.

Die wie derbe, glatte, cylindrische Fäden erscheinenden Steinkerne der Gefässcanäle bilden in der Nachbarschaft der Ossificationsstelle ein ästig-maschiges, wirres Geflecht, nehmen dann nach aussen zu eine radiäre Anordnung an und stellen sich strahlig. Die einzelnen Hauptstämme sind nahe dem Ossificationspunkte etwa stecknadeldick, dichotomiren nach aussen zu in seitliche dünnere Aeste, welche in unregelmässigen Abständen durch feinere Querröhrchen verbunden sind, so dass ein horizontales maschiges Netzwerk entsteht, dessen radiärer Bauplan jedoch in Folge der grösseren Stärke der Längsstrahlen deutlichst zum Ausdrucke gelangt.

Zwischen diesen sich nach aussen verästelnden Stämmen des

1) Vergl. H. KLAATSCH, Morphol. Jahrb. XVI. 1890. S. 139.

Horizontalsystems von Gefässcanälen ist hier und dort noch die Knochenmasse selbst erhalten geblieben. Ihre homogene klare Grundmasse ergiebt sich als ausserordentlich reich an spindelförmigen, sowie an plumperen, spratzigen Knochenkörperchen, welche durch ein Gewirre von zarten Ausläufern in Verbindung stehen, oft dichte Strähnen bilden und eine ausgezeichnete fluidale Anordnung besitzen oder sich concentrisch um die Canalquerschnitte ziehen. Das grösste Volumen innerhalb des Knochens war jedoch von dem dichten Gewebe jener Gefässcanäle eingenommen, deren ästige Steinkerne soeben beschrieben wurden.

Oefters lässt sich beobachten, dass von diesem horizontalen Canalsysteme zarte, sich verzweigende Aestchen und zwar in den Knochenplatten der Schädeldecke nach oben bis an die sculpturirte Oberfläche emporsteigen und hier in den Vertiefungen des Reliefs münden. Innerhalb der Deckknochen der Gaumenfläche hingegen, also der Vomera, Palatina und Pterygoidea, senken sich diese Aestchen von den Hauptstämmen des Gefässcanalsystems bald in rechtem Winkel, bald schräg, geradlinig oder schwach wurmförmig gewellt nach unten zu der zahntragenden Fläche der Knochen hinab, wo sie in die Pulpen der hechelartigen Gaumenzähnchen münden.

Aehnliches gilt von dem Rahmen der Gaumenknochen, den Zwischen- und Oberkiefern. In letzteren erreichen die im vorderen Drittel des Oberkiefers entspringenden, dem horizontalen Zahnrande parallel und dicht unter ihm verlaufenden Hauptcanäle eine besondere Länge, weil sich die Oberkiefer sehr weit nach hinten, nämlich bis beträchtlich hinter die Orbitae erstrecken. Zugleich zeichnen sich diese Hauptstränge durch ihr grosses Lumen aus, was damit in Zusammenhang steht, dass sie auf später klar zu legendem Wege durch absteigende Aeste Blutgefässe in die Pulpen der zahlreichen und grossen Oberkieferzähne absenden.

Auch in den Dermalknochen des Unterkiefers (dem Angulare und Dentale) nimmt ein System von dicht aneinander gelagerten Gefässcanälen den Hauptantheil am Knochengewebe. Im Dentale schiessen dieselben von dem ganz an seinem Hinterende gelegenen Ossificationspunkte aus in Folge der grossen Längenausdehnung dieses Knochens fast horizontal nach vorn. Einige Hauptstränge liegen

...ide und geben durch diesen Aestchen in

...n Knochenlage mit dem Horizontalsystem
...ne glatte, dünne, aus zartesten Kalk-
...schicht, mit der die Deckknochen des
...dialcranium auflagerten, die deshalb auf
...en glatt erscheint und nach welcher sich
...enden. Innerhalb der Kalklamellen liegen
...estreckte Knochenkörperchen mit ausser-
...usläufern.
...er Vomera, Palatina und Pterygoidea ist,
...te Aussenfläche der Knochenplatten der
...dünnen Lage einer fast überall stark an-
... ihrer Structur meistens nicht mehr defi-
... Jedenfalls ist diese Deckschicht wider-
...ter ihr liegende Knochengewebe und
...h als hautartige Lage die Fläche der
...enn die gesammte übrige Knochenmasse



... noch mit seiner Knochenmasse erhaltenen Vomer gelang es jedoch, partielle Querschliffe auch durch die dünne Deckschicht seiner Gaumenfläche zu gewinnen. Dieselbe erwies sich hier als eine ...

Grenze oder nahe ihr in der homogenen Dentingrundmasse liegen kleinere und grössere, spratzige, vielzackige Knochenkörperchen, deren nach der Gaumenfläche gerichtete Ausläufer eben jene Dentinröhrchen vorstellen. Die von diesen erzeugte Deckschicht ist demnach Osteodentin.

Dieselbe setzt sich, wie auch an anderen der vorliegenden Exemplare beobachtet, unmittelbar in die Dentinschicht der kleinen Hechelzähne fort, so dass diese nur spitzconische Ausstülpungen derselben bilden. Es würde also diese äusserste Schicht dem »Ganoin« der Ganoidschuppen homolog sein, welches nach Klaatsch[1]) von den Dentinkegeln der Schuppenzähne herstammt und deshalb in genetischer Beziehung als Dentin (nicht als Schmelz) zu bezeichnen wäre. Der morphologische Befund an den bezahnten Hautknochen von Sclerocephalus bestätigt in vollem Maasse die von Klaatsch an Ganoidschuppen gemachten histogenetischen Beobachtungen.

Es gelangt somit die Homologie der Deckknochen des Sclerocephalus-Schädels mit den Ganoidschuppen dadurch zum vollsten Ausdrucke, dass sie wie diese[2]) aufgebaut werden aus drei Schichten, nämlich aus

1) einer dünnen Basalschicht von Kalklamellen, in diesen isolirte, kleine, langgestreckte Knochenkörperchen mit ausserordentlich zarten Ausläufern (Isopedin Pander's);

2) auf sie folgt eine viel dickere Schicht von Knochengewebe, reich an strähnig oder fluidal um die Canäle geordneten, unter einander durch Ausläufer verbundenen Knochenkörperchen und ausgezeichnet durch ein Horizontalsystem von derben, meist dicht an einander gelagerten Gefässcanälen, deren Hauptstränge in der Ebene der Knochenplatten ausstrahlen, sich in derselben Fläche verzweigen und von ihr aus Aestchen nach der Aussenfläche emporsenden. Diese münden bei den Deckknochen der Mundhöhle

---

1) l. c. S. 131 und 139.

2) K. v. Zittel, Handbuch d. Paläontologie. B. III. 1887. S. 11, 135, 145 u. 148. — O. Hertwig, Morphol. Jahrb. V. 1879. S. 12. — H. Klaatsch, Ebendort XVI. 1890. S. 97. — Br. Hofer, Sitzungsber. d. Ges. f. Morphologie. München 1889. S. 103. — H. Credner, Zeitsch. d. D. geol. Ges. 1893. Sclerocephalus.

z. Th. in die Pulpen der Zähne, bei den Dermalknochen der Schädeldecke in die Gruben der Oberflächensculptur;

3) den äussersten, dünnen Ueberzug der Knochenplatten bildet eine zarte Lage von Osteodentin, welche bei den zahntragenden Knochen direct in die Dentinkegel der Hechelzähne fortsetzt und der als Ganoin bezeichneten, aber dem Dentin zuzurechnenden Oberflächenschicht der Ganoidschuppen, z. Th. auch dem Kosmin der letzteren homolog ist.

2. Die Bezahnung.

Die einander zugewandten Ränder der Zwischen- und Oberkiefer und der Unterkiefer sind von einer Reihe eng aneinander stehender, nur im Ober- und Unterkiefer nach hinten zu etwas weitläuftiger gestellter, gleichartiger Zähne besetzt. Ihre Gestalt ist eine spitzkegelförmige, dabei schwach einwärts gekrümmte. Ihr Querschnitt ist an der äussersten Spitze ein elliptischer, stumpf zweischneidiger mit der Zahnreihe paralleler Längsaxe, — nahe der Basis ein abgerundet oblonger, quer gegen die Kieferaxe gerichteter. Letzteres wird dadurch veranlasst, dass die Zahnbasen zu einer dicht schliessenden Reihe eng aneinander gedrängt stehen und sich dadurch in der Form ihres Querschnittes beeinflusst haben. In jedem Zwischenkiefer dürften etwa 8, in jedem Oberkiefer 30—35 solcher einspitziger Kegelzähne stehen. Ihre Höhe ist innerhalb der Zwischenkiefer und der vorderen Strecke des Oberkiefers die gleiche und beträgt bei den grössten Individuen 14—15 mm bei 6—8 mm basalem Durchmesser, nimmt aber dann nach dem hinteren Kieferende zu im Allgemeinen langsam und gleichmässig ab. Ueber ihr Niveau ragt nur ein an der Biegung des Oberkieferrandes zum Schnauzenende stehender Fangzahn um einige Millimeter empor.

Was den allgemeinen Bau dieser Kieferzähne betrifft, so erweisen sie sich auf Quer- und Längsbrüchen, sowie an Steinkernen ihrer Pulpa schon dem blossen oder dem mit Lupe bewaffneten Auge als an der Spitze solid, weiter abwärts durchzogen von einem sich spitz verjüngenden Pulpkegel mit oben kreisrundem, im Zahnsockel ovalem Querschnitt, in welchen sich nach unten immer länger werdende und dabei sich wurmförmig krümmende Falten einschieben, wodurch der Zahn in fast drei Vierteln seiner Höhe einen einfach

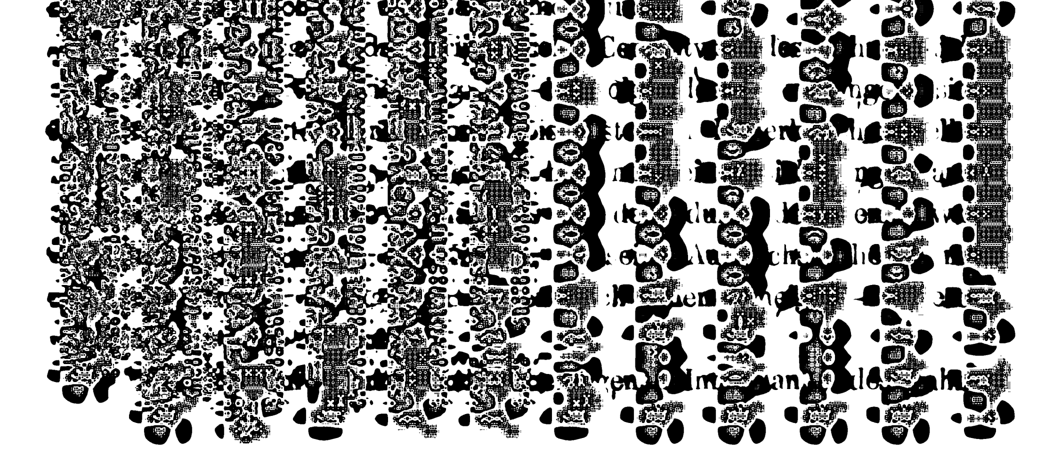
[illegible] etwas complicirteren Bau erhält. [illegible] seite des Zahnes durch in gleichem [illegible] Falten sich tiefer einkerbende [illegible]

[illegible] ohne mit dem Kiefer geschieht auf [illegible] geht an seiner Basis in eine von [illegible] lb spongiöse Cementmasse über, [illegible] und die beiden Seitenflächen [illegible] allt (Textfigur 2, *c*) und mit der [illegible] nem dem [illegible] nden Ce- [illegible] ahnleiste, [illegible] Fläche [illegible] darunter [illegible] en über. [illegible] von Ca- [illegible] ssystemes [illegible] ilen sich [illegible] zu einem [illegible] ebogenen [illegible] rch diese [illegible] er sie er- [illegible] nze zwi- [illegible] gelegenen [illegible], S. 529).



Fig. 2. Ein mit seiner Spitze in das Gestein gerichteter Oberkieferzahn, dessen Dentinmantel durch die Sickerwasser ausgelaugt ist, während die Cementumwallung des Zahnsockels erhalten blieb.

c = hufeisenförmige Cementumwallung mit Einstülpungen in die jetzt verschwundenen Dentinfalten; — *z* = Abdruck der medialen Zahnflanke ohne Cement[illegible] mit langgestr[illegible] Fa[illegible]



sockels treten nun zu den von unten, aus dem Canalsystem des Dermalknochens senkrecht emporsteigenden Gefässen noch solche, die horizontal aus dem Bindegewebe der Gaumenfläche von der Medianseite her in die Pulpspeichen des faltigen Sockels einmünden (Textfigur 2, *k*). Durch sie wird an solchen Stellen der Dentinmantel durchbrochen und geht dadurch seiner Continuität verlustig. Diese Foramina entsprechen den Einmündungsstellen grösserer Gefässe an der Basis der Gaumenzähnchen von Sclerocephalus und der Schuppenzähnchen von Ganoiden.

Dadurch, dass das Cement den Zahnsockel nicht ringsum, sondern hufeisenförmig umwallt, erscheinen die Zähne am Aussenrande des Kiefers wie in flache Alveolen von Cementmasse eingesenkt, indem dieselbe hier die sich mit der Verjüngung der Zähne nach oben keilförmig erweiternden Zwischenräume zwischen den Zähnen erfüllt und sich dort, wo letztere weitläuftiger stehen, zwischen dieselben einschiebt. Durch diese Beschränkung der Cementumwallung auf die Aussen- und Seitenflächen der Zahnsockel, durch deren Fehlen auf dem inneren Sockelsegment, durch die hier von eintretenden Horizontalgefässen erzeugten Lücken zwischen den sich in die Länge streckenden Falten erklärt sich die Asymmetrie der Querschnitte Fig. 24 und 28, Taf. III.

Von einem Zahnwechsel durch an Stelle der alten Zähne von unten nachrückende Ersatzzähne ist an keinem der vielen Aufschlusspunkte in die Zähne und deren Basis irgend eine Andeutung wahrzunehmen, so dass ein derartiger Zahnwechsel bei Sclerocephalus nicht stattgefunden haben kann. Die nach hinten abnehmende Grösse und in gleichem Schritte zunehmende Weitläuftigkeit der Kieferzähne weist vielmehr darauf hin, dass die Neubildung derselben innerhalb des Cementstreifens auf der hinteren Strecke des Kieferrandes vor sich gegangen ist.

Das sich nach Analogie mit anderen Stegocephalen wahrscheinlich als schmale streifenförmige Lamelle an den zahntragenden Rand des Oberkiefers anschliessende Palatinum scheint, soweit die vorliegenden, in dieser Beziehung freilich höchst ungünstig überlieferten Reste der Gaumendecke einen Schluss gestatten, eine Reihe von spitzkegelförmigen Zähnen getragen zu haben, welche in ihrer Grösse und in ihrem Faltenbau denen der Kiefer gleichen.

Das Pterygoid ist wie bei den übrigen Stegocephalen dreiflügelig. Der innere, nach dem schildförmig verbreiterten Hinterende des Parasphenoids verlaufende Ast desselben ist sehr dick und kurz, — der bogig nach vorn gerichtete längste Flügel umrahmt mit seinem medialen ausgeschweiften Rande die grossen Gaumenlöcher von aussen und ist hier auch am stärksten, während sich sein scharfer Lateralrand an die Gaumenfläche des Oberkiefers und des Palatinums anlegt, — der dritte Arm endlich erstreckt sich nach aussen und hinten zur äussersten Hinterecke des Schädels, wo er das Quadratum tragen hilft. Die den Gaumenhöhlen benachbarte Fläche des Pterygoides, also namentlich dessen nach vorn gewandter Flügel, trägt kleine kegelförmige Zähnchen, die gegenüber der Grösse der Maxillarzähne fast verschwinden, durchschnittlich nur 1 oder 1,5 mm Höhe erreichen und deshalb kaum aus der Schleimhaut hervorgeragt haben können. Die Ausdehnung und Dichte dieser Hechelbezahnung ist individuellen Schwankungen unterworfen, so dass die Zähnchen bei einem Exemplar ziemlich weitläuftig, bei dem anderen geradezu bürstenartig dicht stehen und sich dabei bis auf den nach dem Parasphenoid gerichteten Flügel ausbreiten können. Im vorderen Drittel des längsten nach vorn verlaufenden Flügels werden diese Hechelzähnchen ersetzt durch eine einzige Reihe etwas grösserer, dicht am Innenrande des Flügels stehender Zähne.

Die Vomera bilden je eine Knochenlamelle von nur wenig geringerer Dicke als die Knochenplatten der Schädeldecke und reichen mindestens bis unter die hintere Grenze der Nasalia zurück. Der Ossificationspunkt derselben liegt weit vorn und aussen unfern der Naht zwischen Maxillare und Intermaxillare. Von ihm aus laufen nach der Medianlinie des Gaumens und nach hinten zu in schönem Schwunge die von Kalkspath ausgefüllten Canäle des horizontalen Gefässsystemes.

Die Gaumenfläche der Vomera trägt, wie es scheint gerade auf der Stelle des Ossificationspunktes, je einen grossen spitzkegelförmigen Fangzahn, der ebenso wie die Kieferzähne des zugehörigen Schädelfragmentes an der Basis einen Durchmesser von 3 mm und mindestens 8 mm Länge besitzt, radiärfaltig gebaut und steil nach hinten gebogen ist. Die übrige Fläche der Vomera und zwar namentlich deren hinter dem Fangzahn liegende Region ist von einer Hechel

von kleinsten, bis etwa 1,5 mm hohen kegelförmigen Zähnchen besetzt, die an ihrer Basis kurz und schwach gekerbt sind.

II. Specielle Histologie der Zähne von Sclerocephalus.

1. Die Kieferzähne. Ihre histologischen Verhältnisse verfolgt in zehn von der Spitze bis zur Basis gelegten Querschnitten.

Querschnitt 1 (Tafel I, Figur 1; nebst Figuren 2, 3 und 4).

Dieser Schliff schneidet die äusserste Spitze des Zahnes und zeigt zunächst, dass derselbe hier einen elliptischen Querschnitt besitzt, der beiderseits, jedoch nicht in ganz symmetrischer Wölbung in stumpfe Kanten ausläuft. Die Längsaxe desselben liegt, wie an anderen Präparaten ersichtlich, in der Richtung der Zahnreihe und des sie tragenden Kieferknochens und misst kaum 0,5 mm, während der Zahn an seiner Basis einen Durchmesser von 6 bis 8 mm erreicht. Eine auch noch so zarte Fortsetzung des centralen Pulpkegels in die Zahnspitze ist nicht vorhanden.

An der Zusammensetzung der letzteren betheiligen sich:

1. Dentin:
   a. Dentingrundmasse,
   b. Dentinröhrchen;
2. Schmelz.

1. Das Dentin.

a. Die Dentingrundmasse. Die ziemlich weitläuftigen Dentinröhrchen beschränken sich auf die Centralpartie des Dentins, so dass ein breiter Randsaum des letzteren frei von ihnen bleibt und deshalb bei Betrachtung mit der Lupe homogen und vollkommen klar erscheint. Bereits bei etwas stärkerer Vergrösserung zeigt sich jedoch, dass seine äusserste, an den Schmelz angrenzende Zone von einer ausserordentlich scharf und schön ausgeprägten Globularstructur

beherrscht wird (Taf. I, Fig. 2 u. 3). Dieselbe offenbart sich im Dünnschliffe auf die Weise, dass die Schnitte von bald grösseren, bald kleineren ellipsoidischen oder kugeligen Sphäroiden als elliptische oder kreisförmige Flächen von homogener Kalksubstanz erscheinen, die eine concentrische, aber ziemlich weitläuftige Anordnung parallel der Schmelzgrenze innehalten, zu welcher besonders auch die Längsaxen der elliptischen Schnittflächen gleichförmig gestellt sind. Um jede der letzteren ziehen sich je nach der Grösse der centralen Globularkerne 1, 2 oder 3 vollkommen concentrische und scharf begrenzte Ringe von abwechselnd grösserer oder geringerer Helligkeit, — man erblickt also schiessscheibenartig gezeichnete Querschnitte von concentrisch-schaligen Globularmassen. Die nächstfolgenden Schichten schliessen diese schaligen Kerne nicht mehr ringsum ein, sondern verschmelzen mit den entsprechenden Lagen des Nachbarsphäroides zu einheitlichen Lamellen, welche zuerst noch in die einspringenden Winkel des Kugelkranzes einbiegen, dann aber auf der centralwärts gerichteten Innenfläche des Globularkranzes diese Buchten immer mehr ausgleichen, endlich einen der Zahncontur entsprechenden, vollkommen concentrischen Verlauf erlangen (Taf. I, Fig. 2) und wenigstens in der breiteren aufgeblähten Hälfte des Zahnquerschnittes als elliptische Anwachsstreifen das Zahncentrum umziehen. Die durch diese Structur erzeugte, ausserordentlich zarte, z. Th. nur hauchartig, moiréähnlich schimmernde Zeichnung von sich durch ihre verschiedene Helligkeit von einander abhebenden ring- und bogenförmigen Lamellen erinnert an die Papillarlinien auf der Innenfläche der Hand und Finger.

Uebrigens ist die schalig-lamellare Verschmelzung der einzelnen Zahnbeinkugeln eine so innige und dichte, dass eine vollkommene Continuität der Grundmasse erzeugt wird und Interglobularräume nirgends ausgespart bleiben. Die Imprägnation der dentinogenen Zwischensubstanz durch Kalkmasse ist also eine vollständige.

Nach innen zu verschwimmt dieser concentrische Schichtaufbau des Zahnbeines ganz allmählich, beschränkt sich also auf die Randzone des Dentins und macht, sobald sich centralwärts die Dentinröhrchen eingestellt haben, einer fast homogenen Structur der Grundmasse Platz. Zwischen jenen schimmert nur hier und dort eine ganz schwach angedeutete concentrische Lamellirung hindurch.

Globulare, lamellare und homogene Dentingrundmasse verhalten sich im polarisirten Lichte gleichmässig isotrop.

b. Die Dentinröhrchen. Die Dentinröhrchen sind auf die Kernpartie des soliden Dentinkegels der Zahnspitze beschränkt, und zwar steigen dieselben in der sich zur schärferen Seitenkante verschmälernden Hälfte des Zahnquerschnittes senkrecht empor, werden deshalb von der Schlifffläche quer durchschnitten und erscheinen auf derselben als weitläuftige derbe Punkte, während sie sich in der anderen Querschnitthälfte flach nach aussen umbiegen, so dass hier innerhalb des Dünnschliffes längere Stücke der Röhrchen zu liegen kommen.

Aus diesen Quer- und Längsschnitten ergiebt sich zunächst, dass die Dentinröhrchen recht weitläuftig von einander stehen, indem die homogene Grundmasse das Vielfache ihres Volumens beträgt, — ferner, dass sie keine einfachen glatten Canälchen bilden, sondern beinahe quirlartig (Fig. 4, *a*) und in kürzesten Abständen kleinste Aestchen (Fig. 2; Fig. 4, *c*, *d*, *e*) abgeben, um endlich selbst in Form allerfeinster Verzweigungssysteme innerhalb der klaren, globulären Randzone des Dentins auszutönen (Fig. 3; Fig. 4, *b*). Die Grenzlinie zum Schmelz erreichen selbst die zartesten Aestchen nicht, so dass von einer Fortsetzung derselben bis in den Schmelz nicht die Rede sein kann.

2. Der Schmelz.

Ein zartes Schmelzhäutchen von gleichmässiger Dünne umhüllt das Dentin und verstärkt sich nach den beiderseitigen Kanten zu um ein Minimum. Es ist vom Dentin durch eine haarscharfe Grenzlinie getrennt, lässt eine schwach angedeutete Schichtung in 2 oder 3 Lagen wahrnehmen, besitzt aber sonst eine vollkommen homogene Beschaffenheit im Gegensatze zu der Globularstructur der äussersten, peripherischen Dentinzone, welche von der Schmelzgrenze unvermittelt abgeschnitten wird. Nirgends treten Dentinröhrchen in die Schmelzlage ein. Jede Andeutung prismatischen Aufbaues fehlt. Dahingegen ist ihr Verhalten in polarisirtem Lichte durchaus abweichend von dem der globulären und homogenen Dentingrundmasse (also auch des Vitrodentins, siehe S. 493 und 502), indem sich letztere fast vollkommen isotrop, der Schmelz hingegen doppelbrechend erweist, und zwar

in ungefähr dem gleichen Grade wie der Schmelz von z. B. Alligator lucius. Auch der Charakter der Doppelbrechung ist der nämliche.

Querschnitt 2 (Tafel I, Figur 5).

Bereits etwas tiefer, aber immer noch nahe der Spitze des Zahnes liegt der Querschnitt 2. Da die Zahnspitze schwach einwärts gebogen, der Schliff durch sie aber horizontal gelegt ist, gelangt dieselbe zu einem asymmetrischen Anschnitte, in welchem die eine der Seitenflächen wenig convex, die gegenüber liegende hingegen stark und zwar halbkreisförmig ausgebuchtet erscheint. Beide laufen in scharf ausgeprägten Seitenkanten zusammen. Die diese beiden Kanten verbindende Längsaxe des Zahnquerschnittes misst etwa 1 mm.

Die in einem tieferen Theile des Zahnes sich conisch verjüngende Pulpa hat sich bereits ganz ausgespitzt, — die Zahnspitze ist also hier bis auf die Dentinröhrchen durchaus verkalkt und von solidem Bau, an welchem sich 1) Dentin, 2) Schmelz betheiligen.

1. Das Dentin.

Das Zahnbein besitzt auch im Niveau dieses Querschnittes eine doppelte Ausbildungsweise. Seine schmale äussere, vom Schmelz scharf begrenzte peripherische Randzone besteht aus röhrchenfreier Grundmasse (Vitrodentin) von globulärem Bau und setzt sich aus lauter dicht aneinander gedrängten, deshalb im Querschnitte meist polygonal umrandeten, grösseren und kleineren Sphäroiden zusammen, welche hier und dort, namentlich in der Region der Zahnkanten, schwache Andeutungen concentrischer Lamellirung zeigen. Dieselben liegen so dicht gepackt, dass zwischen ihnen fast keine interglobuläre Füllmasse bemerkbar ist, jedenfalls aber keine Interglobularräume offen, also unverkalkt, geblieben sind. Nach innen zu verliert sich die Globularstructur und macht einer anscheinend homogenen, aber immer noch feinst globulären Modification der Dentingrundmasse Platz. Von dieser wird die den bei Weitem grössten Raum des Querschnittes einnehmende Kernpartie des Zahnes gebildet.

Erst in ihr stellen sich die Dentinröhrchen ein. Dieselben sind innerhalb des Dentins des gesammten Zahnes, also bis hinab zu dessen Basis, bis in ihre feinsten Verzweigungen von Brauneisen

erfüllt, heben sich in Folge dessen in ihrem ganzen Verlaufe von den Odontoblasten bis zum zartesten Aestchen auf das schärfste von der wasserhellen Dentingrundmasse ab, — ein Erhaltungszustand, der an Klarheit und Vollständigkeit der Ueberlieferung die auf künstlichem Wege erzielten Imbibitions- und Entkalkungspräparate übertrifft.

Im Querschnitte 2 steigen die Dentinröhrchen in dessen verhältnissmässig umfangreicher Centralregion vertical in die Höhe und erscheinen demgemäss im Querschnitte als schwarze, durch Abzweigungsstellen sich ebenfalls senkrecht emporwendender Aestchen zackig zerschlitzte Punkte. Die dieses verticale, weitläuftige Röhrenbündel umrahmenden Dentinröhrchen haben sich radiär nach aussen umgebogen, werden deshalb in der Schliffläche für grössere Strecken ihres Verlaufes sichtbar und erweisen sich dann als von zartesten Aestchen begleitet, bis sie sich endlich in spitz quastenförmige Büschel feinster, fast parallel verlaufender Verzweigungen auflösen. Sie reichen bereits beträchtlich weiter nach aussen als im Spitzenschliff 1, so dass die globuläre, auch hier vollkommen röhrchenfreie Randzone des Dentins viel schmäler ist, als in jenem.

2. Der Schmelz.

Der Schmelz schmiegt sich in gleichmässiger Dicke als zartes Band um den ganzen Dentinquerschnitt. Nur an den beiden Enden der Längsaxe des letzteren verdickt sich dasselbe um etwa das Doppelte und bildet so die eigentlichen Schneiden der Zahnkanten. Der Schmelz ist vom Dentin auch hier durch eine haarscharfe Grenzlinie getrennt und hebt sich von dessen globulärer Randzone sowohl durch seine Klarheit und seine Homogenität, wie durch seine Doppelbrechung ab. Bei 500facher Vergrösserung macht sich innerhalb des Schmelzes eine schwache Lamellarstructur bemerklich.

Querschnitt 3 (Tafel I, Figur 6; nebst Figuren 7 und 8).

Dass die Spitzen selbst unmittelbar neben einander stehender Zähne sowohl in der Contur ihres Querschnittes, als auch in ihrer inneren Structur nicht unwesentlichen Schwankungen unterworfen sind, ergiebt sich aus dem Querschnitt 3 (Taf. I, Fig. 6) und aus

dessen Vergleich mit den soeben erläuterten Schliffen durch die Spitze der benachbarten Zähne.

Von letzteren unterscheidet sich der Querschnitt Taf. I, Fig. 6 zunächst durch seine schärfer ausgeprägte Zweischneidigkeit und nähert sich dadurch mehr einer ausgezogenen Ellipse, an welcher sich jedoch, weil der Schnitt gleichfalls nicht vollkommen rechtwinklig auf die Zahnaxe geführt ist, ebenso wie bei Schliff 1 und 2 eine etwas stärkere Wölbung der einen Seitencontur im Gegensatze zu der ihr gegenüber liegenden geltend macht. Gleiches gilt von den Zahnkanten, indem sich die Seitenflächen zu der einen derselben in spitzerem Winkel verjüngen, als es zu der ihr diametral gegenüber stehenden Kante geschieht. Die auf solche Weise erzeugte Asymmetrie ist nicht nur eine äusserliche, sondern findet zugleich, wie gezeigt werden soll, in der inneren Structur ihren Ausdruck.

Der Pulpkegel reicht auch in diesem Zahne nicht bis zur Höhe des zu erörternden Querschnittes. Die Zahnspitze ist in Folge dessen ebenfalls solid und zwar wird fast ihr gesammter Querschnitt von klarer Dentingrundmasse gebildet, welche ausschliesslich in der der einen Kantenzuschärfung nächst liegenden Partie von einer nur geringen Zahl steil emporsteigender Dentinröhrchen weitläuftig durchzogen wird. Dieser Dentinkegel ist von einer zarten Schmelzschicht umgeben.

1. Das Dentin.

In der Mikrostructur der klaren, röhrchenlosen Dentingrundmasse macht sich insofern eine dreifache Ausbildung geltend, als die nach der einen Kante zu stärker gewölbte, plumpere Hälfte des Zahnquerschnittes gänzlich von einem combinirt lamellar-globulären Aufbau beherrscht wird, während in dem sich zur schärferen Seitenkante verjüngenden Abschnitte ausschliesslich die globuläre Textur und zwar sogar nur randlich zum Ausdrucke gelangt, — und endlich in der zwischen beiden Zonensegmenten gelegenen centralen Kernpartie eine, wie sich jedoch zeigen wird, nur scheinbar homogene Beschaffenheit obwaltet.

Die globuläre Lamellarstructur der grösseren Hälfte des Zahnquerschnittes wird auf die Weise erzeugt, dass sich die klare Dentingrundmasse in Lamellen gliedert, welche nahe der Peripherie

des Zahnes am dicksten sind, nach innen zu dünner werden und hier zugleich an Schärfe ihrer gegenseitigen Abgrenzung verlieren (Taf. I, Fig. 7). Jede dieser Lagen besteht aus dicht an einander gedrängten, im Dünnschliffe matten, von aussen nach innen allmählich an Grösse abnehmenden Sphäroiden mit sehr wenig Füllmasse von etwas grösserer Helligkeit, welche die schmalen Räume zwischen den Kugelgebilden ausfüllt. Bei sehr dichter Aneinanderlagerung dieser letzteren beeinflussen sich dieselben in ihrer Gestaltung, so dass sie abgerundet polygonale Umrisse annehmen können. Je zwei solche globuläre Lamellen werden durch eine dünne Lage vollständig homogen erscheinender Grundmasse von einander getrennt.

Da diese globuläre Lamellirung in vollkommen concentrischen Halbkreisen verläuft, — die Contur der von ihnen aufgebauten Hälfte des Zahnquerschnittes aber sich allmählich zu einer Kante verjüngt, so entsteht zwischen diesem äusseren Umrisse und der ersten halbkreisförmigen Globularlamelle eine Dentinzone von fast hufeisenförmigem, parabolischem Querschnitte. Ihre Structur ist zu äusserst eine fein globuläre, wird aber nach innen zu viel gröber, wobei zugleich die einzelnen Kugeln wie in der Randzone des Querschliffes 1 von lauter concentrischen, abwechselnd helleren und matteren Lagen umgeben werden, die sich zuletzt mit solchen des Nachbarkernes vereinigen und dann Lamellen bilden, welche sich den einzelnen Globulis in buchtigen Wellenlinien anschmiegen.

Die geschilderte Lamellarstructur dieser einen Hälfte des Zahnquerschnittes verliert sich in der Richtung nach der diametral gegenüber gelegenen Zahnkante zu ziemlich rasch, so dass in der peripherischen Randzone der zweiten Hälfte nur noch eine rein globuläre Textur zum Ausdrucke gelangt (Taf. I, Fig. 8). Das Dentin besteht hier demgemäss aus lauter wirr und dicht an einander liegenden Zahnbeinkugeln von grösserem und geringerem Durchmesser und bald freier Ausbildung, bald durch enge Packung beeinflusster Form (globuläre Grundmasse des Dentins). Die zwischen ihnen befindliche Füllmasse ist meist auf eine feine, sich zwischen den Kugeln hindurchwindende Schicht beschränkt, jedenfalls aber vollständig verkalkt und deshalb auch von optisch gleichem Verhalten wie die Globuli (interglobuläre Füllmasse des Dentins). Nur an einigen wenigen Stellen ist es in der dentinogenen, protoplasmatischen

Grundsubstanz zwischen den bereits verkalkten Zahnbeinkugeln nicht zur Ausscheidung von Kalksalzen gelangt, so dass nach ihrer Verwesung Hohlräume entstanden, welche sich ganz wie die oben beschriebene kalkige interglobuläre Füllmasse zwischen den einander zugewandten Kugelsegmenten hindurchwinden und zwischen sie mit spitzkeilförmigen oder zackigen Ausläufern eingreifen. Diese echten Interglobularräume sind durch spätere Infiltration mit Brauneisen ausgefüllt worden und heben sich deshalb auf das Schärfste sowohl von den sie rings abschnürenden Zahnbeinkugeln, wie von deren kalkiger Zwischenmasse ab.

Von der Randzone nach innen zu verschwimmt diese Globularstructur allmählich bis zu ganz verblassenden Andeutungen. Erst dann stellen sich die in weitläuftigen Abständen ziemlich steil emporstrebenden, sich nach oben nicht selten verästelnden Dentinröhrchen ein. Dass diese noch beim Absterben des Thieres einen Odontoblastenausläufer, also eine Dentinfaser, enthalten haben und nach deren Verwesung offene Canäle bildeten, geht daraus hervor, dass sie bis in die kleinsten Aestchen mit Brauneisen ausgefüllt worden sind (*Dr* Fig. 8). Ganz anders bei den die eigentliche Kernpartie des Zahnquerschnittes in flacherer Neigung durchsetzenden Dentinröhrchen. Hier fehlt die secundäre Infiltration der Canäle, vielmehr sind dieselben von der nämlichen Kalksubstanz ausgefüllt, aus welcher die Grundmasse besteht. Beide polarisiren in genau derselben Weise. Hier also ist nicht nur eine vollständige Verkalkung der dentinogenen Grundsubstanz und dadurch eine Verschmelzung der Zahnbeinkugeln zu einer fast homogenen Dentingrundmasse erfolgt, sondern der Verkalkungsprocess hat sich bis auf die organischen Zahnfasern im Innern der Zahnscheiden erstreckt und die hier ihrem Ende nahen, deshalb sehr zarten Röhrchen gänzlich ausgefüllt, so dass deren frühere Existenz nur noch in sehr geringen Helligkeitsdifferenzen zwischen Grundmasse und Röhrchenausfüllung zur Wahrnehmung gelangt. Dieselben setzen in radiärer Richtung auch noch quer durch die innersten der concentrischen Dentinlamellen hindurch, um, von Globularlagen unterbrochen, selbst in den äusseren Hufeisenlamellen nochmals zur Erscheinung zu gelangen (*Dr* Fig. 7).

Dieses gesammte, so wechselvoll struirte Dentin erweist sich bei Betrachtung im polarisirten Lichte isotrop, auf welches Verhalten

die structurelle Beschaffenheit desselben, also sein lamellarer oder globularer Aufbau oder seine vollkommene Homogenität, das Vorhandensein oder Fehlen von Dentinröhrchen keinerlei Einfluss ausübt. Vielmehr erscheint der gesammte Dentinquerschnitt bei gekreuzten Nicols als gleichmässig dunkle Fläche. Nur zuweilen erblickt man in dieser einzelne kleine, mehr oder weniger lebhaft doppelbrechende, rundliche oder polygonale Partien, die sich jedoch als bei Herstellung des Schliffes in die verhältnissmässig weiche Kalkmasse des Dentins eingetriebene Schmirgelkörner ergaben.

2. Der Schmelz.

Die Schmelzschicht, welche den Dentinkegel im Niveau des Querschliffes 3 überzieht, ist ausserordentlich zart, grenzt sich aber auf einer der Aussencontur vollkommen parallelen, sehr scharf gezogenen Linie von dem Globulardentin ab, wird nirgends von Dentinröhrchen erreicht oder durchsetzt, besitzt keine Prismenstructur und erscheint demnach als homogener heller Saum, der sich jedoch im Gegensatze zu der Dentingrundmasse als doppelbrechend erweist.

Bei stärkerer Vergrösserung erkennt man, dass sich die dünne Schmelzschicht aus 3 bis 4 langgezogen flaserigen Lamellen von strähnigem Verlaufe aufbaut, in welchen minimale, isolirte, rundliche oder eiförmige Körnchen, nirgends aber Andeutungen von prismatischer Structur sichtbar werden.

Querschnitt 4 (Tafel I, Figur 9; nebst Figuren 10 und 11).

Der in Figur 9 auf Tafel I wiedergegebene Querschnitt gehört einem etwas tieferen Niveau an, wie die letztbeschriebenen Schnitte, liegt nämlich bereits etwa 3 mm unter der Spitze des 14—15 mm hohen Zahnes und besitzt deshalb auch schon einen Durchmesser von 2,25 mm.

Der plump-elliptische, zweikantige Querschnitt der äussersten Spitze hat hier einer fast vollkommen kreisrunden Contur Platz gemacht, wobei die eine Zahnkante vollkommen geschwunden ist, während die andere sich zu einer minimalen, scharfrückigen Leiste reducirt hat. Gleichzeitig ist die sich von unten her spitz kegelförmig verjüngende Pulphöhle in den Zahnquerschnitt eingetreten.

1. Die Pulpa.

Die Pulpa zeigt noch keinerlei Andeutungen der sich weiter unten einstellenden radiären Ausstülpungen, besitzt deshalb kreisrunden Umfang und erreicht hier nahe der äussersten Endigung des Pulpkegels kaum den siebenten Theil des Zahndurchmessers. Ihre Wandung ist demgemäss noch sehr stark und besteht ebenso wie der pulplose oberste Theil der Zahnspitze aus Dentin mit einem ausserordentlich dünnen Ueberzug von Schmelz.

2. Das Dentin.

An dem Aufbau des Dentins betheiligen sich:

a. Dentingrundmasse,
b. Dentinröhrchen,
c. Dentinhöhlen.

Durch lagenweise Verschiedenheiten in der Grösse und Schärfe der die Dentingrundmasse zusammensetzenden kleinen Zahnbeinkügelchen, — durch das vollständige Fehlen von Dentinröhrchen in der schmalen peripherischen Zone der Grundmasse, — durch das reichliche Auftreten von solchen in der Kernpartie des Zahnes, — durch ihre Verlaufsrichtung innerhalb der letzteren, — durch die auf concentrischen Kreislinien sich einstellenden Secundärbiegungen der Röhrchen, endlich durch die kranzförmige Vertheilung von Dentinhöhlen erhält der Querschnitt einen ausgezeichnet concentrisch-zonaren Aufbau, welcher durch den zarten peripherischen Ring von Schmelz und den fast central gelegenen, kreisrunden Pulpcanal zu noch schärferem Ausdrucke gelangt.

Die Dentingrundmasse besitzt eine ausserordentlich fein globuläre Structur, wobei die Zahnbeinkügelchen mit einander und der Interglobularmasse so innig verflösst sind, dass sie sich nur durch sehr geringe Helligkeitsunterschiede verrathen, weshalb die Gesammtheit der Dentingrundmasse oft fast homogen erscheint. Innerhalb derselben macht sich eine ebenso zart angedeutete concentrische Lamellirung namentlich dadurch bemerklich, dass feinste und etwas gröbere und deshalb schärfer ausgeprägte Globulirung mit einander wechseln, wobei die gröberen Kügelchen schmale concentrische Ringe innerhalb der feinst globulirten Hauptmasse bilden.

Die Dentinröhrchen steigen in der centralen Region des Querschnittes, die sich jedoch nicht ganz gleichmässig um die Pulpa vertheilt, senkrecht oder sehr steil empor und erscheinen deshalb innerhalb der klaren Grundmasse als dunkle Punkte und kürzere bis längere Strichel, an welchen letzteren man häufig ablaufende Aestchen bemerkt. Die weiter auswärts von unten her in die Schlifffläche emporsteigenden Röhrchen haben sich hier bereits horizontal umgebogen, verlaufen also in dieser mehr peripherischen Zone des Querschnittes bis zu ihren äussersten Enden parallel der Schliffebene und zugleich senkrecht auf die Zahncontur. Durch diesen Gegensatz in der Verlaufsrichtung der Canälchen wird im Querschnitte des Zahnes einerseits eine äussere breit ringförmige Zone von in einer horizontalen Ebene ausgezeichnet radiär angeordneten Röhrchen, anderseits eine von dieser umzogene schmale Centralregion mit als Punkte und Strichel geschnittenen Röhrchen erzeugt. Der Verlauf der ersteren, die ziemlich dicht aneinander liegen, ist ein geradliniger und streckenweise ein so regelmässig gleichsinniger, als wäre die dichte Röhrchenzeichnung mit der Liniirmaschine aufgetragen. An anderen Stellen machen sich minimale, flachwellige Biegungen, zuweilen auch feinste Knickungen der Röhrchen bemerklich (Tafel I, Fig. 10 *ow*). Diese Secundär-Biegungen vollziehen sich stets in bestimmten, fast immer mit gröber globulirten Ringen der Grundmasse zusammenfallenden Kreislinien oder Kreissegmenten und zwar sämmtlich in Gestalt einer kleinen Wellenbiegung mit gleichsinnig gerichteter Concavität. Hierdurch wird eine Art concentrischer Bänderung erzeugt, welche die eine Classe der OWEN'schen Conturlinien repräsentirt.

Innerhalb des radiär gerichteten Verlaufes vieler Röhrchen finden spitzwinkelige Gabelungen in sich rasch dem engen Radiärsystem einordnende gleichwerthige Zweige statt. Ebenso geben die Hauptröhrchen nicht selten zarte Aestchen ab, welche die Dentingrundmasse schräg oder quer durchziehen, sich dann bisweilen mit den Nachbarröhren vereinen oder fiederartig den Hauptstamm für kurze Strecken begleiten, um sich dann auszuspitzen. Die Abgabe von anastomosirenden Quer- und Diagonalästen findet namentlich auf Kreisen von Secundär-Biegungen der Dentinröhrchen, zugleich also auf gröber globulirten Ringen der Grundmasse statt.

Schon bei der Betrachtung des Dünnschliffes mit scharfer Lupe

machen sich innerhalb des Dentinmantels ausserordentlich regelmässige dunkle concentrische Kreislinien kenntlich. Bei Anwendung mikroskopischer Vergrösserung lösen sich dieselben in ringförmige Schnuren von mit Brauneisen erfüllten Dentinhöhlen (Taf. I, Fig. 10 *Dh* und *Dhk*) auf, von deren Grösse und mehr oder weniger weitläuftiger Aneinanderreihung oder maschiger Verwebung die Schärfe, Breite, Dichte und Deutlichkeit der von ihnen erzeugten concentrischen Ringe, einer zweiten Gruppe der Conturlinien Owen's, abhängt. Durch sie gelangt im Vereine mit dem in concentrischen Lagen erfolgenden Wechsel in der Globularstructur der Grundmasse, sowie mit der sich gleichzeitig vollziehenden Secundärbiegung und Gabelung der Röhrchen die schichtweise Ablagerung des Dentins zum Ausdrucke.

Die Form dieser Dentinhöhlen ist, soweit sie in isolirter, weitläuftiger Aneinanderreihung concentrische Perlschnuren bilden und deshalb allseitig frei entwickelt sind, eine ausserordentlich vielgestaltige, zerrissene und zerspratzte, mit sackförmigen Ausstülpungen, knorrigen Aesten, feinzackigen Ausläufern, die sich meist in die auf sie zulaufenden Dentinröhrchen fortsetzen (Taf. I, Fig. 11). Dahingegen findet eine directe Querverbindung zwischen den Dentinhöhlen derjenigen 2—3 weitläuftigen Kränze, wie sie die peripherische Zone des Röhrchendentins streckenweise umsäumen, nur selten statt (Taf. I, Fig. 10 *Dh*). Im Gegensatze zu diesen mehr randlichen Schnuren besteht der centralwärts nächstfolgende Kranz *Dhk* aus beträchtlich grösseren, dicht aneinander geschaarten Höhlen, welche meist durch ihre dicken, knorrig gewundenen Ausläufer in gegenseitiger Verbindung stehen und auf diese Weise ein spongiöses Maschenwerk bilden. Noch weiter im Inneren des Dentinmantels folgt noch eine Anzahl concentrischer Ringe von meist sehr kleinen Dentinhöhlen, in welche jedesmal 1 oder 2 Dentinröhrchen münden, um dann nicht selten jenseits derselben in gleicher Radiärrichtung weiter fortzusetzen. Häufig jedoch entspricht die Zahl und Richtung dieser Fortsetzungen derjenigen der von innen her eintretenden Röhrchen nicht, ja sie enden im äussersten Höhlenkranze nicht selten blind in einer sackförmigen oder vielzackigen Höhle.

Viele der Röhrchen verdicken sich vor ihrem Eintritte in die Höhlen mehr und mehr zu erweiterten Mündungen und ebenso beginnen die von den Dentinhöhlen auslaufenden Röhrchen oft fast

trompetenartig, um sich dann erst zu feinen Röhren von gleichbleibendem Durchmesser zusammenzuziehen (Taf. I, Fig. 11). Diese Ein- und Ausmündungsstellen erscheinen dann als feinzackige Ausläufer der Höhlen. In Folge dieser Eigenart ist eine Formenähnlichkeit der Dentinhöhlen mit den von glatten Kugelsegmenten umgrenzten Interglobularräumen (vergl. Taf. I, Fig. 8 *i*) nicht vorhanden. Die Höhlen der Conturlinien des beschriebenen Zahnquerschnittes erweisen sich vielmehr als ein Zubehör der Dentinröhrchen, nicht aber als ein solcher der dentinogenen Grundsubstanz, und sollen deshalb im Gegensatze zu den Interglobularräumen als Dentinhöhlen bezeichnet werden.

Die beschriebenen Dentinhöhlen reihen sich nun zwar, wie gesagt, zu concentrischen Conturlinien (den Tomes'schen granular layers, Körnellagen) aneinander, jedoch ist jeder dieser Kränze mit Bezug auf die Grösse und Zahl der betheiligten Höhlen gewissen Schwankungen unterworfen, indem beide streckenweise ab- oder zunehmen. In Folge dessen kann ein und derselbe concentrische Kranz in einem Viertel des Kreises aus dichtgeschaarten grösseren, durch Ausläufer mit einander communicirenden Höhlen bestehen, in der anderen hingegen sich zu einer Schnur kleiner, weitläuftig stehender Höhlen ausziehen.

Dort wo kleine Dentinhöhlen eine nur weitläuftige Schnur bilden, oder streckenweise ganz aussetzen, bemerkt man, dass diese Kränze meist genau mit den von den Secundärbiegungen gebildeten Kreisen zusammenfallen.

Die röhrchenfreie Aussenschicht (Vitrodentin). Auf die Kreisfläche des Röhrchendentins folgt nach aussen eine ringförmige Zone von vollkommen klarer, homogen erscheinender, röhrchenfreier Dentingrundmasse, die sich jedoch ebenfalls aus kleinsten, innig verschmolzenen Sphäroiden zusammensetzt.

Gegen das Röhrchendentin grenzt sich diese röhrchenfreie Aussenschicht meist durch den äussersten Kranz von Dentinhöhlen ab, welche nach innen mit zackigen Ausläufern in die Dentinröhrchen fortsetzen, mit ihrer äusseren, ebenfalls spratzigen Contur aber in die klare Randzone eingreifen, ja oft auch in diese eine kurze Strecke weit feine, in zarteste Verzweigungen endende Röhrchen aussenden. Da aber dieser Höhlenkranz keinen geschlossenen Ring, sondern nur eine

concentrische angeordnete Schnur mit Lücken zwischen den Einzelhöhlen bildet, so steht an diesen Stellen die peripherische klare Hüllschicht mit der gleichartigen, sich auch optisch genau so verhaltenden und ebenfalls fein globulären Grundmasse des Röhrchendentins in directem Zusammenhange und bildet die einheitliche, aber röhrchenfreie Fortsetzung der letzteren, ist also »Vitrodentin«, — keinesfalls aber ein Ablagerungsproduct des Schmelzorganes. Noch bestimmter fast zeigt sich dies dort, wo der äusserste Höhlenkranz des Dentins streckenweise aussetzt. Hier sieht man die Röhrchen sich in der Grundmasse allmählich ausspitzen und letztere jenseits der Röhrchenenden zu der klaren Masse der Hüllschicht werden.

3. Der Schmelz.

Die selbst an der äussersten Zahnspitze nur zarte Schmelzkappe hat sich im Niveau des Querschnittes 4 noch mehr verdünnt, so dass sie hier nur noch eine ausserordentlich schwache, sich aber durch ihre Doppelbrechung immer noch scharf abhebende Haut auf der peripherischen Zone von röhrchenfreiem Dentin bildet.

Querschnitt 5 (Tafel I, Figur 12; nebst Fig. 13 und 14 auf Taf. II).

Auf der Strecke zwischen dem zuletzt beschriebenen und dem etwa 3 mm tiefer gelegenen Querschnitt 5 hat sich eine wesentliche Umgestaltung im gesammten Zahnbau vollzogen.

Zunächst hat der Zahnquerschnitt die Contur eines zur Zahnreihe und zum Kiefer quergestellten Ovals angenommen, dessen Axen 3 und 4,5 mm messen.

Die Pulphöhle hat sich sehr stark erweitert, beansprucht jetzt die Hälfte des kürzeren Zahndurchmessers und wird in Folge dessen von einem nur 0,75 mm starken Dentinmantel umgeben.

Gleichzeitig hat die Grenzfläche der Pulpa gegen letzteren ihren glatten, rein kreisförmigen Verlauf eingebüsst und dafür eine flach wellenförmige Gestaltung angenommen, indem sie sich zu etwa 30 Einzelwellen aus- und einbiegt. Jeder Wellenberg dieser Grenzlinie, also jede Ausbuchtung der Pulpa spiegelt sich auf der Aussenseite des Zahnes in Gestalt einer breiten, sehr flachen Längsrippe wieder. Der Lage der Längsfurchen, welche diese Wölbungen trennen,

entsprechen somit auf der Innenfläche des Dentinmantels die schwachen, centralwärts gerichteten Dentinfalten.

Von den Wellenbergen der Pulpa gehen die ausserordentlich zarten und gracilen Dentinröhrchen, und zwar jetzt nur noch in ebener Lage aus, bilden aber nicht mehr ein einheitliches Radiärsystem, sondern ebenso viele selbständige, horizontale Fächersysteme, als Pulpvorsprünge vorhanden sind. Jede der die letzteren trennenden Dentinfalten gehört deshalb zur einen Hälfte dem links, zur anderen dem rechts von ihr liegenden Fächersystem von Dentinröhrchen an, welche von beiden Seiten her in schön geschwungenen Bogen auf die Medianebene der Falte zustreben, ohne sie jedoch immer zu erreichen (Taf. II, Fig. 13 und 14 *h*). So bleibt denn in jeder Falte eine schmale Medianzone fast röhrchenfrei und besteht dann aus klarer, feinst globulärer Dentingrundmasse, in welcher sich von beiden Flanken her die Röhrchen verästeln und verlieren und nur in seltenen Fällen mit ihren feinsten Zweigenden in gegenseitige Verbindung treten.

Die einzelnen Phasen im Verkalkungsprocesse des Dentins finden ihren Ausdruck in einer ausgezeichneten wellenförmigen Anwachslamellirung. Dahingegen fehlen Kränze von Dentinhöhlen, sowie solche von Secundärbiegungen, ebenso grössere Zahnbeinkugeln im Gegensatze zur Zahnspitze vollständig. Nur nahe der Peripherie des Dentinmantels verläuft eine breite, scharf markirte Zone von verfilzten Dentinhöhlen (Taf. I, Fig. 12 und Taf. II, Fig. 13 und 14 *Dhg*).

Diese Körnellage bildet jedoch nicht mehr einen geschlossenen Kreis, sondern gliedert sich in lauter bogenförmige Guirlanden, deren jede ein Fächersystem von Dentinröhrchen nach aussen abschliesst.

Auf die Körnelbogen folgt wie im Schliff 4 die peripherische Hüllschicht von röhrchenfreier, fein globulärer Grundmasse, die sich zwischen je zweien der aneinander stossenden Körnelbogen hindurch unmittelbar in die Medianzone der Falten fortsetzt. Diesen Einstülpungsstellen entsprechen auf der Aussenfläche des Zahnes die Längsfurchen. Das Zahnsegment zwischen je zwei solchen [illegible] chen gehört also jedesmal einem Fächersysteme von [illegible] chen an.

Die Schmelzkappe der Zahnspitze hat sich

ausgedünnt; die Aussenfläche des Zahnes wird deshalb von der röhrchenfreien Hüllschicht gebildet.

Von Tragweite ist die Thatsache, dass im Bereiche eines kleinen Segmentes der Zahnperipherie innerhalb der klaren Hüllschicht verticale Gefässcanäle emporsteigen (Taf. I, Fig. 12 und Taf. II, Fig. 14 *c*). Jeder derselben nimmt die spitzwinkelige Einkerbung einer Längsfurche zwischen den Schenkeln zweier Dentinhöhlenguirlanden ein und erhält dadurch meist einen abgerundet dreiseitigen Querschnitt. Gleichzeitig erlangt hier die Aussenschicht grössere Dicke, nimmt in ihrer klaren Grundmasse zahlreiche strähnig angeordnete, spindelförmige Knochenkörperchen auf und besitzt an solchen Stellen die Structur von Hautknochen (Cement). In Folge dieser localen Verdickung der Hüllschicht werden die unter ihr liegenden Furchen fast ganz eingeebnet und ausgeglichen, während die eines solchen Verticalcanales noch entbehrenden Längsfurchen eine viel schärfere und tiefere Einkerbung der Aussenfläche bewirken. Von diesem Niveau des Zahnes aus lassen sich die Verticalcanäle bis hinab in dessen Basis verfolgen.

Wollte man die Richtungslinien der Pulpavorsprünge als Radien im Bauplane des Zahnes bezeichnen, so liegen radiär: die sich von jenen aus bogenförmig nach beiden Seiten ausbreitenden Fächersysteme von Dentinröhrchen, die Körnelguirlanden, in welche sie nach aussen verlaufen, die Convexitäten der wellenförmigen Anwachslamellen und die Bogen der klaren Hüllschicht, — dahingegen interradiär: die fast vollkommen röhrchenfreien Medianzonen der Falten, die Aussenfurchen und die verticalen Furchencanäle.

Die histologischen Verhältnisse der Einzelelemente dieser Zahnregion sind fast genau dieselben wie in dem nächst tieferen Querschnitte und werden deshalb gemeinsam mit diesen zur Beschreibung gelangen.

Querschnitt 6 (Tafel II, Figur 15; nebst Figuren 16, 17, 18 und 19).

In diesem etwas tiefer gelegenen Querschnitte prägt sich die bereits im Niveau des vorher beschriebenen Schliffes 5 eingeleitete Querstellung des Zahnes dadurch noch deutlicher aus, dass derselbe

stark abgerundet vierseitige Conturen angenommen hat, wobei gleichzeitig seine kurze, in der Längsrichtung der Zahnreihe liegende Axe bis zu 3,75, — die längere, rechtwinkelig darauf stehende auf 5 mm angewachsen ist.

Hand in Hand mit dieser Vergrösserung des Durchmessers geht die Verlängerung der bis dahin nur schwach wellenförmigen Dentineinstülpungen zu Falten von meist zungenförmigem Querschnitt (Plicidentin), durch welche eine tiefere Zerschlitzung der Pulpa in lauter spitz endende Pulptaschen erzeugt wird. Auf der Aussenfläche des Zahnes findet dieser Fortschritt in der Faltenbildung durch eine tiefere Längsfurchung des Dentins seinen Ausdruck. Auch die Körnelguirlanden werden in Mitleidenschaft gezogen, gliedern sich durch Zwischenräume weitläuftiger von einander ab, erstrecken sich mit ihren Flügeln viel tiefer in die Medianzone der Falten hinein und liefern deshalb hufeisenförmige Querschnitte. Zugleich vollzieht sich die Einmündung der Dentinröhrchen in die Dentinhöhlen der Körnelguirlanden viel offenkundiger als weiter oben.

Die Zahl der nach innen vorspringenden Falten des Dentinmantels beträgt etwa 32. Ihre Gestaltung und Höhe sind keine durchaus constanten. Im grössten Theile des Zahnquerschnittes findet zwar eine regelmässige Alternirung von höheren zungenförmigen Falten mit kürzeren, nur halb so hohen, abgerundet keilförmigen Vorsprüngen des Dentinmantels statt, — im entgegengesetzten, wie sich zeigen wird, einwärts gerichteten Drittel des letzteren jedoch, reichen sämmtliche Falten doppelt so weit nach innen wie dort und beginnen an ihrem centralwärts gerichteten Ende schwache Biegungen und Krümmungen zu erleiden. Dort, wo höhere mit niederen Dentinfalten alterniren, erfahren die Pulpausstülpungen durch letztere nach aussen zu eine Gabelung in zwei Zinken. Diese Pulptaschen enden nur selten in abgerundeten Bogen, sondern keilen sich vielmehr meist in spitzem Winkel zwischen den Falten aus.

Von jeder dieser Radiärausstülpungen der Pulpa geht ein Fächersystem von Dentinröhrchen aus (Taf. II, Fig. 16 *h*), deren mittlere Gruppe geradlinig nach der Peripherie verläuft; die beiderseits sich anschliessenden divergiren in spitzem Winkel und biegen sich, sobald sie die Peripherie nicht mehr erreichen können, in immer steileren Bogen nach der Medianebene der Falten um. An diesen von der

spitzen Endigung der Pulptaschen ausstrahlenden Röhrchenfächer schliessen sich die von den beiden Seitenflächen derselben ausgehenden Dentinröhrchen an, indem sie sich von der Pulptasche aus in immer stumpferem Winkel in die jederseits angrenzende Dentinfalte wenden. Jede der 32 Pulptaschen läuft in ein solches selbständiges, mit seinen Nachbarn nicht in Communication stehendes Fächersystem aus. Zuweilen gabeln sich die Röhrchen unterwegs in zwei gleichwerthige Zweige, die sich alle im Sinne des gesammten Fächersystems nach aussen wenden. Kleinste Querästchen hingegen sind im Gegensatze zu ihrer Häufigkeit an den Dentinröhrchen der Zahnspitze viel seltener.

Die Grenze des Dentins gegen die Pulptaschen ist keineswegs eine glatte, vielmehr fast überall eine unregelmässig feinzackige. Es rührt dies daher, dass die Zellen der Odontoblastenschicht mit ihrem gegen das Dentin gerichteten Ende sich in einen Fortsatz zuspitzen, welcher als Dentinfaser in das Dentinröhrchen ausläuft. Diese Fortsätze der Odontoblasten markiren sich am Dentinrande des Querschnittes 6 deshalb so scharf, weil sie ebenso wie die Röhrchen selbst von Brauneisen erfüllt sind und deshalb als schwarze Unebenheiten in die klare Dentingrundmasse eindringen (Taf. II, Fig. 16 *o*). Nicht selten sieht man die Dentinröhrchen von diesen minimalen Höckerchen oder zähnchenartigen Vorsprüngen ihren Ursprung nehmen. In tieferen Niveaus des Zahnes werden wir jedoch diese Verhältnisse sich noch viel deutlicher und constanter gestalten sehen.

Nach aussen münden die Dentinröhrchen jedes Fächersystems in die dicht aneinander geschaarten Dentinhöhlen einer Körnelguirlande (Taf. II, Fig. 16 *Dhg*), deren jede somit einen Röhrchenfächer in Form eines Hufeisens abschliesst. Der Bogen eines solchen liegt demgemäss jedesmal über dem Ende einer Pulptasche, während sich seine Schenkel eine Strecke weit in die Medianzone jeder Falte fortsetzen, sich hierbei spitz ausziehen und meist in eine sehr weitläuftige Reihe von isolirten Dentinhöhlen auflösen, die bis nahe an, ja bis in das Faltenende reichen können. Da sich jeder der einander zugewandten Schenkel zweier neben einander liegender Hufeisen in dieser Weise nach innen zieht, so enthält jede Falte zwei solche mehr oder weniger scharf markirte und weitläuftige Reihen von Dentinhöhlen, welche durch eine der Median-

ebene der Falten entsprechende Zone von klarer Grundmasse getrennt werden.

In dem bogenförmigen, peripherischen Abschnitte der Körnelguirlanden grenzt sich die Gestalt der sie bildenden Einzelhöhlen in Folge deren dichter Zusammendrängung nur selten scharf ab. Wo dies aber der Fall ist, zeigen sie sich knollig oder spratzig-zackig conturirt und durch derbe Ausläufer mit einander verbunden (Taf. II, Fig. 18), wodurch die Körnelguirlanden ihren spongiösen Habitus erhalten. Sobald sich jedoch die Schenkel der letzteren in der Medianzone der Falten zu einer oft lückenhaften Reihe lauter isolirter Dentinhöhlen ausziehen, diese sich also individualisiren, hebt sich deren Gestalt in vollster Klarheit aus der homogenen Dentingrundmasse ab. Sie zeigen dann (Taf. II, Fig. 19) alle Uebergangsformen von kleinsten, glatt conturirten, rundlichen oder sackförmigen Aufblähungen der Röhrchenenden bis zu vielfach eingeschnürten, mit zahlreichen keilförmigen, knorrigen oder fadenartigen Ausläufern versehenen, grösseren Höhlen von mannigfaltigster Form, welche z. Th. die grösste äussere Aehnlichkeit mit Knochenkörperchen zur Schau tragen. Nirgends aber gleichen sie den Interglobularräumen zwischen den Zahnbeinkugeln der Zahnspitze (siehe S. 497 und Taf. I, Fig. 8), überall vielmehr erweisen sie sich als directer Zubehör der Dentinröhrchen, welche in sie einmünden.

Am deutlichsten lässt sich auch dies an den weitläuftigen Höhlenreihen innerhalb der Falten, aber ebenso bestimmt am Innenrande der peripheren Körnelbogen verfolgen. Mit der Annäherung an diese sieht man die bis dahin glatt und gleichmässig verlaufenden Dentinröhrchen kleine wellige Krümmungen machen, sich kurz vor dem Erreichen der Körnelschicht oft in 2 oder 3 Aestchen gabeln und dann mit diesen in knorrige oder schlanke Ausläufer des innersten Dentinhöhlenkranzes ausmünden oder sich zu solchen verdicken (Taf. II, Fig. 18 und 19).

Während die in jedem Röhrchensystem radiär nach aussen strahlenden Dentinröhren und ihre Verästelungen ausnahmslos in Dentinhöhlen und zwar in diejenigen der Körnelguirlanden münden, ist dies bei den auf die Medianebene der Falten gerichteten Röhrchen nicht immer der Fall, indem sich hier die Zahl der Dentinhöhlen sehr vermindert hat und dem entsprechend auch nur ein geringer

Theil der Röhrchen in solche auslaufen kann. Die übrigen pflegen sich in der Medianzone der Falten in feinste Aeste zu gabeln und sich mit denselben allmählich auszuspitzen, ehe sie die Medianebene selbst erreichen, so dass diese meist ebenso frei von Röhrchen wie von Höhlen bleibt (Taf. II, Fig. 16).

Die klare Grundmasse des Röhrchendentins besitzt durchweg eine ausgezeichnete, aber sehr feine Globularstructur und weist im Niveau der Querschnitte 5 und 6 eine höchst zarte, aber ausserordentlich zierliche und recht complicirte Lamellirung auf, in welcher die einzelnen Stadien des nach innen gerichteten Dickenwachsthums des Dentins zum Ausdrucke gelangen. Im Querschnitte erscheinen diese Lamellen als Systeme von mehr oder weniger steilen Bogen, die, ohne durch scharfe Grenzlinien getrennt zu sein, sich durch den verschiedenen Grad ihrer Helligkeit von einander abheben. Dies wird namentlich dadurch bedingt, dass sich einzelne dünne Bänder von gröberen Kügelchen zwischen breitere Lagen von feineren Globulis einschalten. Ueber jeden Pulpavorsprung stülpt sich ein solches System von sich gleichsinnig mit ihm emporwölbenden Lamellen. Jeder der Röhrchenfächer hat also sein eigenes, ihm zugehöriges Bogensystem und sein selbständiges Verkalkungsgebiet, das jedesmal bis zur Medianzone der beiderseitigen Nachbarfalten reicht. Die Steilheit und Tiefe der Wachsthumsbogen nimmt in gleichem Schritte mit der Länge der Pulpvorsprünge, also auch mit der Höhe der Dentinfalten zu.

Bei dem Querschnitte 5 (Fig. 12 und 13), wo die Grenzfläche der Pulpa gegen das Dentin nur eine wellenförmige ist, besitzen die Schnitte der äussersten, zuerst gebildeten Lagen von Dentingrundmasse die Gestalt eines Hufeisens, dessen Schenkel conform den homogenen Medianzonen der beiderseitigen Nachbarfalten centralwärts gerichtet sind. Bei den nächstfolgenden Dentinlagen wird der bogenförmige Querschnitt schrittweise ein immer flacherer, bis er schliesslich den wellenförmigen Verlauf der Pulpgrenze angenommen hat.

Im Querschnitte 6 (Taf. II, Fig. 15 und 16), in dessem Niveau die Pulpvorsprünge bereits viel tiefer und spitzer und die Dentinfalten beträchtlich höher geworden sind, wo ferner die von den Furchen ausgehende Einstülpung der Aussenschicht in die homogenen Medianzonen der Falten bis fast zu derem Ende reicht, sind

in Uebereinstimmung mit diesen Verhältnissen die Lamellenbogen eng zusammengepresst, deshalb viel steiler, schmaler und spitzbogiger und schwingen sich nur noch als zarte Saumlinien um das centralwärts gerichtete Ende der Falten.

Die Fächer von Dentinröhrchen durchstrahlen das ihnen zugehörige Gewölbsystem von Anwachsstreifen, ohne sich gegenseitig im geringsten in ihrem Verlaufe zu beeinflussen.

Auch im Längsschnitte (siehe Taf. II, Fig. 23) gewahrt man die oben beschriebenen Anwachslamellen meist erst bei zweckdienlicher Abblendung des Lichtes in vollster Schärfe. Dann aber ergiebt es sich, dass die einzelnen Dentinlagen nicht parallel zur Aussenfläche des Zahnes verlaufen, sondern derartig angeordnet sind, dass sie die letztere unter spitzem Winkel treffen, nach innen zu sich aber immer steiler stellen, bis die innersten Lamellen der Pulpgrenzfläche conform stehen. Es bilden mit anderen Worten die inneren, jüngsten Dentinlagen sehr steile, — die äusseren Lamellen hingegen etwas stumpfere Düten. Diese Bauweise entspricht vollkommen dem »Schema über den Verlauf der Zahnbeinlamellen im Längsschliffe eines menschlichen Schneidezahnes«, welches V. v. EBNER im SCHEFF'schen Handbuche der Zahnheilkunde I. Wien 1891. S. 223, gegeben hat.

Die Globuli der Dentingrundmasse werden ausser durch diese Anwachslamellirung in ihrer Anordnung zweitens durch den Verlauf der Dentinröhrchen beherrscht, indem sich die einzelnen Kügelchen zu lauter Reihen gruppiren, deren je eine oder zwei zwischen zwei Dentinröhrchen liegen. Sie bilden in Folge dessen lauter den Röhrchenfächern conforme Strahlensysteme von Perlschnuren (Taf. II, Fig. 17).

Die röhrchenfreie Aussenschicht weist ebenfalls eine ausserordentlich fein globuläre Zusammensetzung auf. Gleichzeitig macht sich in ihr eine zarte, concentrische, flaserig lamellare Bänderung bemerklich, welcher die Anordnung der Globuli folgt. Vom Tiefsten jeder Aussenfurche aus dringt die feinglobulirte Masse der Aussenschicht durch die Lücken zwischen je zwei Körnelguirlanden in die Dentinfalten hinein und bildet innerhalb dieser die bereits erwähnten röhrchenfreien Medianzonen, welche die Bereiche der benachbarten Pulptaschen und die von letzteren ausgehenden Röhrchenfächer, sowie die Gewölbsysteme von Anwachslamellen von einander

scheiden (Taf. II, Fig. 16). Bis an diese Medianzone reichen die äussersten Verzweigungen der beiderseitigen Röhrensysteme, um sich z. Th. auszuspitzen, z. Th. in jenen kleinen, isolirten Dentinhöhlen zu enden, welche, wie soeben dargelegt, als weitläuftiger, lückenhafter Saum die homogene Medianzone beiderseits begleiten. Dass ein einzelnes Dentinröhrchen quer durch letztere hindurchsetzt und sich in ihr mit einem solchen des Nachbarsystems vereint, konnte nur in äusserst seltenen Fällen beobachtet werden.

Ebenso fehlt auch jene in der Grundmasse des beiderseitigen Röhrchendentins so scharf ausgeprägte fächerförmige Gruppirung der perlschnurartig aneinander gereihten Globuli innerhalb der Medianzonen vollständig. Vielmehr geben sich letztere bereits durch die von den Aussenfurchen aus radiär nach innen gerichtete schlierig-lamellare Anordnung ihrer Kügelchen, wie sie sich nicht selten bemerklich macht (Taf. II, Fig. 17 *e*), als Einstülpungen der Aussenschicht zu erkennen.

Verticale Gefässcanäle, wie sie in einigen wenigen der Aussenfurchen des Zahnes bis hinauf in das Niveau des vorher beschriebenen Querschnittes emporsteigen (siehe S. 505), haben sich in dem etwas tieferen Schliffe 6 bereits in fast allen Furchen eingestellt (Taf. II, Fig. 15 *c* und Fig. 16 *c*). Dieselben liegen innerhalb der die Kerben der Längsfurchen fast einebnenden röhrchenfreien Aussenschicht entweder mehr randlich oder rücken zwischen den Schenkeln der Körnelguirlanden ziemlich tief nach innen und besitzen meist lang ovalen, zuweilen abgerundet dreieckigen, scharf umrandeten Querschnitt. In ihrer Umrahmung nimmt die sonst nur zartest angedeutete Lamellirung der Aussenschicht eine viel grössere Schärfe an und kann durch schnurenförmige Einlagerung kleinster dunkler Körperchen noch bestimmter markirt werden.

Querschnitt 7 (Tafel II, Figur 20; nebst Figur 21).

In diesem Querschnitte machen sich im Vergleiche mit den vorigen folgende Veränderungen bemerklich:

Die bis dahin im Querschnitte keilförmigen oder zungenartigen Pulpvorsprünge haben sich zu regelmässigen, vom centralen Pulpkegel

ausstrahlenden Speichen verlängert, deren seitliche Grenzflächen zum grössten Theile fast parallel verlaufen, ja nach aussen schwach divergiren können, wodurch sich die Pulpspeichen an ihrem auswärts gerichteten Ende keulenförmig verdicken und dann an lauter selbständige, aneinander gepresste, deshalb im Querschnitte lang ovale, nur centralwärts sich vereinigende Einzelpulpen erinnern. In gleichem Maasse haben die Falten an Höhe und Schlankheit zugenommen. Innerhalb der von den Pulpspeichen auslaufenden Fächersysteme stehen die zarten, schlanken Dentinröhrchen viel dichter als weiter oben, werden aber in ihrer Vertheilung und Verlaufsrichtung von genau denselben Gesetzen beherrscht und münden ebenfalls in die Dentinhöhlen der peripherischen Körnelguirlanden sowie der Medianzonen der Falten ein.

Von grösserer histologischer Bedeutung jedoch ist die Entwicklung, welche die röhrchenfreie Randschicht (siehe S. 504) in dem kurzen Zwischenraume zwischen dem vorher beschriebenen Querschnitt und diesem nächst tieferen Schliffe erfahren hat. Die bis dahin klare, feinst globuläre Aussenschicht mit ihren zarten Furchencanälen hat jetzt den Charakter eines scharf abgegrenzten, an Knochenzellen und Gefässcanälen reichen Knochengewebes angenommen. Die ersten Andeutungen dieses Vorganges machten sich bereits an einer Stelle des höher gelegenen Querschnittes 5 bemerklich. In der klaren Grundmasse dieser peripherischen Knochenschicht (Cementschicht) liegen zunächst die schon aus höheren Niveaus des Zahnes beschriebenen, jedoch jetzt viel stärkeren, meist dreiseitigen Furchencanäle. Um diese und entlang der ganzen Grenze zum Dentin ziehen sich Schwärme von spindelförmigen Knochenzellen, welche z. Th. durch gleichgerichtete Ausläufer mit einander in Verbindung stehen. Hier und dort stellen sich innerhalb dieser Strichelschwärme grössere, rundliche, vielzackige Knochenzellen mit quer stehenden Ausläufern ein. Local verdickt sich diese Hülle um das Zwei- bis Vierfache und umschliesst dann grosse Gefässcanäle von ovalem, rundem oder lappigem Querschnitte, welche das drei- bis zwölffache Lumen der Furchencanäle besitzen (Taf. II, Fig. 20 *c*). Von ihnen gehen in weitläuftigen Zwischenräumen kurze, geknickte und verästelte Primitivröhrchen aus. In der die Gefässcanäle umgebenden klaren, aber immer noch feinst globulirten Grundmasse liegen eben-

falls Schwärme von kleinen spindelförmigen, sowie von grösseren, rundlich zackigen Knochenkörperchen.

Von den Furchen aus zieht sich die klare Grundmasse dieser peripherischen Cementschicht in die Falten hinein, um deren Medianzone zu bilden. Innerhalb dieser gesellen sich nun zu den kleinen, mehr randlich gelegenen Dentinhöhlen der beiderseitigen Fächersysteme die viel grösseren, zackigen, vielfach zerschlitzten Knochenkörperchen der sich einstülpenden Knochenmasse (Fig. 21 *kk*), so dass die Faltenmitten ein buntes Gewimmel solcher Höhlen beider Art bergen, die sich meist nur durch ihre Grösse, nicht aber durch ihre Gestalt unterscheiden und durch lange Ausläufer sowohl unter einander, wie mit den Dentinröhrchen in Zusammenhang stehen. In diesem Falle sind also die Odontoblasten durch die Dentinröhrchen, die Dentinhöhlen und die Ausläufer der Knochenzellen mit letzteren continuirlich verbunden gewesen.

Aus Obigem geht hervor, dass sich im Niveau des Querschnittes 7 zu dem normalen Röhrchendentin echte Hautknochensubstanz (Cementknochenmasse) als neues, die Dentinhüllschicht ersetzendes Element gesellt hat und zwar nicht nur als peripherische Schicht, sondern auch als von dieser aus zwischen je zwei Fächersysteme der Pulpspeichen nach innen eingeschobene Einstülpungen, welche die Medianzone der Falten bilden, aber hier durch ihre Zellen und deren Ausläufer mit dem Dentin auf das Innigste verwachsen sind.

Querschnitt 8 (Tafel III, Figur 24; nebst Figuren 25, 26 und 27).

Dieser Querschnitt gehört bereits einem der Zahnbasis ziemlich nahe gelegenen Niveau an. In Folge der hier sehr dichten Aneinanderpressung der Zahnsockel hat deren Querschnitt eine abgerundet trapezförmige Gestalt angenommen. Seine Axen messen 8 und 5—6 mm, wobei der längere Durchmesser quer zur Zahnreihe steht und zugleich sein sich schwach verbreiterndes Ende dem Innenrande des Kiefers zugewandt ist.

Durch die Zerschlitzung der Pulpa in mehr oder weniger tiefe und schlanke Speichen werden zahlreiche Dentinfalten erzeugt, die jedoch ganz abgesehen von der statthabenden Alternirung längerer und kürzerer Falten einen zwiefachen Habitus besitzen. In den nach

aussen gerichteten schmäleren zwei Dritteln des Querschnittes sind dieselben kurz, gedrungen und mit plumpen Aus- und Einbuchtungen versehen, im verbreiterten inneren Drittel hingegen lang, schmal und schlank. Wie ihre Gestaltung und ihr Verlauf, so ist auch ihre Structur eine verschiedene und ebenso ist auch der Aufbau des Zahnmantels in beiden Abschnitten ein durchaus verschiedenartiger. Werden die mit den kurzen Falten ausgestatteten zwei Drittel der Dentinwandung von einer scharf abgesetzten, an verticalen Gefässcanälen reichen Cementschicht umwallt, so verschwindet diese in allmählicher Ausdünnung nach dem inneren, mit den langen Falten versehenen Drittel hin fast völlig, so dass hier die spornartig verbreiterten Faltenbasen die einzige und zwar nur lückenhafte Umrandung des Zahnes bilden (vergl. S. 487 und 488).

a. Das nach aussen gerichtete, schmälere Segment des Zahnquerschnittes.

Von der 5 mm messenden Queraxe des schmäleren Zahnsegmentes nimmt die Dicke des Zahnmantels jederseits 0,5—0,75 mm in Anspruch. Von seinem inneren Rande aus springen die plumpen Falten 1,25—1,50 mm weit nach innen vor, so dass im Centrum des Zahnes ein solider Pulpkern von etwa 2 mm unzerschlitzt bleibt. Die Längsfurchen des Dentinmantels werden durch die dicke äussere Cementschicht vollständig ausgeglichen.

An dem Aufbau des Zahnes betheiligen sich in diesem Abschnitte: 1. die Pulpa; — 2. das sich centralwärts zu gedrungenen, kräftigen Falten zwischen die Pulpspeichen einschiebende Dentin; — 3. eine peripherische Schicht von Cementknochenmasse, die sich tief in die Medianzone der Falten einstülpt.

1. Die peripherische Cementschicht. (Fig. 24 und 25 C.)

Die peripherische Schicht von Cementknochenmasse grenzt sich gegen den von dem Bogenkranze der Körnelguirlanden gebildeten Aussenrand des Dentins scharf ab und besteht aus klarer, nicht mehr globulär struirter, also jetzt homogener Grundmasse, welche von verhältnissmässig grossen Gefässcanälen durchsetzt und von fluidalen Strähnen kleiner Knochenkörperchen durchzogen wird.

Die Gefässcanäle besitzen entweder rein ovalen oder polygonalen Querschnitt und zwar liegen die eckigen Canäle meist über dem einspringenden Winkel zwischen je zwei der Körnelhufeisen, also in der Verlängerung der Medianebene der Falten, und sind demnach die Fortsetzungen der S. 511 geschilderten, ebenfalls meist kantigen und zwar dreiseitigen Furchencanäle (Taf. II, Fig. 14, 16, 20). Jeder der Canäle ist theilweise erfüllt oder ausgekleidet von schwarzbraunem Eisenhydroxyd, wodurch sich die Grenzlinie des Canallumens nach aussen scharf absetzt. Es zeigt sich hierbei, dass diese Grenze nicht glatt verläuft, sondern dass die periphere Zellenschicht der Canäle, genau wie die Odontoblastenfortsätze in das Dentin, mit kleinsten Zäckchen und Zähnchen in die umgebende klare Grundmasse eingreift. Diese minimalen Vorsprünge laufen in kurze, aber verhältnissmässig derbe und weitläuftig stehende Röhrchen aus, die zwar im Allgemeinen eine radiäre Richtung innehalten, aber sich winkelig biegen, krümmen, verzweigen und kurze Querästchen absenden (Taf. III, Fig. 25 *c*).

In einiger Entfernung von den Canälen zieht sich um deren Mehrzahl eine concentrisch verlaufende Strähne von langgestreckten zerschlitzten, spindelförmigen oder strichelartigen Knochenkörperchen, welche fluidal gruppirt und an ihren Enden oft durch Ausläufer mit einander verwoben sind. Hier und dort liegen zwischen diesen spindelförmigen auch isolirte grössere rundliche Knochenkörperchen mit strahligen Ausläufern eingestreut. Beide stehen zuweilen mit Radiärröhrchen des Gefässcanales in Verbindung.

Durch die unter den Aussenfurchen des Dentins gelegenen Lücken zwischen je zwei Körnelguirlanden zieht sich die Grundmasse der peripherischen Knochenschicht auf der Medianebene der Falten in diese hinein und bildet eine klare, aber noch ausserordentlich fein globuläre Medianzone, welche hier ebenso wie bereits weiter oben im Zahne (siehe S. 511 und Taf. II, Fig. 16) die Röhrchensysteme je zweier Pulpspeichen scheidet und in ziemlich regelmässigen Abständen grosse plump spindelförmige Knochenkörperchen enthält, die jedoch ausnahmslos mit ihrer Längsaxe rechtwinkelig gegen die Medianebene der Falten gerichtet sind (Taf. III, Fig. 25).

Die peripherische Knochenschicht gleicht die Furchen auf der Aussenseite des Dentins vollkommen aus und bedeckt letzteres im

Bereiche des grösseren Zahnsegmentes als derber Ueberzug, verdünnt sich aber gegen das breite Innendrittel des Zahnquerschnittes mehr und mehr, um endlich fast ganz zu verschwinden. Diese Erscheinung erklärt sich aus den Darlegungen auf S. 487, wonach nur die Aussenfläche und die beiden Seitenflächen des Zahnsockels von Cementknochen kragenförmig umwallt werden, während die Gaumenfläche des Sockels unbedeckt bleibt.

Einen sehr klaren Einblick in die Structur der peripherischen Knochenschicht gewährt auch die Taf. II, Fig. 22 abgebildete Partie des um ein Minimum höher gelegenen Querschnittes eines Nachbarzahnes. Die homogene Grundmasse des Knochengewebes hebt sich auch hier haarscharf von der äussersten Körnelguirlande des Dentins (*Dhg*) ab, wird ebenfalls von zahlreichen grösseren und kleineren Gefässcanälen (*c*) durchzogen und enthält ziemlich zahlreiche, z. Th. spindelförmige, z. Th. rundlich zackige Knochenzellen (*kk*), welche sich in Schnüren und Schwärmen fluidal um die Gefässcanäle gruppiren. Von einzelnen der letzteren gehen kurze ästige Ausläufer aus. Die Aussenfurchen des Dentins zwischen den stark gewölbten Körnelguirlanden sind tief eingekerbt. Die in ihnen liegenden Furchencanäle besitzen noch ihre charakteristische dreiseitige Gestalt. Die homogene Grundmasse erstreckt sich in Form eines schmalen Streifens zwar noch weniger tief in die Medianebene der Falten hinein, enthält aber auch hier schon kleinste spindelförmige Knochenkörperchen.

2. Das Dentin (Fig. 24 und 25).

Die Dentinfalten dieses Abschnittes sind, wie bereits constatirt, dick und gedrungen und stellen keine durch geradflächige Wände begrenzten Lamellen vor, sondern erhalten durch beiderseitige, bauchige Ausbuchtungen der Pulpa, namentlich in der centralen Hälfte der Falte, einen plump wurmförmig gekrümmten Querschnitt.

Diese grossen derben Falten alterniren mit viel kürzeren, sich nur wallartig in die Pulpa vorschiebenden, deshalb im Querschnitte wie warzen- oder buckelförmige Einstülpungen erscheinenden Falten, durch welche der peripherische Abschluss der Pulpspeichen eine Einbuchtung, also eine plumpe Gabelung erleidet. Von jedem dieser rund abgestumpften Pulpenden strahlt ein Hauptfächersystem (Fig. 25 *h*) von langen, schlanken Dentinröhrchen aus, dessen radial

gerichtete Röhrchengruppe sich aus anfänglich dicht stehenden Röhrchen zusammensetzt, welche sich nach aussen gabeln und mit diesen ihren peripherischen Aestchen in die schwammig mit einander verwobenen Dentinhöhlen der hufeisenförmigen Körnelguirlanden einmünden, die, wie gesagt, das Dentin in bogig ausgerandetem Kranze von seiner Knochenumwallung scheiden.

Während in den bisher beschriebenen, nächst höheren Abschnitten des Zahnes von jeder Pulpspeiche aus nur ein einziges, einheitliches Fächersystem von Dentinröhrchen ausstrahlt und das zwischen den Medianzonen zweier Nachbarfalten gelegene Radialsegment des Zahnes beherrscht, hat sich diese Einheitlichkeit im Querschnitte 8 bereits verloren. Die Fächersysteme der höheren Niveaus beschränken sich auf die eben beschriebenen, von den abgerundeten Enden der Pulpspeichen auslaufenden Hauptfächer. Neben diesen entspringt jetzt von jeder der tieferen oder flacheren Ausbuchtungen, welche die Seitenflächen der Pulpspeichen in die Falten machen, ein selbständiger Secundärfächer von naturgemäss viel kürzeren Röhrchen (Fig. 25 *s*).

Die nach der Medianzone der Falte gerichteten Röhrchen jedes solchen Secundärfächers münden hier nach gleich langem Verlaufe in ziemlich grosse, oft dicht geschaarte Dentinhöhlen, welche deshalb gerade wie die Körnelguirlanden der Hauptfalten in mehr oder weniger scharf ausgesprochener bogenförmiger Anordnung über jeder Ausbuchtung der Pulpa in den Dentinfalten liegen. Die von der Mitte dieser secundären Fächersysteme nach rechts und links abbiegenden Dentinröhrchen enden meist blind, so dass zwischen je zwei solchen Fächern eine Zone klarer Grundmasse röhrchenfrei verbleibt. In diesen Ein- und Ausbuchtungen der Dentinfalten wiederholt sich also die Structur der Hauptfalten im oberen Theile des Zahnes, was für die später zu erörternde Genesis der Faltenzähne von Bedeutung ist.

Die Röhrchen dieser secundären Fächersysteme haben jedoch nicht wie diejenigen der Hauptpulpspeichen einen geraden, glatten, sondern einen kurzbogig geschlängelten, local geknickten Verlauf, verästeln sich nicht selten in spitzem Winkel und senden stellenweise kurze Querzweige rechtwinkelig nach beiden Seiten ab. Die Dentinhöhlen, in welche sie medianwärts münden, besitzen eine sehr wechselvolle Gestalt und Grösse, sind aber sämmtlich mit zahl-

reichen strahligen Ausläufern versehen und deshalb von zackig zerspratzter Contur. Wo sie gegen das centralwärts gerichtete Ende der Falten hin dichter geschaart liegen, sind sie durch derbe Ausläufer zu Guirlanden verknüpft.

Die Grundmasse des Dentins besitzt ebenso wie weiter oben (S. 509) eine sehr feine Globularstructur, wobei die Zahnbeinkügelchen in der Richtung nach den Seitenrändern jedes Hauptfächersystems an Grösse zunehmen und sich schärfer individualisiren. In Folge dessen grenzt sich die zwischen zwei Fächersystemen von der peripherischen Knochenschicht aus eindringende, nur feinst gekörnelte Medianzone schon durch ihre Structur von jenen ab.

Die Grenze zwischen Pulpa und Dentin erscheint in Folge der in letzteres spitz eingreifenden Odontoblasten unregelmässig höckerig gezähnelt. Oft sieht man diese Fortsätze der letzteren unmittelbar in die Dentinröhrchen auslaufen. Wo diese in Dentinhöhlen einmünden, lässt sich der directe Zusammenhang zwischen letzteren und den Odontoblasten überblicken.

b. Das sich nach innen verbreiternde Segment des Zahnquerschnittes.

Aus Obigem ergab sich u. A., dass in dem nach aussen gerichteten Segmente des Zahnquerschnittes in Folge energischer Dentinabscheidung von Seiten der von den Enden der Pulpspeichen ausstrahlenden Haupt-Röhrchensysteme, die mit einer beträchtlichen Verstärkung der Aussenlage von Cementknochenmasse Hand in Hand ging, ein sehr kräftiger Zahnmantel erzeugt wird, von welchem dicke, gedrungene Falten auslaufen. Ganz anders hingegen gestaltet sich der Zahnbau in der nach innen gewandten, schwach birnförmigen Verbreiterung des Querschnittes (Fig. 24, 26 u. 27). Nach ihr zu verdünnt sich zunächst die selbständige, scharf abgesetzte äussere Cementschicht mehr und mehr, — gleichzeitig wird der aus der bogigen Aneinanderreihung der Faltenbasen gebildete Dentinmantel immer dünner, — die ihn nach aussen abgrenzende Körnelguirlande verschwindet, — Dentin- und Cementmasse verschmelzen in Folge dessen völlig mit einander, — grosse Gefässcanäle stellen sich in und an der Basis der Falten ein und unterbrechen hier deren solide Beschaffenheit, — endlich verlieren die durch solche isolirte Vertical-

canäle spornartig gegabelten Faltenbasen dadurch, dass zwischen ihnen von der Gaumenfläche her Gefässe in die Pulpspeichen eintreten (*hc*), stellenweise ganz ihren gegenseitigen Zusammenhang oder werden nur noch durch ein dünnes Gewebe von an Knochenkörperchen reicher Cementmasse schwach verbunden.

In gleichem Schritte vollzieht sich eine Streckung der Falten, was damit in Zusammenhang steht, dass der Zahn auf einer schrägen, nach innen geneigten Basisfläche sitzt und deshalb die nach dem Innenrande des Kiefers verlaufende Sockelflanke und ihre Falten tiefer hinabsteigen, als auf der entgegengesetzten Aussenseite (S. 487). In Folge dessen werden die Falten in dieser Richtung, also nach der birnförmigen Abplattung des Zahnquerschnittes zu, immer länger und schmäler, zugleich aber auch schlanker, und erreichen schliesslich fast die doppelte Länge der derben, plump wurmförmig gekrümmten Falten im gegenüberliegenden Segmente, bei kaum mehr als halber Dicke der letzteren. Ihr Verlauf ist kein vollkommen geradliniger, macht vielmehr schwache Krümmungen und Ein- und Ausbiegungen, jedoch bei weitem nicht in dem Maasse, wie dies bei den kurzen, gedrungenen Falten die Regel ist. Die niedrigen Faltenwälle, welche im anderen Segmente des Querschnittes mit den plumpen, längeren Falten regelmässig alterniren, sind verschwunden, vielmehr reichen fast sämmtliche Falten gleichweit bis zur Mitte des Pulpkegels. Nur an zwei Stellen schieben sich zwischen die neun langen schlanken Falten solche von eben derselben Schlankheit, aber von nur etwa einem Drittel deren Länge ein.

In dem Aufbau dieser Falten und zwar besonders in der centralwärts gerichteten längeren Hälfte jeder derselben macht sich z. Th. ausserordentlich scharf eine Gliederung in eine Mittelzone und je zwei auf diese symmetrisch folgende seitliche Zonen bemerklich.

Die Mittelzone (Fig. 26 und 27 *e*) besteht meist aus vollkommen klarer, aber feinst globulirter Grundmasse, welche sich von der Peripherie des Zahnes aus als schmaler Streifen in die Falte hineinzieht. Sie enthält in weiten, ziemlich regelmässigen Abständen sich wiederholende, sehr grosse Knochenkörperchen oder verschmolzene Gruppen von solchen, die sämmtlich mit ihrer Längsausdehnung quer zu derjenigen der Mittelzone gestellt sind (Fig. 26 und 27 *kk*). In dieser Ausbildungsweise erstreckt sich letztere ununterbrochen durch

die ganze Länge der Falten bis zu derem centralen Ende, wo sich die Knochenkörperchen zu mehren und anzuhäufen pflegen. In einzelnen Falten ist die Continuität dieser homogenen, deshalb klaren Mittelzone mehrfach durch reichlichere Knochenkörperchen oder durch Einschnürungen von Seiten der Nachbarzonen unterbrochen.

Beiderseits und zwar meist sehr scharf wird die Mittelzone begrenzt von einem Saume dicht geschaarter, kleinster, complicirt geschlitzter, z. Th. durch anastomosirende Ausläufer verketteter Dentinhöhlen, die sämmtlich nach der Medianzone zu blind enden, nach aussen aber zackig-strahlige Fortsätze entsenden, in deren jeden ein Dentinröhrchen ausläuft (Fig. 26 und 27 $o + Dr + Dh$).

Auf diesen Saum von Dentinhöhlen folgt aussen eine Zone von Röhrchendentin, bestehend aus stark vorwiegender, homogen erscheinender, keine Globularstructur aufweisender Grundmasse mit weitläuftigen, wegen der geringen Dicke der Dentinschicht nur kurzen Dentinröhrchen. Dieselben bieten ein ganz anderes Bild als die beschriebenen Fächersysteme der kräftigen Falten; — sie sind trotz ihrer geringen Länge gekrümmt, geknickt, stumpf und spitz gegabelt, mit Dornen und kleinen Querästchen zuweilen dicht besetzt und nicht selten mit diagonalen Verbindungszweigen versehen (Fig. 27 *Dr*). In Folge des Mangels tieferer Einbuchtungen der Pulpspeichen in die schlanken Falten gelangen die S. 517 beschriebenen secundären Fächersysteme (Fig. 26 *s*) nur hier und dort und dann nur schwach zur Ausbildung. Abgesehen von solchen Stellen stehen die Röhrchen rechtwinkelig auf den Seitenflächen der Falten und erstrecken sich bis zu dem Saume von Dentinhöhlen, in deren Ausläufer sie unter gleichzeitiger Zunahme ihrer Dicke einmünden.

Die Wandungen der Falten werden bedeckt von einer Lage von Brauneisen, welche die Schicht der Odontoblasten ersetzt, deren Enden in die Grundmasse des Dentins eingreifen, dadurch die Feinzackigkeit seiner Aussengrenze hervorrufen und in die Dentinröhrchen auslaufen. Auf diese Weise wird auch hier ein directer continuirlicher Zusammenhang zwischen den Odontoblasten und den Dentinhöhlen des Körnelsaumes durch die Dentinröhrchen vermittelt.

Die gracilen Haupt-Fächersysteme, welche wir bisher von den Enden aller Pulpspeichen ausstrahlen sahen, sowie die sie abschliessenden hufeisenförmigen Dentinhöhlenguirlanden sind gänzlich

verschwunden. Die basalen, also peripherischen Verbindungsstücke zwischen einzelnen der Falten weisen vielmehr nur kurze, spärliche, in ihrem unregelmässigen Verlaufe an die Primitivröhrchen der Gefässcanäle erinnernde Röhrchen ohne Körnelguirlanden auf. In Folge dessen ist der charakteristische Habitus des Röhrchendentins hier vollständig verloren gegangen.

Die peripherischen Verticalcanäle werden umgeben von einer Zone von homogener Grundmasse und diese von einem Kranze z. Th. spindelförmiger Knochenkörperchen (Taf. III, Fig. 24 *OD*; Fig. 26*c*). Von der Zellenschicht, welche die Gefässcanäle auskleidet, laufen unregelmässig gruppirte und gestaltete Röhrchen in die umgebende homogene Grundmasse und können z. Th. bis zur Einmündung in Zellen der Knochenkörperchenkränze verfolgt werden. Wo letztere nicht dicht geschlossen sind oder stellenweise ganz aussetzen, erscheint die Grundmasse um die Gefässcanäle und diejenige des benachbarten Dentins als eine vollkommen einheitliche Substanz (Fig. 24 *OD*; Fig. 26). Auch die Dentinröhrchen haben meist, wie soeben constatirt, ganz die Form der Primitivröhrchen angenommen, stehen nur noch etwas dichter als diese, so dass hier ein Unterschied zwischen Knochenmasse und Dentin kaum mehr wahrzunehmen ist und sich verticale Gefässcanäle und Pulpspeichen gleichwerthig verhalten.

In der sich verbreiternden Basis mancher Falten gabelt sich deren Medianreihe von Knochenkörperchen in zwei divergirende Strähnen (Fig. 26), welche mit der Knochenkörperchenguirlande um die peripherischen Gefässcanäle verfliessen, — mit anderen Worten, die Knochenkörperchen, welche die unter den Faltenbasen gelegenen Verticalcanäle umkränzen, ziehen sich hier schweifartig in die Medianzone der Falten hinein.

Die sämmtlichen letzterwähnten Erscheinungen beweisen, dass in diesem, dem Zahnsockel angehörigen Segmente nicht nur eine innige Verzahnung zwischen Cementknochenmasse und Dentin stattfindet, sondern dass sich eine Verschmelzung beider Zahnelemente zu einer untrennbaren Substanz (Osteodentin) anbahnt, — ein Vorgang, der in den nächst tieferen Querschnitten noch vollkommener zum Vollzuge gelangt.

Querschnitt 9 (Tafel III, Figur 28; nebst Figuren 29 und 30 auf Taf. IV).

Im nächst tieferen Querschnitte 9, der einem etwas kleineren Nachbarzahne entnommen ist, sind die Falten noch weiter nach der Mitte zu eingedrungen und lassen nur einen kleinen Centralkern der Pulpa unberührt, haben diese vielmehr zum grössten Theile in lange, z. Th. wurmförmig gekrümmte Radiärspeichen zerschlitzt. Aber auch jetzt noch macht sich, wenn auch nicht mehr in gleich hohem Maasse wie im Querschnitte 8, der Gegensatz zwischen einem grösseren Segmente mit kürzeren, plump wurmförmig gekrümmten Falten und einem Gaumen-Abschnitte mit längeren, schlankeren Falten bemerklich, die ersteren mit, die letzteren ohne gesonderte Hüllschicht von Cementknochen. Anderseits aber gelangt die fortschreitende Entwicklung dieses letzteren auf Kosten des normalen Dentins der oberen Zahnpartie, die innige Verflössung desselben mit dem hier im Zahnsockel bereits modificirten Dentin noch mehr wie im nächst höher gelegenen Querschnitte zur Geltung. Namentlich offenbart sich dies in dem äusseren mit kürzeren, unregelmässig gewundenen Falten ausgestatteten Querschnittssegmente.

a. Das äussere Zahnsegment.

Dieses etwa zwei Drittel des Zahnquerschnittes in Anspruch nehmende Segment besteht aus Dentinfalten, die mit ihren Basen in jener Mantelschicht von Cementgewebe wurzeln, welches, wie bereits S. 487, 516 und 518 erörtert, die nach aussen und nach beiden Seiten gewandten Flächen des Zahnsockels umwallt.

Die Dentinfalten dieses Abschnittes haben nicht sämmtlich die gleiche Länge, vielmehr wechseln längere mit kürzeren, z. Th. nur wallartig vorspringenden Falten in ziemlich regelmässiger Alternirung ab. Vorzüglich an den längeren derselben machen sich folgende Erscheinungen geltend: 1) sie haben ihren geradlinigen Radiärverlauf verloren, sich wurmförmig gekrümmt und pflegen sich an ihrem centralen Ende knopfartig zu verdicken, schwanenhalsähnlich umzubiegen oder beiderseits auszubreiten, wobei diesen Fortsätzen augenscheinlich die Tendenz innewohnt, sich mit denen der Nachbarfalten zu vereinigen; — 2) ebenso entwickeln die Falten, namentlich nahe

ihrer peripherischen Basis plumpe, meist stumpf endende Ausläufer, welche bestrebt sind, die Enden der Pulpspeichen zu selbständigen Verticalcanälen abzuschnüren; — 3) gleichzeitig stellen sich innerhalb einzelner der knopfartig verdickten Faltenenden unregelmässige Verticalcanäle ein; — 4) ebensolche rücken von der Peripherie aus in die sich verbreiternden Faltenbasen hinein. In allen diesen Wachsthumserscheinungen der Falten offenbart sich die Bestrebung der, wenn auch bereits randlich in Speichen zerlappten, so doch bis dahin einheitlichen Pulpa, sich im Zahnsockel in eine Anzahl von Einzelpulpen aufzulösen. Gleiches giebt sich darin kund, dass im centralen Pulpkerne die oberen Enden stab- oder lattenförmig emporsteigender Lamellen von Knochenmasse sichtbar werden.

Hand in Hand und in gleicher Richtung hiermit gehen gewisse Aenderungen in der Structur des Faltendentins und in seinem Verhalten zum peripherischen Knochengewebe. Besassen im Querschnitte 8 die kurzen, plumpen Falten mit Ausnahme ihrer Medianzonen noch durchaus echte Dentinstructur mit ausserordentlich gracilen Röhrchenfächern, die nach aussen in dichte Dentinhöhlenguirlanden auslaufen, welche wiederum eine scharfe Grenze gegen die knöcherne Hüllschicht bilden, — so sind diese Falten in dem nächst tieferen Querschnitte 9 aller dieser typischen Eigenthümlichkeiten verlustig gegangen. An die Stelle der dicht neben einander glatt verlaufenden Dentinröhrchen, welche sich gesetzmässig zu Haupt- und Nebenfächern gruppiren, sind jetzt auch in diesen kürzeren, gekrümmten Falten (Fig. 29) kurze, weitläuftige, wellig gekrümmte, winkelig geknickte Röhrchen mit z. Th. fast rechtwinkelig ablaufenden Querästchen getreten, während zugleich die grossen Röhrchenfächer zwischen den Faltenbasen und mit ihnen die Hufeisen von schwammig-verfilzten Dentinhöhlen gänzlich verschwunden sind. Schon hierdurch erhalten jetzt auch die kürzeren Falten den neutralen Habitus der langen, schlanken Falten des kleineren Segmentes, wie sie uns zuerst im Querschnitte 8 begegneten (vergl. Fig. 26).

Der im Vergleiche mit dem etwas höher gelegenen Querschnitte verhältnissmässig dünne Mantel, in welchen die Basen dieser Falten verfliessen, besteht aus Cementknochen, durchzogen von zahlreichen, vertical aufsteigenden Gefässcanälen von kreisrundem, ovalem, zuweilen abgerundet polygonalem Querschnitt und sehr verschieden

grossem Durchmesser (Fig. 28 und 29 *c*). Jeder dieser Canäle wird zunächst von einer mehr oder weniger dicken, schwarzbraunen Lage von Eisenhydroxyd ausgekleidet. Dann folgt eine Zone klarer, homogener Grundmasse, — auf diese endlich eine bald magere und zerrissene, bald volle Guirlande von Knochenkörperchen. Durch diese werden die klaren Höfe der Nachbarcanäle gegen einander abgegrenzt, zwischen denen sie sich als polygonales Maschenwerk von stacheligen Strähnen hindurchwinden. Von der durch Zellenfortsätze fein gezähnelten Peripherie der Canäle laufen feine Radiärröhrchen aus, die sich in keinerlei Weise von den kurzen, weitläuftigen Röhrchen des Faltendentins unterscheiden. Wo sich ihr voller Verlauf verfolgen lässt, münden sie in Knochenkörperchen der die Canäle umziehenden Kränze.

Je ein solcher, meist verhältnissmässig grosser Verticalcanal mit Radiärröhrchen liegt an der Basis jeder Falte. Von ihm aus stülpt sich die ihn umgebende klare Cementgrundmasse nebst ihrem Knochenkörperchenkranze schweifartig in deren Medianebene (Taf. III, Fig. 28 und Taf. IV, Fig. 29).

Namentlich an kürzeren Falten beobachtet man, dass die von den Enden der Pulpspeichen auslaufenden, weitläuftigen Dentinröhrchen direct in den Knochenkörperchenkranz der Verticalcanäle an der Basis der Falten einmünden. Da ausserdem, wie bereits constatirt, mit den Röhrchenfächern zugleich die das Dentin von der peripherischen Knochenschicht abgrenzenden Dentinhöhlenguirlanden verschwunden sind, — da ferner auch die Knochenkörperchen in der Medianzone der Falten durch Fortsätze mit den Dentinhöhlen und von diesen aus durch Dentinröhrchen mit der Pulpa in Verbindung stehen, — und endlich die von den Canälen der Cementknochenschicht ausstrahlenden Röhrchen denen des Faltendentins vollkommen gleichen, so hat die Möglichkeit aufgehört, Dentin und Cementknochen scharf von einander abzugrenzen. Beide erscheinen als innig verflösste Modificationen einer einheitlichen Masse.

b. Das innere, mit längeren, schlankeren Falten ausgestattete Zahnsegment.

Die Falten dieses Theiles des Zahnquerschnittes gleichen durch ihre Länge und Schlankheit, sowie durch die schwachen, unregel-

mässigen Krümmungen ihres Verlaufes, ebenso aber auch in ihrer inneren Structur in hohem Grade denen des entsprechenden Segmentes im nächst höheren Querschnitte 8. In letzterer Beziehung theilen sie mit diesen, zugleich aber auch mit den Falten des eben beschriebenen Abschnittes zunächst ihre Zusammensetzung aus einer Medianzone von klarer Grundmasse mit einer Reihe von grossen, meist quergestellten Knochenkörperchen, ferner aus je einer beiderseitigen Schicht von lamellar aufgebautem, fein globulärem Dentin mit weitläuftigen, kurzen, gewellten und sich verzweigenden Röhrchen, welche in je eine das Dentin gegen die Knochenmasse abgrenzende Reihe kleinster, aber morgensternartig in Fortsätze auslaufender Dentinhöhlen münden. Besonders scharf halten sich diese drei Zonen in den etwa die halbe Länge ihrer Nachbarn erreichenden Falten getrennt und ziehen sich innerhalb dieser in vollständigster Parallelität bis zu derem rundlich abgestumpften centralen Ende (Fig. 30 *e* + *kk* und *Dr* + *Dh*). Sobald sich aber die Falten weiter nach der Mitte zu vorschieben, beginnen sich die beiden seitlichen Dentinhöhlenreihen einander und der medianen Knochenkörperchenschnur in spitzem Winkel zu nähern, um zu einer einzigen einheitlichen Strähne von grösseren und kleineren Höhlen zu verfliessen (Fig. 28). Diese verläuft bis in das schwach knopfartig verdickte Faltenende und bläht sich hier zu einem rundlich conturirten Haufen von verhältnissmässig grossen Höhlen auf, in welche die kurzen Dentinröhrchen von der Pulpa her einmünden. Sind die Faltenbasen gut erhalten (Fig. 30), so lässt sich die mediane Knochenkörperchenreihe bis in diese verfolgen, wo sie sich spornartig gabelt und den dort liegenden verticalen Gefässcanal kranzartig umzieht, sich mit anderen Worten von diesem aus schweifartig in die Falten ausgezogen hat. Gleichzeitig verschwinden hier an der Faltenbasis die Dentinröhrchen und Dentinhöhlen gänzlich oder fast vollständig und machen klarer, von Gefässcanälen durchsetzter und von Knochenkörperchen durchzogener Cementknochengrundmasse Platz, welche nun als schmale Brücke die einzelnen Faltenbasen mit einander verbindet. Endlich senden die Falten hier und dort nahe ihrem basalen Ende breite Querlamellen ab, durch welche peripherische Theile der Pulpspeichen ganz abgetrennt und zu Verticalcanälen isolirt werden (Fig. 30 *c*).

Also auch in diesem Segmente des Zahnquerschnittes gelangt

die Tendenz zur Verwischung der Unterschiede von Dentin und Knochenmasse auf Kosten des ersteren, sowie zur Zergliederung der Pulpa in verticale Einzelcanäle bereits mehr zur Herrschaft, als in dem entsprechenden Theile des nächst höheren Querschnittes.

Querschnitt 10 (Tafel IV, Figur 31; nebst Fig. 32, 33, 34, 35 und 36).

Dieser Dünnschliff durchschneidet einen Zahn an seiner Basis. Der etwas weiter oben im Zahne noch herrschende streng radiäre Faltenbau, welcher aber bereits im Querschnitte 9 durch Krümmungen, Umbiegungen und Querfortsätze der Falten eine Trübung seiner Reinheit erlitt, ist jetzt verschwunden und nur noch dadurch schwach angedeutet, dass die von der Peripherie ausgehenden Falten, wenn auch in starker Verkürzung und in wurmförmig gekrümmtem Verlaufe, eine gewisse Radiärtendenz bewahren, d. h. nach innen streben. Zugleich zeigt sich der gesammte Kern der Pulpa von einem complicirten Fachwerke gewundener, sich ästig gabelnder Scheidewände durchsetzt, welche ihn seiner Einheitlichkeit vollkommen berauben.

Die Falten sind kurz, plump, wurmförmig oder knorrig, enden nach innen abgerundet oder mit verdickten Knöpfen und senden seitliche Querwände aus, durch welche sie mit einander in Verbindung treten können und wodurch grössere Partien der Pulpa abgeschnürt werden. Ausserdem ziehen sich in ihrer Masse selbst Gefässcanäle von geringerem Durchmesser empor (Fig. 31). Besonders ist die durch Verschmelzung der Faltenbasen erzeugte Randzone reich an solchen Verticalcanälen, welche dann oft eine spornartige Gabelung der Faltenbasen bewirken. Ueberhaupt vereinigen sich letztere nicht mehr zu einer einheitlichen Mantelschicht.

Der Raum innerhalb dieses peripherischen Systemes von deformirten Falten wird von einem sich an dasselbe direct anschliessenden krausen Fachwerke von Verticalwänden durchsetzt, deren Querschnitte noch mehr wurmförmig gekrümmt und mäandrisch gebogen sind, als diejenigen der Falten, und sich ausserdem in spitz- oder rechtwinkelig ablaufende Verticallamellen gabeln, plumpe Verdickungen und kurze Querfortsätze aufweisen, mit hakigen Umbiegungen und knopfartigen Verdickungen enden und häufig schwache, nicht selten aber auch stärkere Verticalcanäle umfassen (Fig. 31, 32 und 33).

Durch dieses centrale Fachwerk und jene mehr randlichen Falten erscheint die gesammte Pulpmasse hier an der Zahnbasis in ein Bündel von verticalen Canälen mit höchst unregelmässigem Querschnitt zerspalten. In der Gesammtheit der Wandungen dieser Canäle hat sich gleichzeitig der Uebergang des Dentins in Cementknochenmasse durch das Mittelglied des Osteodentins[1]) vollzogen.

Der histologische Bau dieser Falten und der das Fachwerk bildenden Verticallamellen ist der gleiche (siehe Fig. 32 und 33). Die Grundmasse derselben besteht aus klarer, feinst globulirter Knochensubstanz, in welcher hier und dort eine schlierige, den Gefässcanälen conforme Parallelstructur zum schwachen Ausdruck gelangt. In dieser Grundmasse liegen und zwar stets in der Medianebene der Falten und Verticalwände zahlreiche Knochenkörperchen von zwiefacher Gestalt. Die einen bei Weitem kleineren (Fig. 36) sind strichel- oder spindelförmig mit sich zuschärfenden beiderseitigen Enden und kurzen, sehr zarten Fortsätzen, welche meist von deren Breitseiten ablaufen. Die anderen, viel voluminöser als jene, besitzen unregelmässig sternartige, dendritisch zerschlitzte, zackig-spratzige Gestalt und senden derbe und feine Ausläufer nach allen Seiten aus. Diese Knochenkörperchen liegen nun (siehe Fig. 32 und 33) entweder isolirt und durch bald grössere, bald geringere Zwischenräume getrennt, in der Medianebene der Lamellen von klarer Grundmasse, oder sie bilden namentlich in den Verdickungen der Wände oder in deren knopfartig aufgeblähten Enden haufenförmige Gruppen, oder endlich vereinigen sich in dichter oder weitläuftiger Vergesellschaftung zu Strähnen und Guirlanden, in denen die schlank spindelförmigen Höhlen stets eine fluidale Stellung inne haben.

Die Oberfläche des unregelmässig grobmaschigen Fachwerkes von Falten und Scheidewänden ist überzogen von einer Brauneisen-

---

1) Bezüglich des histogenetischen und histologischen Verhaltens des Zahnbeins zum Knochen hat sich besonders bestimmt neuerdings C. Röse dahin ausgesprochen, dass »die Bildung von Knochen und Zahnbein principiell auf ganz gleichen Vorgängen beruht«, »beide nur Modificationen derselben Gewebsgattung« vorstellen, »zwischen beiden alle möglichen Uebergänge sich finden (sog. Osteodentin)« und endlich »das Dentin gleichsam ein höher differenzirtes Knochengewebe sei«. C. Röse, Anat. Anzeiger. VII. 1892. S. 834 und 835; VIII. 1892. S. 86; ferner VIII. 1893. S. 569. — Vergl. auch H. Klaatsch, Morphol. Jahrb. XVI. 1890. S. 238 u. f.

schicht, welche nach innen zu, also gegen die klare Grundmasse in Gestalt kleinster spitzer Höcker und feinster Zäckchen eindringt und von diesen Mikrofortsätzen aus in Canälchen ausläuft; sie repräsentirt also die durch Eisenhydroxyd ersetzte Odontoblastenlage (Fig. 32 und 33 *o*). Die von ihr ausgehenden Röhrchen (Fig. 35 *Dr*) sind jedoch noch viel sparsamer geworden und stehen noch lückenhafter als selbst im nächst höheren Querschnitte 9, ja können in der Schliff-fläche streckenweise ganz fehlen (Fig. 32), während anderseits auch die Unregelmässigkeit ihres Verlaufes beträchtlich zugenommen hat. Nicht selten jedoch sieht man sie in die wurzelartigen Fortsätze der grossen median gelegenen Knochenkörperchen einmünden (Fig. 35 *kk*).

Der Zahn besitzt nach allem Obigen an seiner Basis die als Osteodentin bezeichnete Ausbildungsweise, indem er sich hier in eine Anzahl von Einzelpulpen gliedert, deren Wände aus klarer dichter Grundmasse mit spärlichen Dentinröhrchen, zahlreicheren Knochen-körperchen und schwach angedeuteter Lamellarstructur bestehen.

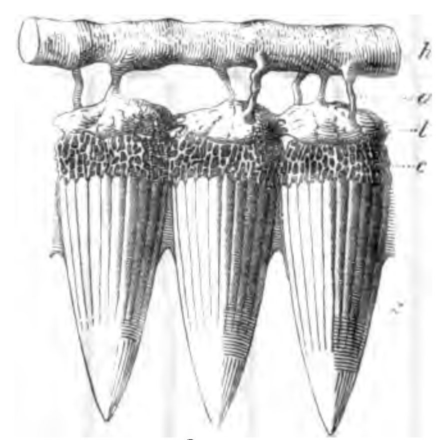
Die durch Brauneisen ersetzte und dadurch scharf markirte Odontoblastenlage umkleidet aber nicht nur die Umrisse der Falten und der Verticalwände, sondern scheint sich auch von diesen zu trennen, indem sie das Lumen der grossen, unregelmässig conturirten Canäle selbständig durchquert (Fig. 32, 33 und 34 *br*). Diese Brücken zwischen benachbarten Knochenwänden verbinden entweder die haken-förmig umgebogenen oder keulig verdickten Enden der letzteren oder laufen von einer Seitenfläche dieser Lamellen zur gegenüberliegenden Wand oder zu derem Kopfende. In ihre Ausgangsstellen pflegen sich keilförmige oder jochartige Ausstülpungen der knöchernen Scheide-wände mehr oder weniger tief einzuschieben (Fig. 33 und 34).

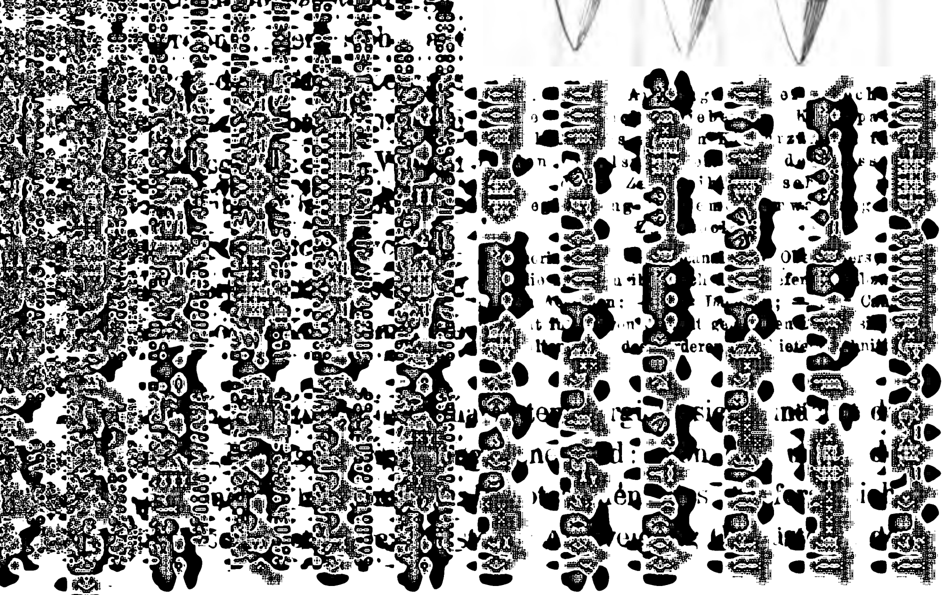
Diese Erscheinung beruht darauf, dass der Dünnschliff die oberen Ränder von aus der Tiefe, also aus der Cementbasis des Zahnes emporreichenden Querwänden berührt oder theilweise schneidet, welche dort die Pulpmaschen in die von den Gefässcanälen des Kiefers auslaufenden Canäle der Basisschicht zerlegen. Ueberall, wo der obere Rand einer solchen neuen Scheidewand unmittelbar unter dem Dünnschliffe liegt, fällt die denselben überkleidende Odonto-blastenschicht in die Fläche des letzteren und gelangt als »Brücke« zur Erscheinung, — dort aber, wo die Wände bereits etwas höher emporreichen, werden zugleich deren höchste Stellen geschnitten

... zapfenartigen Vorsprünge oder
...ntoblastenbrücken.

...ischen Kiefer und Zähnen.

...beschriebenen zehn Querschnitte
...ieferzähne von Sclerocephalus liess
...von ihrer Spitze bis zum Sockel
...tiefer aber, also an der eigent-
...s mit dem zahntragenden Knochen,
...nnschliffe anzufertigen, auf, weil
...haupt, dann nur so weit erhalten
...in der schützenden Gesteinsmasse





Richtung auf den zahntragenden Kieferrand ab, blähen sich in dessen vorderer Hälfte, wo die Zähne am grössten werden und am dichtesten stehen, alle in gleichem Niveau zu geräumigen Lacunen auf, von denen jedesmal eine Anzahl seitlich mit einander zu Lacunengruppen verschmelzen, in deren kugelig-warzenförmiger Oberflächengestaltung sich die zur Vereinigung gelangten Einzellacunen wiederspiegeln. Die Gesammtheit dieser Lacunengruppen liegt in der Längsaxe des Kieferrandes. Von der Unterseite jeder derselben entspringt ein wirres Maschengeflecht von sich krümmenden, verästelnden und anastomosirenden feinen Canälchen, welche nach der Zahnbasis zu eine schwache Radiärtendenz verfolgen und sich auf diese Weise den einzelnen Pulpspeichen zutheilen, in welche sie auslaufen. Sobald die Zähne weiter nach hinten kleiner und weitläuftiger werden, vermindert sich das Volumen der Lacunen, bis etwa im hintersten Drittel des Kiefers die senkrecht von dem mächtigen Hauptstrang des horizontalen Gefässsystemes abzweigenden Aestchen sich direct in das schwammige Geflecht von feinsten Canälchen auflösen. Das von diesen letzteren dicht durchzogene Cementknochengewebe, durch dessen Vermittlung die Verschmelzung der Zähne mit dem maxillaren Dermalknochen bewirkt wird, umwallt nun von dieser Basisschicht aus den Zahnsockel kragenförmig und greift als sich nach oben verdünnende Hüllschicht und deren speichenartige Einstülpungen bis fast zur Zahnspitze hinauf.

3. Ueber das Cement.

Von allen Elementen, die sich am Aufbau der fossilen Faltenzähne betheiligen, ist das »Cement« das umstrittenste, — ist doch diejenige Knochenmasse, welche wir im Vorstehenden als solches bezeichnet haben, von den betheiligten Autoren bald für Schmelz, bald für Dentin angesprochen, oder aber nach seiner Natur unentschieden gelassen und als »heller Saum« gekennzeichnet, endlich von Wenigen wirklich als Cement anerkannt worden.

In ihrer Osteologie von Loxomma Allmanni[1]), einem grossen

1) D. EMBLETON and TH. ATTHEY, On the Skull &c. of Loxomma. Ann. and Mag. of Nat. Hist. London 1874. Nr. 79. S. 38.

Stegocephalen aus dem englischen Carbon, beschreiben Embleton und Atthey S. 54 u. f. (mit Fig. 4—6, Taf. VII) die klare Hüllschicht der Zähne dieses Lurches und deren beiderseits von den Schenkeln des granular layer (unserer Dentinhöhlenguirlanden) begleitete Einstülpungen in die Medianzone der Falten. Diese Darstellungen stimmen durchaus mit den von uns an Sclerocephalus constatirten Thatsachen überein, nur glauben Embleton und Atthey zu beobachten, dass ein Theil der Dentinröhrchen sowohl durch die Hüllschicht, als durch die central bands hindurchsetzen und halten deshalb beide für Dentin (external layer of dentin and infolded external layer), während von Cement nichts zu bemerken sei. Diejenige Aussenschicht von an Gefässcanälen reichem Knochengewebe, die wir bei Sclerocephalus in diese klare Hüllschicht übergehen sahen, ist jedoch auch bei Loxomma vorhanden, schiebt sich hier ebenso in die Aussenfurchen keilartig ein und würde von uns, zusammen mit den central bands, zu welchen sie sich augenscheinlich auch hier in die Falten fortsetzt, als Cement bezeichnet worden sein.

Im Gegensatze zu Embleton und Atthey nennt A. Fritsch[1]) die Einstülpungen der böhmischen Loxommazähne geradezu »Schmelzfalten«. Auch die dünne Hüllschicht des Zahnes von Dendrerpeton und von Gaudrya[2]) und die tiefen Einstülpungen derselben in die Mitte der Dentinfalten werden von A. Fritsch ganz direct für Schmelzsubstanz angesprochen, ohne dass jedoch deren wirkliche Schmelznatur irgendwie begründet werden konnte. Wohl aus letzterem Grunde sagt A. Fritsch in der weiteren Fortsetzung seines Werkes bezüglich der nämlichen hellen Aussenschicht der Zähne von Nyrania[3]) vorsichtiger, dass sie »vielleicht dem Schmelz des normalen Zahnes entspreche«, ferner von dem gleichen, tief in die labyrinthisch gewundenen Falten eingreifenden klaren Saum der Zähne des ebenfalls permischen Macromerion[4]), »ob derselbe dem Schmelz entspricht, ist schwer nachzuweisen«, diese Entscheidung sei vielmehr »den speciellen Zahnhistologen zu überlassen«. Die »netzförmige

1) Fauna d. Gaskohle u. d. Kalksteine der Permformation von Böhmen. B. II. Prag 1885. S. 16, Textfigur 124.

2) l. c. S. 8 (Taf. 51, Fig. 8) und S. 32 (Taf. 61, Fig. 3).

3) l. c. S. 34 (Taf. 63, Fig. 11, 15 u. 16).

4) l. c. S. 38 (Taf. 67, Fig. 4 u. Taf. 70, Fig. 5).

Zeichnung« dieser Zahnsubstanz (Textfigur 140, S. 49) soll nach A. Fritsch »auf Querschnitte der Säulen des Schmelzes hindeuten«, die man sich dann freilich nicht horizontal liegend, sondern vertical stehend zu denken haben würde. Nach der citirten Abbildung scheint mir vielmehr in jener »netzförmigen Zeichnung« eine ganz typische Globularstructur wiedergegeben zu sein, wie sie auch theilweise dem Cemente von Sclerocephalus eigen ist (siehe S. 512).

Dahingegen spricht sich L. von Ammon in seiner Beschreibung der Pfälzer Macromerion-Zähne[1] gegen die Schmelznatur der Aussenschicht und ihrer Einfaltungen aus, rechnet sie vielmehr dem Cement zu.

Was die Faltenzähne der triadischen Labyrinthodonten betrifft, so ist deren complicirte Structur bekanntlich zuerst von Owen[2] an den Zähnen von Labyrinthodon Jaegeri (= Mastodonsaurus giganteus Jaeg.) klargelegt worden, wobei derselbe die hier in Frage kommenden Zahnelemente als Cement auffasst. Dasselbe überziehe als sehr dünne Lage die Aussenseite des Zahnes, von welcher Duplicaturen in die Falten des Zahnes eindringen und hier die einzelnen Dentinsysteme von einander abtrennen und überkleiden.

Während in späterer Zeit K. von Zittel dieser Deutung sich anschliesst[3], erfuhr dieselbe von anderer Seite Widerspruch. So leugnet u. A. Tomes[4] auf das bestimmteste die Betheiligung von Cement am Aufbau der Faltenzähne, hält vielmehr die Aussenschicht und deren Einfaltungen für Dentin. Er fusst dabei namentlich auf der Thatsache, dass die als Cement bezeichnete Substanz, wo sie zugleich mit dem Schmelz am Aufbau des oberen Zahnabschnittes theilnimmt, unter dem Schmelz liegt, während das Cement über dem Schmelz liegen müsse. Dieser Einwurf entbehrt deshalb der Berechtigung, weil Cement und Dentin der Faltenzähne nichts sind als durch Uebergänge und Verflössungen verbundene Differenzirungen eines entodermalen Knochengewebes und deshalb die Stellung dieses

---

1) L. v. Ammon, Die permischen Amphibien der Rheinpfalz. München 1889. S. 98 u. 99.

2) R. Owen, Odontography. London 1840—45. S. 202 u. f.

3) K. v. Zittel, Handbuch der Paläontologie. III. München 1887—90. S. 359.

4) Ch. S. Tomes, Manual of dental Anatomy. 3. Aufl. London 1889. S. 87.

Cementes zum epithelialen Schmelz die gleiche ist, wie diejenige des Dentins.

In neuester Zeit hat Eberhard Fraas in seinem Werke: »Die Labyrinthodonten der schwäbischen Trias«[1]) die Histologie triadischer Faltenzähne auf S. 58—67 nochmals sehr eingehend behandelt und durch die Abbildungen auf Taf. XVIII vortrefflich illustrirt. Seine Resultate lassen sich, soweit sie sich auf das Cement der Kieferzähne von Mastodonsaurus, dem Hauptrepräsentanten der triadischen Stegocephalen, beziehen, in Folgendem wiedergeben. Das Cement umzieht als peripherische Lage das Dentin. Stellt dasselbe im oberen Theile des Zahnes »gewissermassen eine Verunreinigung des randlichen Dentins« vor, so erlangt es im unteren Abschnitte des Zahnsockels den Charakter eines Knochengewebes mit zahlreichen, regellos eingestreuten Knochenkörperchen. Ebenso wie die randliche Umwallung, so bildet dieses Cement auch die Basis, auf welcher der Zahn wurzelt, und zugleich auch die Füllmasse zwischen den Sockeln jeder Zahnreihe. Von der Peripherie und der Basis des Zahnes aus dringt diese Cementsubstanz in die Falten und zwar zwischen je zwei Systeme von Dentinröhrchen ein und bildet in der Faltenmitte eine sehr zarte Lage von gekörneltem Aussehen und im untersten Abschnitte des Zahnes mit Knochenkörperchen. Innerhalb des Cementes der Zahnbasis treten local zahlreiche Dentinröhrchen auf, wodurch dasselbe an solchen Stellen den Charakter des Dentins erhält.

Man sieht, die Natur und das Verhalten des Cementes im Zahne von Mastodonsaurus aus dem Keuper Schwabens ist das gleiche wie in demjenigen des geologisch viel älteren Sclerocephalus aus dem Perm Sachsens mit dem Unterschiede, dass die Betheiligung des Cementes am Aufbau der Zähne dieses letzteren, und zwar namentlich an demjenigen ihrer Falten, eine weit grössere ist und dass Cement und Dentin im Zahnsockel von Sclerocephalus inniger zu einer viel primitiveren Zahnsubstanz verflösst sind.

Reducirt sich das Cement in dem von mäandrisch gewundenen Dentinfalten erfüllten Kieferzahne von Mastodonsaurus und zwar sowohl in dessen Umrandung, als in der Medianzone der Falten, auf eine sehr zarte Lage, so gestalten sich (siehe l. c. S. 65) diese Ver-

---

1) Palaeontographica XXXVI. Stuttgart 1889.

hältnisse in den Palatinzähnen durchaus anders. In ihnen gelangt im Gegensatze zu der echten Labyrinthstructur der Kieferzähne ein »alterthümlicher Typus« dadurch zum Ausdrucke, dass sie nicht mäandrischen, sondern einfachen radiärfaltigen Aufbau besitzen. Auch bei ihnen bildet das Cement eine peripherische Lage mit Einstülpungen in die wellig gebogenen Falten, erlangt jedoch hierbei eine viel mächtigere Entwicklung. In beiden Richtungen nähern sie sich den Kieferzähnen des paläozoischen Sclerocephalus.

So stehen denn die Resultate, welche EB. FRAAS bezüglich des Cementes an Zähnen triadischer Labyrinthodonten erzielte, in vollem Einklange mit den Beobachtungen an solchen unseres permischen Riesenlurches.

Als Cement der gefalteten Stegocephalenzähne wird sonach ossificirtes Bindegewebe von einer an der Basis des Zahnes dem zahntragenden Hautknochen nahekommenden Structur zu bezeichnen sein, welches sich in inniger Verwachsung und Verflössung mit dem Dentin am Aufbau der Faltenzähne betheiligt. Dasselbe bildet zunächst die Basis des Zahnes, welche durch sich nach oben zwischen die Radiärfalten einschiebende Wände mit dem Dentin verzahnt ist, sowie mit diesem durch structurelle Verflössung (Osteodentin) verschmilzt. Das wirre Canalgeflechte dieser Zahnbasis steht einerseits mit den Speichen der Pulpa, anderseits mit aufsteigenden Aesten der (sog. Haversischen) Gefässcanäle des zahntragenden Dermalknochens in offener Verbindung. Die Cementbasen der dicht neben einander stehenden Zähne sind mit einander zu einem Cementstreifen (zu einer Zahnleiste) verwachsen. Von dieser aus umwallt das Cement die Aussenseite der Zahnsockel, wobei es zu unterst die Zwischenräume zwischen denselben ausfüllt und sich dann dem Dentinmantel als sich nach oben immer mehr verdünnende Schicht anschmiegt. Von dieser aus stülpt es sich, ebenso wie von der Basisschicht aus, in die Dentinfalten ein, so dass es deren Medianzone bildet. In gleichem Schritte mit der sich nach oben vollziehenden Verdünnung der von ihm gebildeten Hüllschicht geht das Cement seiner charakteristischen Knochen- und Osteodentinstructur verlustig, indem sich seine Gefässcanäle, Knochenkörperchen und Dentinröhrchen vermindern und endlich ganz verlieren, bis schliesslich nahe der Zahnspitze seine klare, fein globulirte Grundmasse in die röhrchenfreie

peripherische Randschicht des Dentins übergeht, welche vom Schmelzkäppchen bedeckt wird.

4. Zusammenfassende Beschreibung des Baues der Kieferzähne von Sclerocephalus und entwicklungsgeschichtliche Ergebnisse (Polysynthese der Faltenzähne).

Die erste Anlage von hartem Dentin auf dem Zahnkeime besteht bei den Kieferzähnen von Sclerocephalus aus einer kegelförmigen Kappe von grobglobulärem Dentin, welches somit die Zahnspitze bildet. Auf ihm lagert sich vom Epithel her eine zarte Hülle von Schmelz ab. Der Schmelz des Sclerocephaluszahnes hat (siehe S. 492 und 498) folgende Eigenschaften: er ist homogen, besitzt keinen prismatischen Aufbau, weist oft eine schwache Lamellarstructur auf, zeigt in polarisirtem Lichte eine ziemlich starke Doppelbrechung, ist vom Dentin scharflinig abgegrenzt und nie von Dentinröhrchen durchsetzt. Er unterscheidet sich also von dem typischen Schmelz nur durch das Fehlen der Prismenstructur, — von den primitiven Formen des Schmelzes (dem Placoinschmelz) aber bereits durch seine scharfe Abgrenzung gegen das Dentin und das Nichteintreten von Dentinröhrchen aus diesem in die Schmelzsubstanz[1]).

Der Dentinkegel wächst und verdickt sich durch von aussen nach innen fortschreitende Abscheidung von Dentindüten, deren jede zunächst noch über den unteren, sich verdünnenden Rand der vorigen hinaus reicht, also grössere Tiefe erlangt, als ihr Vorgänger. Dieser dütenförmige Aufbau bewirkt eine concentrische Lamellirung des Dentins. Die Spitzen der Einzelkegel sitzen dicht auf einander; die Zahnspitze ist deshalb solid. Die Dentinröhrchen, welche die Verkalkung der dentinogenen Grundsubstanz vermittelt haben, steigen als ein steiler, fast senkrechter Büschel vom obersten Ende des in der Tiefe liegenden Pulpkegels empor.

Dieses älteste, durch die Spitze des Zahnes verkörperte Stadium der Zahnbildung ist in den Figuren 1—8 auf Tafel I zur Darstellung und auf S. 490 zur Beschreibung gelangt. Im höchst gelegenen dieser Querschnitte (Fig. 1, nebst Fig. 2—4) präsentiren sich als

1) Vergl. O. Jäkel, N. Jahrb. f. Min., Geol. u. Pal. 1891. I. S. 196 u. f.

Elemente im Aufbau der soliden Zahnspitze von aussen nach innen: 1) die zarte Haut von nicht prismatischem, aber das Licht doppelt brechendem Schmelz, — 2) eine breite Randzone von röhrchenfreiem, grobglobulärem Dentin, mit Zahnbeinkugeln von concentrisch lagenförmigem Aufbau, — 3) dünne concentrische Lamellen von fein globulirtem Dentin mit weitläuftigen Dentinröhrchen, die zum grössten Theile senkrecht emporsteigen, sich nur randlich schwach umbiegen, baum- oder quirlartig kleinste Aestchen abgeben und als Büschel von feinsten Verzweigungen enden. Nach unten zu (siehe Fig. 5 und 7) wird die Kappe von grobglobulärem Dentin schwächer, nur in den beiden diametral gegenüber liegenden Zahnschneiden bewahrt dasselbe noch grössere Dicke. Im Uebrigen tritt das sich ihr nach innen angelagert habende, feinst globulirte Röhrchendentin näher an die Peripherie heran und nimmt in Folge dessen den bei weitem grössten Theil des Zahnquerschnittes ein. Die sich ebenfalls noch vielfach verästelnden Dentinröhrchen steigen noch immer von der tiefer liegenden Pulpa in Form eines aussen schwach divergirenden Büschels empor.

Die Figuren 2 und 7 zeigen, wie die Lamellen der Dentingrundmasse nach innen zu immer dünner und die sie zusammensetzenden Globuli in gleichem Schritte immer kleiner werden. Gleichzeitig ergiebt sich aus dem Querschnitt 3, Fig. 6 und 7, dass in einzelnen Theilen der Zahnspitze die Verkalkung nicht nur die gesammte Intercellularsubstanz betroffen hat, sondern sich bis auf den Inhalt der Röhrchenscheiden erstrecken kann, welche dann von homogener Kalkmasse erfüllt sind. An anderen Stellen des Zahnquerschnittes hingegen sind vereinzelte echte Interglobularräume zwischen den Segmenten der im Uebrigen dicht aneinander gepackten Zahnbeinkugeln ausgespart geblieben (vergl. Fig. 8).

Die Spitze des Pulpkegels tritt in den Zahn ein (Fig. 9; S. 498). Die unteren Ränder der grob globulirten Zahnkappe haben sich vollständig, diejenigen des Schmelzhütchens zu grösster Zartheit ausgedünnt, um sich bald ganz zu verlieren. Das gesammte Dentin besitzt fein globuläre Structur, welche nur in einzelnen der dütenförmigen Zahnlamellen einer etwas gröberen Platz macht. Die Dentinröhrc en stehen jetzt ziemlich eng neben einander; steil steigen sie rin um die Pulpa empor, dann aber legen sie sich in

breit ringförmiger Zone vollkommen horizontal. Ihre quirl- und besenreisartige Zertheilung zu dichtem Astwerk verschwindet, ihr Verlauf wird glatter, sie gabeln sich spitzwinkelig. Hierbei fallen ihre Hauptgabelungen in die Wachsthumsringe von gröberer Globulirung (Fig. 10), worauf sich die Zweige direct in das enge, höchst regelmässige Radiärsystem einordnen. In den nämlichen Kreislinien vollziehen sich an den Dentinröhrchen kleine Wellenbiegungen mit gleichsinnig gerichteter Concavität (Secundärbiegungen; die eine Gruppe der Owen'schen Conturlinien).

Ausser durch den lagenweisen Wechsel in der Globularstructur der Grundmasse, sowie durch gleichzeitige Secundärbiegungen und Gabelungen der Röhrchen gelangt die schichtweise von aussen nach innen fortschreitende Ablagerung des Dentins in concentrischen Schnuren und Kränzen von Dentinhöhlen (siehe S. 501) zum Ausdruck (Fig. 10 und 11). Diese besitzen nicht jene durch glatte halbkugelige Segmente der Globuli erzeugte charakteristische Umgrenzung, wie sie denjenigen Partien der Grundsubstanz zukommt, die zwischen den Zahnbeinkugeln unverkalkt geblieben sind, also wie die echten Interglobularräume, sondern haben unregelmässig zerspratzte zackige Umrisse, sind durch Ausläufer zu continuirlichen Kränzen oder schwammig-porösen Ringen verschmolzen, welche der Anwachslamellirung folgen (zweite Gruppe von Owen'schen Conturlinien). In sie münden die Dentinröhrchen ein und zwar oft mit allmählicher oder trompetenartiger Erweiterung, ohne dass ihnen die Zahl und Lage der jenseits austretenden Röhrchen zu entsprechen pflegt. Während ferner die Dentinröhrchen durch die dentinogene Substanz der echten Interglobularräume ohne Unterbrechung hindurchsetzen[1], ergeben sich die beschriebenen Dentinhöhlen der Conturlinien als directe Erweiterungen der Dentinröhrchen und als deren integrirender Zubehör[2].

Die peripherische, also die hier älteste Lage des Dentins ist frei von Dentinröhrchen und -höhlen, deshalb klar, und erscheint,

---

1) Ch. S. Tomes, Manual of dental anatomy. 3. edit. London 1889. S. 79 u. 80. — V. v. Ebner, Histologie der Zähne, in: Scheff's Handbuch der Zahnheilkunde. I. Wien 1891. S. 227 u. Fig. 97.

2) Vergl. auch: O. Jäkel, Zeitsch. d. Deut. geol. Ges. 1890. S. 96 u. 97; — ferner: W. Lepkowski, Anat. Anzeiger VII. 1892. S. 278 u. 280. Siehe auch C. Röse, ebend. VIII. 1893. S. 569.

weil höchst fein globulirt, homogen. Diese klare Hüllschicht (Vitrodentin) wird nach innen durch den äussersten Dentinhöhlenkranz (das TOMES'sche granular layer, die Körnelschicht) gegen das Röhrchendentin abgegrenzt; wo sich in diesem Kranze Lücken finden, verfliessen Grundmasse des Röhrchendentins und Hüllschicht untrennbar in einander. Aussen wird dieselbe hier noch von den sich ausdünnenden Rändern des Schmelzkäppchens überlagert.

Erst nachdem der Pulpkegel mit fortschreitendem Tiefenwachsthum des Zahnes eine beträchtliche Erweiterung erfahren und das Dentin die Gestalt eines kräftigen Kegelmantels erhalten hat, beginnt die Faltenbildung in letzterem. Zu derselben wird das verkalkende Röhrchendentin dadurch veranlasst, dass sich die jetzt von Schmelzbedeckung freie, klare Hüllschicht in regelmässigen, auf der Aussenfläche des Zahnes durch Längsfurchen gekennzeichneten Abständen radiär nach innen stülpt und auf diese Weise die Odontoblastenschicht und die Pulpa einkerbt, so dass die von ersterer abgelagerten Dentinlamellen einen welligen Verlauf erhalten, der sich nach innen zu mehr und mehr ausgleicht, also verflacht und schliesslich nach der Pulpa zu nur noch in Form einer flachwelligen Grenzfläche zum Ausdrucke gelangt. Durch diese sich nach innen vorschiebenden Einstülpungen der Hüllschicht wird zugleich das bis dahin einheitliche Radiärsystem von horizontalen Dentinröhrchen in ebenso viele Fächer getheilt, deren jeder zwischen zwei Einstülpungen der Aussenschicht zu liegen kommt.

Je tiefer sich letztere bei fortgesetztem, nach unten gerichtetem Wachsthum des Zahnes in die Pulpa einschieben, in desto tiefere Radiärfächer wird dieselbe zerschlitzt, zu desto steileren Wellen werden die Anwachslamellen des Dentins gezwungen und desto weiter werden die Dentinfalten nach innen vorgeschoben (Plicidentin).

Fig. 12—14 repräsentiren eine anfängliche, — Fig. 15 und 20 zwei jedesmal etwas weiter fortgeschrittene Phasen des Einstülpungs- und Faltungsprocesses im Zahnmantel.

Während dieses Vorganges vollzieht sich innerhalb der peripherischen Hüllschicht eine bedeutungsvolle Veränderung. Bis dahin klar, fast homogen, beginnen sich in ihr gleichzeitig mit ihrer Tendenz, speichenartig nach innen einzudringen, verticale Gefässcanäle und Knochenkörperchen einzustellen. Erstere steigen

anfänglich nur in einzelnen der Längsfurchen von unten her bis in das Niveau der beginnenden Faltung (Fig. 12 und 14); mit Zunahme der letzteren zeigen sie sich in immer mehr, zuletzt in allen Furchen (Fig. 15), dann gesellen sich zu diesen Furchencanälen noch vereinzelte, näher an der Peripherie der Aussenschicht gelegene Verticalcanäle (Fig. 20). Mit zunehmendem Tiefenwachsthum des Zahnes und damit Hand in Hand gehender Verlängerung der Einstülpungen wird die Zahl dieser Gefässcanäle eine immer grössere (Fig. 22); zugleich laufen von denselben sparsame Canälchen in radiärer Richtung aus. Die anfänglich sehr spärlichen, meist spindelförmigen Knochenkörperchen werden immer zahlreicher, sie ordnen sich fluidal, oft als dichte Strähnen, um die Gefässcanäle und dringen mit der sich einstülpenden, ihre fein globuläre Structur immer mehr einbüssenden Grundmasse in die Medianzone der Dentinfalten ein. Auf diese Weise wird die nahe der Zahnspitze klare, globulirte Randschicht des Dentinmantels mit fortschreitender Tiefe zu einem Knochengewebe, welches demjenigen der zahntragenden Hautknochen sehr ähnlich ist, nämlich zu Cement. Der Zahn besteht also bereits in in diesem verhältnissmässig hohen Niveau aus zweierlei Modificationen von Bindegewebsknochen, aus Dentin und Cement.

Dem Dentin selbst ist der Stempel seines Dickenwachsthums und seines Verkalkungsprocesses auf das deutlichste aufgeprägt. Dasselbe baut sich durchweg aus kleinsten, dicht aneinander gepackten Zahnbeinkügelchen auf, deren lagenweise Anordnung und gleichzeitige Grössendifferenzen jene Wachsthumslamellen erzeugen, welche in ihrem, durch die sich vorschiebenden Einstülpungen der Aussenschicht bedingten, steilwelligen Verlaufe die einzelnen Stadien des nach innen fortschreitenden, durch jene Einstülpungen zur Zerschlitzung der Pulpa führenden Ablagerungsvorganges verkörpern (Fig. 13 und 16).

Die Richtung des Vollzuges der Verzahnung war vorgeschrieben durch die Dentinfasern, von denen aus der dentinogenen Grundsubstanz Kalksalze zugeführt werden. In Folge dessen gruppiren sich die aus dieser Imprägnation hervorgegangenen Zahnbeinkügelchen zwischen den Dentinröhrchen zu lauter perlschnurartigen Reihen oder Doppelreihen, deren Gesammtheit in Conformität mit dem sie erzeugenden Röhrchensystem nach Abschluss der

Verkalkung einen von jeder Pulptasche ausstrahlenden Fächer bildet (Fig. 17).

Die Verkalkung der Grundsubstanz wird im Gegensatze zu den nächst höheren Regionen des Zahnes mit ihren Kränzen und Schichten von Dentinhöhlen eine so intensive, dass weder echte Interglobularräume, noch Dentinhöhlenschnuren ausgespart bleiben, das gesammte Dentin vielmehr eine vollkommen compacte Globularstructur erhalten hat. Nur an seiner Peripherie stellt sich ein lockereres Gefüge ein, welches in einem zuweilen doppelten Kranze von mit einander verwobenen und verfilzten Dentinhöhlen seinen Ausdruck findet. Die Einzelhöhlen dieser Körnelschicht stehen auch hier mit den in sie auslaufenden Dentinröhrchen und deren Verzweigungen in offener Verbindung, während sie gegen die Aussenschicht scharf abgegrenzt ist (Fig. 12—16, 20 und 22).

Wie die Dentinmasse selbst durch die Einstülpungen der peripherischen Cementhülle zur Faltung veranlasst und deren Röhrensystem in lauter Einzelfächer gegliedert wird, so wird auch die Körnelschicht als peripherischer Zubehör der letzteren durch jene Einstülpungen zerschnitten und in isolirte Guirlanden (Fig. 12—14), etwas weiter unten im Zahne in selbständige Hufeisen zerlegt (Fig. 15, 16 u. 20), deren Schenkel sich als beiderseitige Randsäume der Einstülpungen mit Zunahme deren Tiefe immer weiter in die Falten hineinziehen und hierbei die Gestaltung von Knochenkörperchen annehmen (Fig. 18 und 19).

Wenn nun auch in diesem Abschnitte die Dentinröhrchen ihre engste Gruppirung und ihren glattesten Verlauf innerhalb des Sclerocephaluszahnes erreichen, so steigern sich doch diese Eigenschaften bei Weitem nicht bis zu dem Grade, wie z. B. bei dem triadischen Mastodonsaurus[1]) oder bei den recenten Echsen, wodurch selbst das innerhalb des Sclerocephaluszahnes höchst differenzirte Dentin noch einen unfertigen, paläozoischen Habitus erhält.

Verfolgt man den Zahn weiter hinab bis zu seiner Basis, so sieht man den Bau seines Sockels von einer zwiefachen Tendenz beherrscht, welche einerseits auf die fortgesetzte Zerschlitzung

---

1) EB. FRAAS, Labyrinthodonten der schwäb. Trias. Stuttgart 1889. Taf. XVII. Fig. 3—7.

der Pulpa durch die Falten und ihre schliessliche Zertheilung in ein Verticalbündel von unregelmässig conturirten Canälen, anderseits aber auf die Assimilation des Dentins und des Knochencementes, also in Summa auf die Erzeugung der als Osteodentin bezeichneten Uebergangsstadien, hinzielt, bis schliesslich jene Pulpmaschen in die Gefässcanäle und das normale Dentin in die Grundmasse des zahntragenden Cementes übergehen[1]).

Dieser Process vollzieht sich jedoch nicht ganz gleichmässig und nicht in vollkommen gleichem Schritte innerhalb des ganzen Bereiches des Zahnquerschnittes, vielmehr gewahrt man, dass der regulär-radiäre Bau des letzteren verloren gegangen ist und einer Differenzirung in zwei verschiedenartige und verschieden grosse Abschnitte Platz gemacht hat. Der grössere dieser beiden Abschnitte umfasst die Aussenseite und die lateralen Flächen des Zahnsockels, — der andere dessen nach dem Innenrande des Kiefers verlaufende Flanke. Das erstgenannte Segment besitzt im Allgemeinen noch den gleichen Aufbau, wie er bis dahin herrschte und an welchem sich Faltendentin und als dessen Umwallung Cement betheiligt. Hierbei macht sich jedoch die oben angedeutete Tendenz nach Zertheilung der Pulpa in Einzelpulpen in folgender Weise geltend: Zuerst schieben sich die kräftigen, dickwandigen Dentinfalten immer weiter in die Pulpa vor, so dass diese in immer tiefere Speichen zerlegt wird, gleichzeitig aber verlieren die Falten ihren geradlinigen Radiärverlauf, der durch wurmförmige Krümmungen und beiderseitige kurze Ausstülpungen beeinträchtigt wird (Fig. 24 und 25). Diese Unregelmässigkeit wächst nach unten zu, indem die Falten an Dicke ab-, also an Schlankheit zunehmen und sich an ihren Enden knopfartig verdicken oder hakenähnlich umbiegen, während sich gleichzeitig an ihrer Basis stumpf endende Ausläufer vorschieben, welche ebenso wie die modificirten Faltenenden nach Vereinigung streben und auf die Abschnürung von Theilen der Pulpspeichen zu selbständigen Verticalcanälen gerichtet sind (Fig. 28 und 29), was sie in einem späteren Stadium ihres Wachsthumes auch bewirken. Ausserdem stellen sich innerhalb einzelner der knopfartig verdickten Faltenenden Verticalcanäle, wenn auch von geringem Lumen, ein.

1) Vergl. C. Röse an den S. 527 citirten Orten.

Zu noch viel bedeutenderer, nämlich doppelter Länge haben sich unterdessen die Falten des medianwärts gerichteten kleineren Querschnittsegmentes vorgeschoben (Fig. 24, 26 und 28), wobei sich einerseits ihre Dicke beträchtlich vermindert und die plumpen Krümmungen der Falten zu schlanken Biegungen ausziehen, anderseits sich neue, ähnlich schlanke Falten von der Peripherie aus einschalten.

Jetzt beginnen auch in der Kernmasse des randlich zerschlitzten und zertheilten Pulpkegels stabförmige Knochengebilde aus der Tiefe emporzusteigen und jene vertical zu durchspiessen (Fig. 28); — weiter unten wachsen dieselben zu sich im Querschnitte krümmenden und gabelnden Wänden aus, welche mit den Kopfenden der durch Biegungen und Querwände zu einem grobmaschigen Fachwerke gewordenen Falten Vereinigung suchen und in der Basis des Zahnes auch finden (Fig. 31): der oben einheitliche, dann randlich in erst kurze und plumpe, dann immer tiefere und schlankere Speichen gegliederte, noch später von unregelmässigen peripherischen Abschnürungen betroffene Pulpkegel ist an seiner Basis in ein Bündel von Einzelpulpen zergliedert worden, in welche sich die Gefässe des Basiscementes fortsetzen und sie mit den Gefässcanälen des zahntragenden Hautknochens in Verbindung bringen.

In ziemlich gleichem Schritte mit dieser Individualisirung der Zahnkeime vollzieht sich auch der structurelle Uebergang des normalen Röhrchendentins in das Cement der Basisschicht.

In dem durch seine kürzeren, kräftigen Falten gekennzeichneten Aussensegmente des Zahnquerschnittes ist die Structur des Röhrchendentins zunächst noch dieselbe wie im oberen Zahntheile. Jede Pulpspeiche oder deren Gabelungsende ist von einem Fächersysteme dicht stehender, graciler, langer Dentinröhrchen gekrönt, welche in peripherische Körnelhufeisen auslaufen (Fig. 24 und 25). Die Schenkel der letzteren ziehen sich in Form je eines Saumes kleiner, den Knochenkörperchen sehr ähnlicher Höhlen bis tief in die Falten. Ausserdem aber geht von jeder der Ausbuchtungen, welche die Seitenflächen der Pulpspeichen in die Falten machen und dadurch deren wurmförmige Krümmungen bedingen, ein kleiner selbständiger Secundärfächer von naturgemäss sehr kurzen Röhrchen aus (Fig. 25).

Anders in den längeren, weit schlankeren Falten des nach innen gerichteten Querschnittsegmentes (Fig. 24 und 26). Die Fächer von langen, glatten Röhrchen am Ende der Pulpspeichen sind hier ganz verschwunden, mit ihnen die das Dentin aussen abgrenzenden Hufeisen von Dentinhöhlen, so dass hier die Grundmasse des Cementes und des Dentins untrennbar verfliessen. Auch in den Falten selbst werden die Dentinröhrchen weit kürzer und viel weitläuftiger, nehmen gekrümmten, geknickten, stumpf und spitz gegabelten Verlauf an, senden zahlreiche Querästchen und Verbindungszweige ab und münden nach innen in die Schnüre von Dentinhöhlen, die in ihrer zackigen Gestalt den Knochenkörperchen durchaus gleichen.

Noch etwas weiter nach der Basis zu (Fig. 28, 29 und 30) zeigt sich das Dentin der gesammten kürzeren und längeren Falten in der nämlichen Transformation begriffen: ihnen allen fehlen die von der Pulpa ausstrahlenden Fächersysteme und deren Körnelhufeisen, — überall geht die scharfe Grenze zwischen dem Dentin der Faltenbasen und der knöchernen Aussenschicht verloren, — durchweg sind die Dentinröhrchen weitläuftig, kurz, wellig, geknickt, ästig, — besitzen also einen sehr primitiven Habitus[1]).

Bei dieser Zergliederung des Pulpkegels in lauter selbständige Abschnitte und der damit Hand in Hand gehenden geringeren Differenzirung des Dentins wird zugleich auch die weiter oben mit der röhrchenfreien Randzone des Dentins verschmelzende Hüllschicht von Cementknochenmasse in Mitleidenschaft gezogen. Auch hierbei macht sich der Gegensatz zwischen Aussen- und Innenflanke des Zahnsockels geltend, indem sich die bis dahin immerhin noch zarte Cementschicht auf ersterer zu einer kräftigen Umwallung verdickt, um sich von hier aus auf den Seitenflächen des Sockels zu verdünnen und endlich auf dessen nach innen gerichtetem Rande als selbständige Lage vollkommen verloren zu gehen.

In dem grösseren, mit kurzen, kräftigen Falten ausgestatteten Aussensegmente des Zahnes (Fig. 24 und 25) nimmt die Cementhülle gleichzeitig mit ihrer Verdickung immer zahlreichere verticale Gefässcanäle auf, — concentrische oder fluidale Strähnen von spindelförmigen und zackig-spratzigen Knochenkörperchen um-

1) Vergl. O. Jäkel, N. Jahrb. f. Min., Geol. u. Pal. 1891. I. S. 193.

ziehen dieselben, — Radiärästchen laufen von den Gefässcanälen aus und treten mit den Knochenkörperchen in Verbindung. Auch die sich durch die Kerben zwischen den Körnelguirlanden des Dentins in die Medianzone der Falten einschiebende Grundmasse des peripherischen Cementes enthält zahlreiche, z. Th. grosse Knochenkörperchen.

Später (Fig. 28 und 29) büsst jedoch die äussere Cementschicht ihre bisher scharfe, durch die Körnelhufeisen markirte Grenze gänzlich ein und beginnt sich mit dem Dentin zu verflössen. Einzelne ihrer Verticalcanäle rücken bis tief in die Faltenbasen, die dadurch ihres festen compacten Gefüges verlustig gehen. Die von ihnen auslaufenden medianen Cementzonen nehmen an Breite zu, zugleich treten ihre Knochenkörperchen mit den Dentinhöhlen der angrenzenden Dentinlagen und durch deren Dentinröhrchen mit der Pulpa in Communication. In dem centralwärts gerichteten Drittel der Radiärfalten vereinigen sich die bis dahin getrennten beiden Dentinhöhlenreihen mit der zwischen ihnen gelegenen Knochenkörperchenschnur zu einer einheitlichen Reihe. Gleichzeitig werden im peripherischen Knochengewebe die von den Verticalcanälen ausstrahlenden Röhrchen reichlicher und länger, verzweigen sich, senden kurze Querästchen aus und gestalten sich dadurch den in den Falten jetzt ebenfalls weitläuftiger und kürzer werdenden Dentinröhrchen im höchsten Grade ähnlich. Röhrchendentin und peripherische Cementknochenschicht sind sich auf diese Weise in ihrer Structur gegenseitig sehr nahe gerückt. In gleichem Schritte mit dieser Assimilation hat, wie gesagt, die Schärfe der Abgrenzung der Umwallungsschicht von Cement gegen das Dentin in dem Maasse abgenommen, dass hier eine Trennung beider innig mit einander verflösster Modificationen kaum mehr möglich ist.

Noch energischer hat sich dieser Process in dem nach dem Innenrande des Kiefers hinabsteigenden, mit langen, schlank gestreckten Falten versehenen Zahnsegmente vollzogen (Fig. 24, 26, 28 und 30). Hier ist das peripherische Knochengewebe so vollkommen mit dem Dentin der Zahnbasen verflösst, dass von einer Selbständigkeit beider nicht mehr die Rede sein kann. Die Knochenkörperchenkränze um die Verticalcanäle ziehen sich schweifartig bis tief in die Medianzonen der Falten hinein, — Faltenbasen und Cement sind zu einem von Gefässcanälen durchzogenen, lückenhaften

Mantel verschmolzen, durch dessen Lücken jetzt auch von aussen, nämlich von der Gaumenseite her, Gefässe eintreten.

Wird endlich die Pulpa an der Basis des Zahnkegels vollkommen von einem grobmaschigen Fachwerke von Wänden durchsetzt (Fig. 31, 32, 33 und 34) und hat der Zahnmantel seine Continuität ganz eingebüsst, so zeigt sich, dass hier die Dentinröhrchen noch mehr an Zahl, Schlankheit und Länge abgenommen haben und ihrer gesetzmässigen Stellung und Gruppirung ganz verlustig gegangen sind, — dass ferner die klare Cementknochengrundmasse überall vollkommen in den Vordergrund getreten und noch reicher an Knochenkörperchen geworden ist, welche die grossen Canäle conform deren unregelmässigen Conturen umkränzen. An Stelle des normalen Röhrchendentins ist Osteodentin getreten, welches durch die Basisschicht des Zahnes in die Knochenmasse des Kiefers übergeht.

Zeigt sich nun ferner an Steinkernen von Gefässcanälen des Kiefers und von ihm durch Vermittlung des Cementes aufsitzenden Zahnpulpen, dass die horizontalen (Haversischen) Gefässcanäle des ersteren sich vermittelst der wurmförmigen Canälchen des Cementes in die Pulpspeichen fortsetzen, indem ihre sich verästelnden, krümmenden und anastomosirenden Zweige entweder direct oder durch das Zwischenmittel grösserer Lacunen (Textfig. 3, S. 529) in den Zahnsockel emporsteigen und in die basalen Maschen der Pulpa auslaufen, so ergeben sich die Kieferzähne von Sclerocephalus als directe conische Fortsätze der zahntragenden maxillaren Hautknochen.

Zugleich aber erweist sich jeder derselben als polysynthetisch, d. h. als das Product der Verschmelzung der Pulpen einer vielzähligen Gruppe von Zahnanlagen.

In der Zahnspitze, dem phylogenetisch jüngsten und ontogenetisch ältesten Theile des Zahnes, ist diese Concrescenz am weitesten gediehen und ihr Ursprung von einer Summe von Zahnanlagen am meisten verwischt. Diese Zahnspitze besteht deshalb aus einem Kegel von Röhrchendentin und Vitrodentin mit Schmelzkäppchen, in etwas grösserer Tiefe aus dem Dentinmantel mit einheitlicher Pulpa. Weiter hinab beginnt sich die ursprüngliche Vielzahl der Anlage durch die Gliederung der Pulpa zu Einzelpulpen vermittelst

symmetrisch aufgebauter Radiärwände, den Dentinfalten, bemerklich zu machen (Plicidentin). Jeder dieser Pulpabschnitte hat anfänglich noch eine sehr geringe Selbständigkeit, — immer aber erinnern die Dentinröhrchen in ihrer radialen Ausstrahlung von jedem derselben an ihr Abhängigkeitsverhältniss von Einzelpulpen. Durch tieferes Eindringen der Dentinfalten trennen sich letztere immer schärfer von einander ab, zugleich schiebt sich die weiter oben nur peripherische Hüllschicht von Cement als Trennungswand je zweier Pulpen, ihres Röhrchendentins und ihrer Systeme von Anwachslamellen und Röhrchenfächern zwischen diese, — theilt sich also jedem Abschnitte als Hüllschicht zu. Eine weitere Zerlegung dieser Pulpspeichen kündigt sich durch wurmförmige Krümmungen, hakenförmige Umbiegungen und seitliche Ausstülpungen jeder Falte an. Dieselben verrathen die Individualität ihres Ursprunges durch Secundärfächer von Dentinröhrchen, deren jeder einem der mit einander verschmelzenden Zahnkeime entstammt. Endlich gliedert ein Maschenwerk von Verticalwänden die Pulpspeichen in lauter selbständige, den ursprünglichen Zahnanlagen am nächsten kommende Abschnitte. In jeden derselben verlaufen vom Kiefer aus die ihn nährenden Blutgefässe. Die nämlichen phylogenetischen Reminiscenzen wiederholen sich in der Structur des Dentins, welches nach der Zahnbasis zu eine sehr primitive Form annimmt: die von den Pulpabschnitten ausstrahlenden Dentinröhrchen werden sparsamer und ordnungsloser, — Knochenkörperchen stellen sich reichlicher ein (Osteodentin), — die Zahnsubstanz geht durch Vermittlung des Basiscementes in das Gewebe des zahntragenden Hautknochens über. Aus der nach der Zahnspitze zu sich vervollkommnenden Verschmelzung der Pulpen, mit welcher die Herausbildung höher differenzirten, normalen Röhrchendentins aus dem primitiven Dentin der ursprünglichen Einzelpulpen (dem Osteodentin) Hand in Hand ging, resultiren die Kieferzähne von Sclerocephalus, ebenso wie die Entstehung der Cementzahnleiste aus der Verschmelzung primitiver Zahnplatten abzuleiten ist.

Das Studium der Zähne von Sclerocephalus beweist somit, dass jeder grössere, wenn auch bloss einspitzige Zahn der Urvierfüssler, und damit allgemein der höheren Wirbelthiere, nicht ein ursprüngliches, sondern ein phylogenetisch erworbenes Gebilde darstellt[1]).

1) W. KÜKENTHAL hat wiederholt (Anat. Anz. VI. 1891. S. 369; Biolog.

5. Die Gaumenzähne von Sclerocephalus und ihre Verknüpfung mit den Gaumenknochen. Homologien.

Den ursprünglichen Anlagen eines polysynthetischen Kieferzahnes stehen die **Zahnspitzen des Vomers und der Pterygoidea** jetzt noch am nächsten. Sie besitzen gegenüber den bis 15 mm hohen Kieferzähnen

---

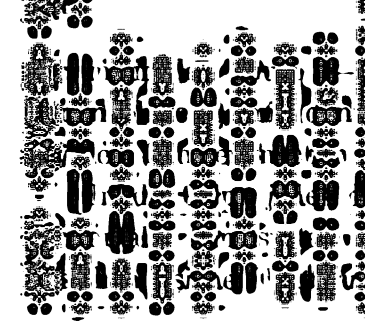
Centralbl. XII. 1892. S. 405; Jen. Zeitschr. f. Naturw. XXVI. N. F. XIX. 1892. S. 476) die Ansicht ausgesprochen, »dass die Ausbildung der Zähne innerhalb der gesammten Wirbelthierreihe in erster Linie auf Verschmelzung von Einzelzähnen zurückzuführen« sei, dass namentlich »die Backzähne der Säugethiere aufzufassen seien als entstanden durch gruppenweise verschmolzene, ursprüngliche, conische Reptilienzähne«.

C. Röse führte (Anat. Anz. VII. 1892. S. 832) die Zahnplatten gewisser Fische, so von Ceratodus, Heptanchus, Myliobatis, Rhinopterus und Cestracion, auf die Verwachsung vieler röhrenförmiger Einzelzähne zurück. Ebenso erbrachte er den entwicklungsgeschichtlichen Nachweis (ebend. VIII. 1893. S. 570), dass die Entstehung der mehrspitzigen Molaren von Chamäleon »ontogenetisch durch Verwachsung von typischen, schmelzbedeckten Zähnchen erfolgt«. An diese Beobachtungen knüpft er die Schlussfolgerung, dass »sich ähnliche Erscheinungen bei den höheren Vertebraten wiederholen können« und dass »auch die Molaren der Säuger durch Verwachsung mehrerer einspitziger Zähne entstanden sind«.

Bei beiden Autoren handelt es sich also um Zahnplatten mit zahlreichen, lang röhrenförmigen Pulpen, sowie um mehrspitzige oder mehrhöckerige Zähne, deren Einzelanlagen sich in der grossen Zahl ihrer noch selbständigen Pulpen oder in der Gliederung ihrer Spitze oder Krone wiederspiegeln. Anders bei den Zähnen von Sclerocephalus. Hier wird ein einspitziger, in seinem Spitzentheile vollkommen einheitlicher Zahn mit hier ebenfalls einheitlicher Pulpa, welcher deshalb bisher als primitives Gebilde aufgefasst wurde, aus der Verschmelzung einer vielzähligen Gruppe von Einzelanlagen abgeleitet, deren jede einem Schuppen- oder Gaumenzähnchen homolog ist.

In den Zähnen von Sclerocephalus ist ungefähr der Vorgang verwirklicht, an welchem C. Röse die Möglichkeit der Entstehung zusammengesetzter Zähne bei den höheren Vertebraten theoretisch illustrirt, indem er l. c. S. 574 sagt: »Stellt man sich vor, dass bei den einander sehr nahe gerückten Zahnanlagen der Zahnplatten von Spelerpes das Schmelzepithel mehrerer benachbarter Zähnchen mit einander verwächst und sodann noch eine Zeitlang fortbesteht, dann würden die Zähnchen schon in ihrer Dentinsubstanz mit einander verwachsen und nicht nur mit ihren Cementsockeln. Wir erhielten dann zusammengepresste Zähne.«

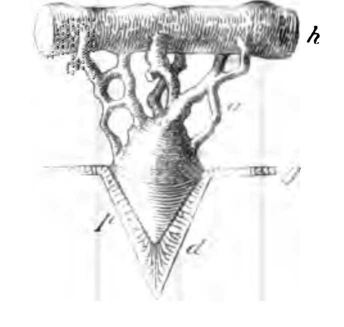
Nach unseren obigen Darlegungen sind die von Kükenthal und Röse als ursprüngliche Elemente der Molaren in Anspruch genommenen »conischen Reptilienzähne« und »einspitzigen Zähne« selbst keine primitiven, sondern vielmehr polysynthetische Gebilde. Erst aus der Verschmelzung solcher würden nach den



5 mm erreichende Länge, sind einfache
n Mantel und grosser Pulpa und bilden
eitläuftige oder dichte Hecheln.
ser Zähnchen senkt sich von dem dichten
r sie tragenden Knochenlamelle ein zartes
) oder eine Gruppe von solchen. In

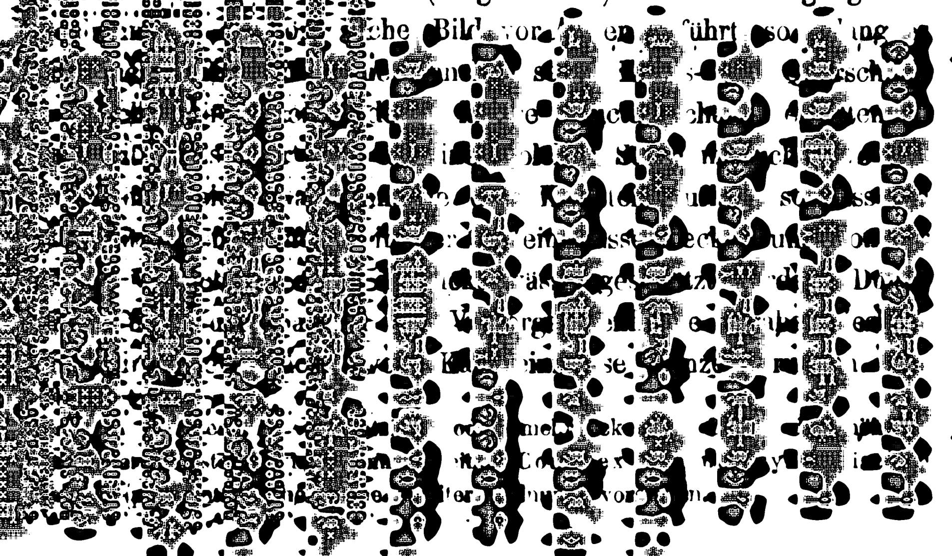
Fig. 5.





nenmasse erhalten gebliebene Steinkerne von Canälen des hori-
en (h), — der von ersteren sich nach unten abzweigenden Aestchen
p). Ferner die Osteodentin- (Ganoin-) schicht (g) auf der Gaumen-
wie der Dentinkegel (d) eines Gaumenzähnchens.

dieselben nach unten, treten durch feine
g (siehe Textfigur 5) und vereinen sich
e, welche sich kegelförmig in den Dentin-
ten Zähne als Pulpa fortsetzt.
hilderte und abgebildete Verknüpfung der
m der Gaumenknochen durch die Stein-
en (vergl. S. 483) nach Auslaugung der



Querschnitten durch die Hechelzähnchen. Ueber deren inneren Bau liess sich Folgendes feststellen (vergl. Taf. IV, Fig. 37—41):

Die Vomer- (und wohl auch die Pterygoid-) Zähnchen von Sclerocephalus sind conisch mit scharf ausgezogener, schwach nach hinten gebogener Spitze (Fig. 37) und von kreisrundem Querschnitt, umschliessen einen beträchtlich stumpferen Pulpkegel und besitzen deshalb eine ziemlich lange solide Spitze, die nach dem Sockel zu mit zunehmender Dicke der Pulpa in einen sich immer mehr verdünnenden Dentinmantel ausläuft. Dieser breitet sich an der Basis des Zahnes aus und verschmilzt mit seinen Nachbarn zu dem Osteodentinüberzug des Vomers (siehe S. 485). Das oberste Viertel der Zähne ist von einem dünnen Schmelzhäutchen bedeckt, dessen Substanz keine prismatische Structur besitzt, sondern vollkommen homogen erscheint, aber lebhafte Doppelbrechung aufweist und somit dem Schmelz der Kieferzähne (S. 535) durchaus gleicht.

Die solide Zahnspitze besteht aus klarer, globulirter Dentingrundmasse mit enger concentrischer Anwachslamellirung, welche durch dünn lagenweisen Wechsel feinster und etwas gröberer Globulirung erzeugt wird, womit eine grössere oder geringere Helligkeit dieser Einzellamellen Hand in Hand geht. An der Zahnperipherie werden die Zahnbeinkugeln am grössten, zeigen oft den S. 491 beschriebenen schaligen Aufbau und sind durch die äussersten dieser Schalen innig verschmolzen.

Weiter unten, nachdem die Pulpa in den Zahn eingetreten ist, werden die Globuli gleichmässig feiner, wodurch die Lamellarstructur fast verloren geht.

Die Dentinröhrchen besitzen namentlich nach dem Zahnsockel zu (Fig. 37 und 41) einen durchaus primitiven Habitus, der sich durch ihre weitläuftige Stellung, ihre verhältnissmässige Kürze, ihren geknickten, gekrümmten Verlauf, ihre quirlartigen Verzweigungen (ähnlich Fig. 2, Taf. I) und ihre Befiederung mit Querästchen verräth. In der Zahnspitze stellen sich dieselben enger und regelmässiger. Für sie alle ist charakteristisch, dass sie sich in feinste, besenreisartige Büschel zu zertheilen pflegen, mit welchen sie in der peripherischen Zone der Dentingrundmasse austönen.

Die Dentinröhrchen steigen in Form eines Federbusches in die solide Zahnspitze steil hinan, biegen sich dann flacher und verlaufen

im Dentinmantel der Pulpa fast horizontal (Fig. 37). Selbst noch am untersten Sockelrande ergiebt sich ihre Richtung als eine einheitliche, radiär von der Pulpa ausstrahlende, — es fehlt jede Spur von fächerartiger Gruppirung, bedingt durch faltige Zerschlitzung der Pulpa, diese repräsentirt vielmehr eine typische Einzelanlage. Die Grenzfläche der Pulpa gegen das Dentin verläuft nicht glatt, sondern namentlich an der Zahnbasis buchtig-kerbig. Die von ihr ausgehenden Dentinröhrchen erreichen nie die Peripherie des Zahnes, lassen vielmehr stets eine dann vollkommen klare Randzone der Grundmasse röhrchenfrei. Doch ist die Länge der Dentinröhrchen eine sehr unregelmässige und deshalb die Breite der klaren Randzone eine rasch wechselnde, zackig aus- und einspringende (Fig. 41).

Sehr kleine Dentinhöhlen von spratziger Gestalt mit feinsten kurzen Ausläufern und dadurch sehr den Knochenkörperchen ähnlich, liegen in der Grundmasse der soliden Spitze zwar ziemlich zahlreich, aber isolirt (Fig. 38). Auch innerhalb des Dentinmantels der Pulpa bilden sie nie eine geschlossene Körnellage wie bei den Kieferzähnen (S. 502), sondern nur kürzere oder längere Segmente von Kreislinien (Fig. 41). In sie münden die längsten Dentinröhrchen ein oder bilden vielmehr deren nach der Pulpa gerichtete Ausläufer. Nach ihrer Gestalt sind sie von Knochenkörperchen durchaus nicht zu unterscheiden, dürften thatsächlich auch solche repräsentiren und sich bei der Bildung des Zahnbeines betheiligt haben, welches dann als Osteodentin zu bezeichnen wäre. Die Structur dieser Hechelzähnchen hat sich in der basalen Sockelpartie der gefalteten Kieferzähne erhalten.

Durch die Basis dieser Gaumenzähnchen geführte Querschnitte zeigten, dass hier eine Anzahl horizontaler Radiärcanäle den Dentinmantel durchqueren, vermittelst welcher die Pulpa mit den Geweben auf der Oberfläche der Gaumenknochen communicirt hat. Die gleiche Erscheinung wurde an den Schuppenzähnchen von Ganoiden, so von Dapedius, Macropoma und Tetragonolepis, neuerdings auch von Lepidosteus beobachtet (Klaatsch, l. c. S. 131 und 219). Bei den aus der Verschmelzung derartiger Anlagen hervorgegangenen gefalteten Kieferzähnen von Sclerocephalus haben sich diesen Radiärcanälen entsprechende Communicationsöffnungen an den gaumenwärts gerichteten Pulpspeichen erhalten (S. 488 und 519).

Haben sich die Deckknochen des Sclerocephalusschädels durch die Gleichartigkeit ihres histologischen Aufbaues als vollkommene Homologa der Ganoidschuppen erwiesen, so gilt das Nämliche von den Hechelzähnen der Gaumenknochen jenes Stegocephalen und den Zähnchen der Ganoidschuppen: beide sind spitzconische, mit einem zarten Schmelzkäppchen und grosser Pulpa versehene Dentinkegel, deren basale Ausbreitungen zu jener, sonst als Ganoin bezeichneten Lage einer Dentinmodification verschmolzen sind, welche den durch ein dichtes, horizontales Canalsystem ausgezeichneten Hautknochen überzieht.

Aus der Concrescenz der Anlagen solcher ursprünglichsten Zähne sind die demnach polysynthetischen Faltenzähne der Kiefer von Sclerocephalus, — aus der Verschmelzung ihrer Basen die Cementleisten der letzteren abzuleiten.

INHALT.

Seite

Einleitung:

Die Stegocephalen im Mittelrothliegenden des Plauenschen Grundes bei Dresden 477

Ihre Bezahnung 478

Sclerocephalus labyrinthicus Gein. sp. 479

Sein Knochenskelet 479

I. Ueber die zahntragenden Knochen und die Bezahnung von Sclerocephalus.

1. Histologie der Knochen der Mundhöhle und Homologie derselben mit den Ganoidschuppen 481

2. Die Bezahnung. Allgemeiner Bau der Kieferzähne. Verbindung derselben mit den Kiefern. Die Gaumenzähne 486

II. Specielle Histologie der Zähne von Sclerocephalus.

1. Die Kieferzähne. Ihre histologischen Verhältnisse, verfolgt in zehn, von der Spitze bis zur Basis gelegten Querschnitten 490

2. Die Gefässverbindung zwischen Kiefern und Zähnen 529

3. Ueber das Cement 530

4. Zusammenfassende Beschreibung des Baues der Kieferzähne von Sclerocephalus und entwicklungsgeschichtliche Ergebnisse (Polysynthese der Faltenzähne) 535

5. Die Gaumenzähne und ihre Verknüpfung mit den Gaumenknochen. Homologien 547

TAFELN.

Erklärung der auf Tafel I bis IV angewandten Buchstabensymbole.

S = Schmelz.
D = Dentin.
Dr = Dentinröhrchen.
ow = Owen'sche Conturlinien (Secundärbiegungen der Dentinröhrchen, Kränze von Dentinhöhlen und Gabelungen der Röhrchen).
h = Hauptfächersysteme,
s = Secundärfächersysteme von Dentinröhrchen.
Dl = Dentin mit Lamellarstructur.
Dg = Dentin mit Globularstructur.
J = Interglobularräume.
Dh = Dentinhöhlen.
Dkk = Dentinhöhlenkränze (Körnellagen, granular layers).
Dhg = Dentinhöhlenguirlanden.
VD = Vitrodentin.
PD = Plicidentin.
OD = Osteodentin (umfassend alle Uebergangsstadien vom Dentin bis zum Knochen).
ODb = Osteodentin des basalen Fachwerkes.
C = Cement,
  kk = Knochenkörperchen,
  c = Gefässcanäle,
  hc = Eintrittsstellen horizontaler Gefässcanäle von der Gaumenfläche aus.
f = Aussenfurchen.
e = Speichenförmige Einstülpungen der peripherischen Schicht in die Dentinfalten.
P = Pulpa.
o = Theilweiser Ersatz der Odontoblastenschicht durch Brauneisen.
br = Scheinbare »Odontoblastenbrücken«.

Erklärung von Tafel I.

Querschliffe durch Kieferzähne von Sclerocephalus.

Figur 1. Querschliff durch die äusserste, solide Zahnspitze. Vergrösserung 145. Seite 490.

Figur 2. Die stumpfere Zahnschneide von Figur 1 mit ausgezeichneter Lamellar- und Globularstructur. Vergrösserung 550. Seite 491.

Figur 3. Partie aus der Nähe der schärferen Zahnschneide. Vergrösserung 550. Seite 491.

Figur 4. *a* bis *c* Verzweigungen und Verästelungen von Dentinröhrchen der Zahnspitze, *d* und *e* solche im Querschnitte. Vergrösserung 1020. Seite 492.

Figur 5 und 6. Querschnitte durch die noch immer soliden Zahnspitzen von Nachbarzähnen, etwas tiefer als Figur 1.

Figur 5: Vergrösserung 55, Seite 493; Figur 6: Vergrösserung 65, Seite 494.

Figur 7. Die in Figur 6 mit ⌒ bezeichnete Zahnschneide mit Schmelz, sowie lamellirtem und globulirtem Dentin, in 550 facher Vergrösserung. Seite 495.

Figur 8. Partie aus der Nähe der gegenüber liegenden Zahnschneide mit Globularstructur und Interglobularräumen in 550 facher Vergrösserung. Seite 496.

Figur 9. Tiefer gelegener Querschnitt durch die Zahnspitze nach Eintritt der Pulpa in dieselbe. Sich ausdünnendes Schmelzhäutchen. OWEN'sche Conturlinien. Vergrösserung 55. Seite 498.

Figur 10. Segment dieses Querschnittes mit Dentinhöhlenkränzen, Secundärbiegungen und Verzweigungen der Dentinröhrchen, in 550 facher Vergrösserung. Seite 499.

Figur 11. Dentinhöhlen mit einmündenden und austretenden Dentinröhrchen aus dem nämlichen Querschliffe, in 1100 facher Vergrösserung. Seite 501.

Figur 12. Der Pulpkegel hat sich erweitert, die Faltung des Zahnmantels beginnt. Die Dentinröhrchen gruppiren sich zu selbständigen Einzelfächern. Vergrösserung 30. Seite 503.

Fig. 5.

Dr

S

VD

Fig. 3.

S

Dg

Dr

Fig. 4.

a

b

c

d

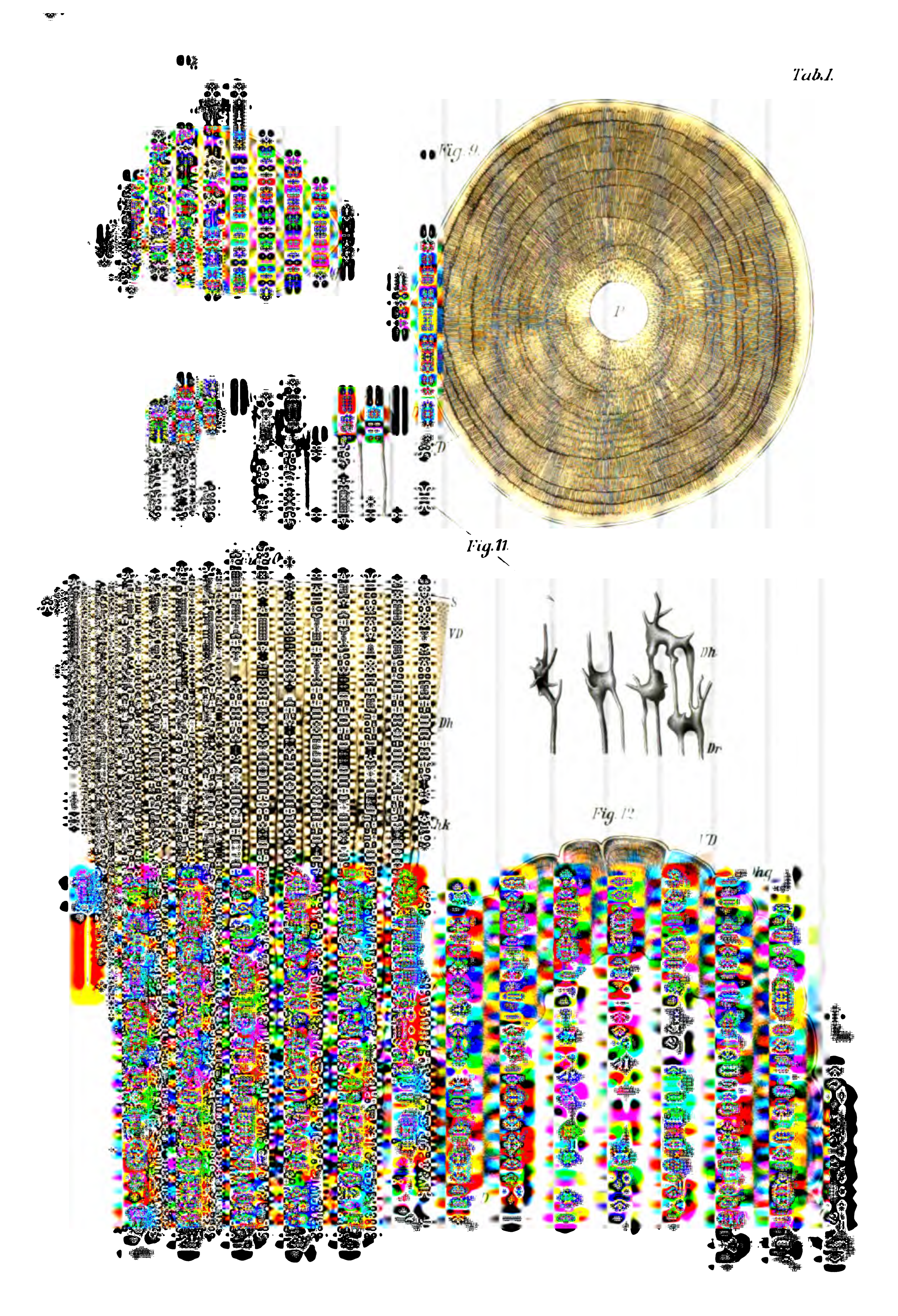
e

Fig. 7

S

Dg

Tab. I.



Erklärung von Tafel II.

Querschliffe durch Kieferzähne von Sclerocephalus.

Figur 13. Abschnitt des Zahnmantels Figur 12; rechts mit Hinweglassung des Fächersystemes von Dentinröhrchen, um die globulare und lamellare Structur der Dentingrundmasse zur Darstellung zu bringen. Vergrösserung 105. Seite 504.

Figur 14. Abschnitt des Zahnmantels Figur 12 (rechts unten). Gefässcanäle (*c*) und Knochenkörperchen (*kk*) treten in die peripherische Hüllschicht ein, die sich zwischen je zwei Röhrchenfächern speichenförmig nach innen stülpt und diese von einander scheidet. Vergrösserung 55. Seite 505.

Figur 15. Die Faltung des Dentinmantels ist weiter fortgeschritten. In der peripherischen Hüllschicht steigt unter fast jeder Aussenfurche ein Canal empor. Vergrösserung 30. Seite 505.

Figur 16. Abschnitt aus Figur 15, ein Hauptfächer von Dentinröhrchen, diese in Guirlanden von Dentinhöhlen mündend und beiderseits begrenzt von Einstülpungen der Hüllschicht. Lamellare und globulare Structur des Dentins. Vergrösserung 105. Seite 506.

Figur 17. Partie aus dem Querschnitt Figur 15. Globularstructur der Grundmasse zweier Fächersysteme von Dentinröhrchen, diese getrennt durch die speichenförmige Einstülpung der Hüllschicht. Halbschematisch. Vergrösserung 235. Seite 509 u. 510.

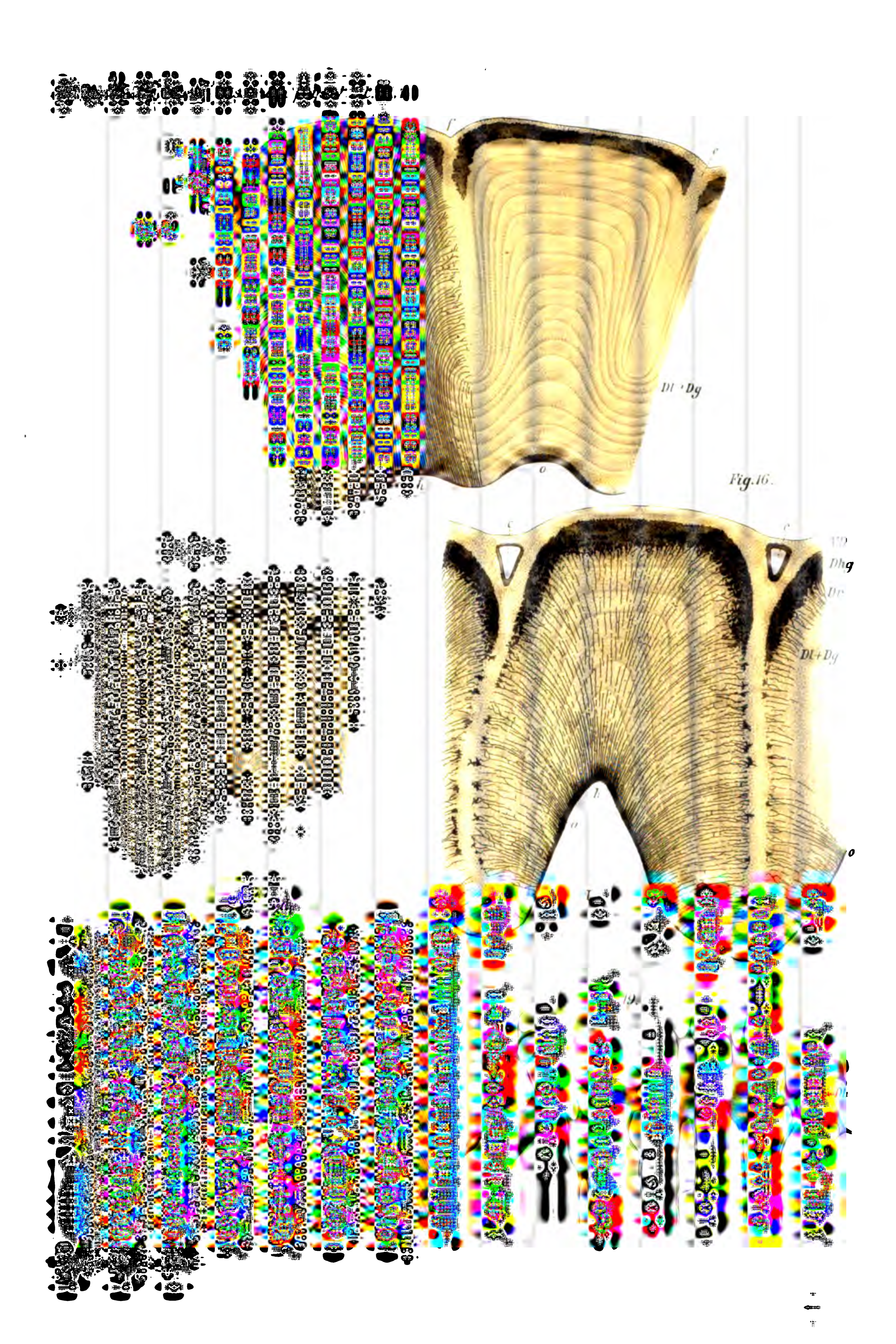
Figur 18 und 19. Dentinhöhlen mit einmündenden Dentinröhrchen. Vergrösserung 1100. Figur 18 Dentinhöhlen der Körnelguirlanden, Figur 19 solche vom Rande der Einstülpung *e* in die Medianzone der Falten. Seite 508.

Figur 20. Die Falten greifen tiefer ein, die Hüllschicht mit ihren Einstülpungen hat die Structur des Cementes angenommen. Vergrösserung 55. Seite 511.

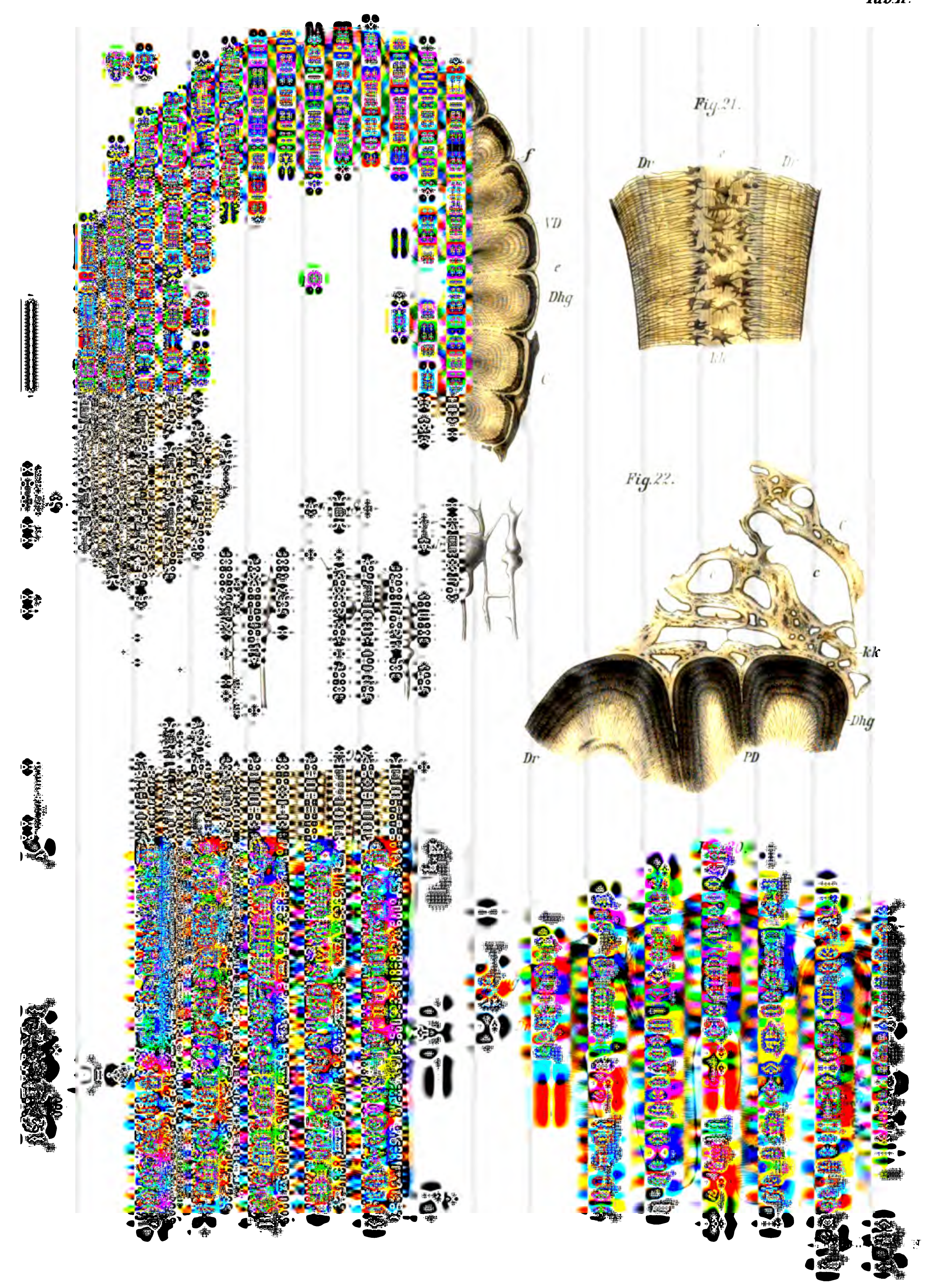
Figur 21. Abschnitt einer Falte des Querschnittes Figur 20 in 145facher Vergrösserung. Die Einstülpung der Hüllschicht in die Medianzone der Falten enthält Knochenkörperchen (*kk*). Die Dentinröhrchen münden medianwärts in Dentinhöhlen. Seite 513.

Figur 22. Auf der nach dem Aussenrande des Kiefers gerichteten Flanke des Faltenzahnes verstärkt sich die Hüllschicht von Cement. Vergrösserung 55. Seite 516.

Figur 23. Längsschnitt durch ein Stück des Zahnmantels. Vergrösserung 55. Seite 510.


Dl+Dg
Fig.16.
Dhg
Dl+Dg

Tab.II.





Erklärung von Tafel III.

Querschliffe durch Kieferzähne von Sclerocephalus.

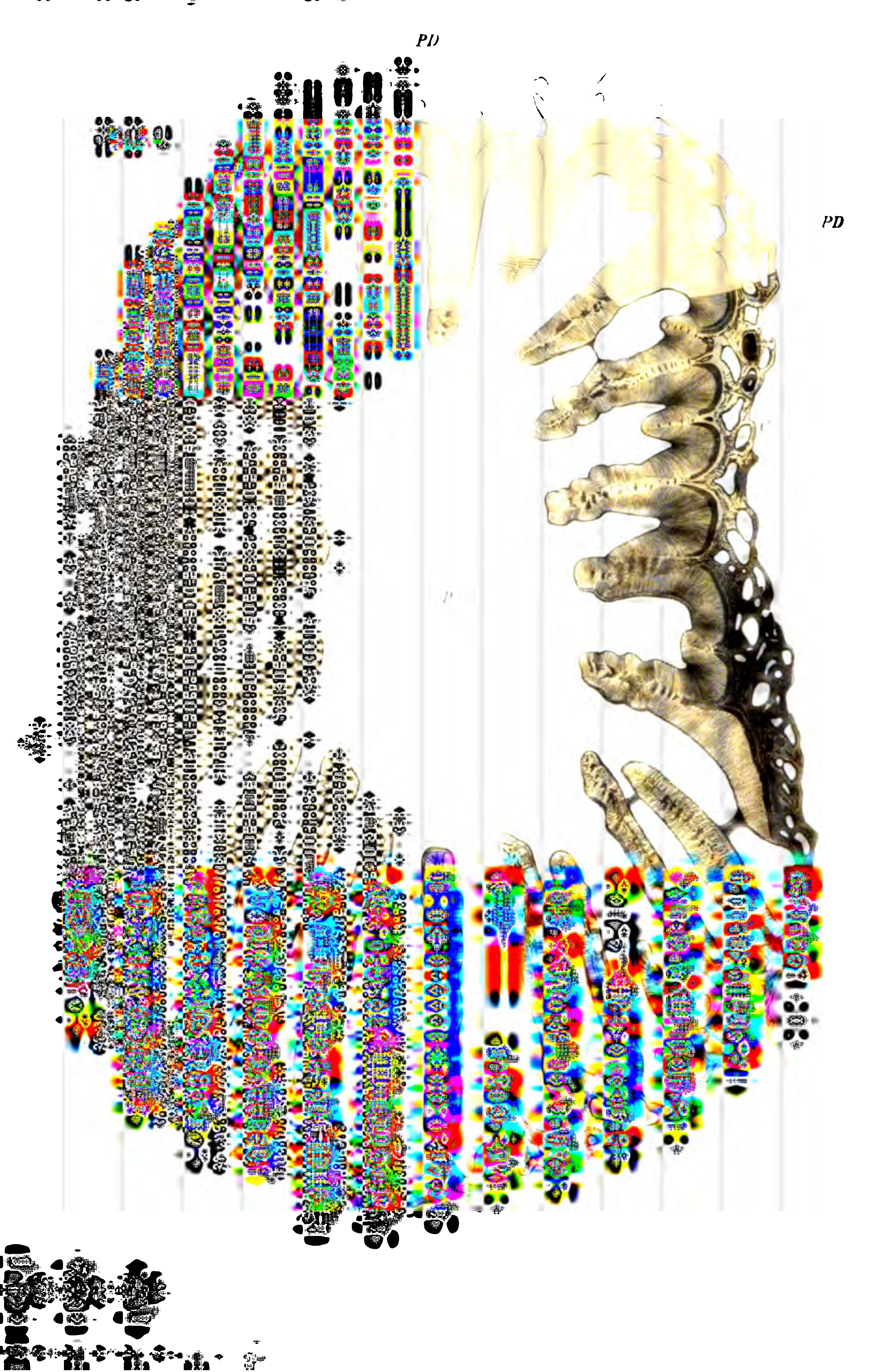
Figur 24. Querschnitt durch den Zahnsockel. Die nach dem äusseren Kieferrande gerichtete Zahnflanke ist mit kurzen, plumpen Falten und mit einer dicken Cementschicht versehen, das entgegengesetzte, nach dem Gaumen gewandte Segment entbehrt der letzteren; zwischen den Basen der schlanken Falten treten von der Gaumenfläche her horizontale Gefässcanäle (*hc*) ein. Vergrösserung 24. Seite 513.

Figur 25. Abschnitt aus dem äusseren Segmente des Zahnsockelquerschliffes Figur 24. Vergrösserung 55. Seite 514.

Figur 26. Abschnitt aus dem Gaumensegmente des nämlichen Querschliffes, in 55facher Vergrösserung. Seite 518.

Figur 27. Theil einer schlanken Falte von Fig. 24 mit medianer Cementeinstülpung. Vergrösserung 145. Seite 519.

Figur 28. Querschnitt durch den basalen Theil des Zahnsockels. Die Falten streben nach noch grösserer Zerschlitzung der Pulpa und Individualisirung der Einzelpulpen der ursprünglichen Zahnanlage. Gleichzeitig assimiliren sich Dentin und Cement mehr und mehr zu einem weniger differenzirten Mittelgliede, dem Osteodentin. Vergrösserung 24. Seite 522.


PD
PD

Tab. III.

Fig. 27.

Dr + Dh

c + kk

hc

Fig. 26.

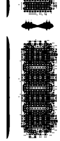
o

s

C

Dhg

o + Dr + Dh

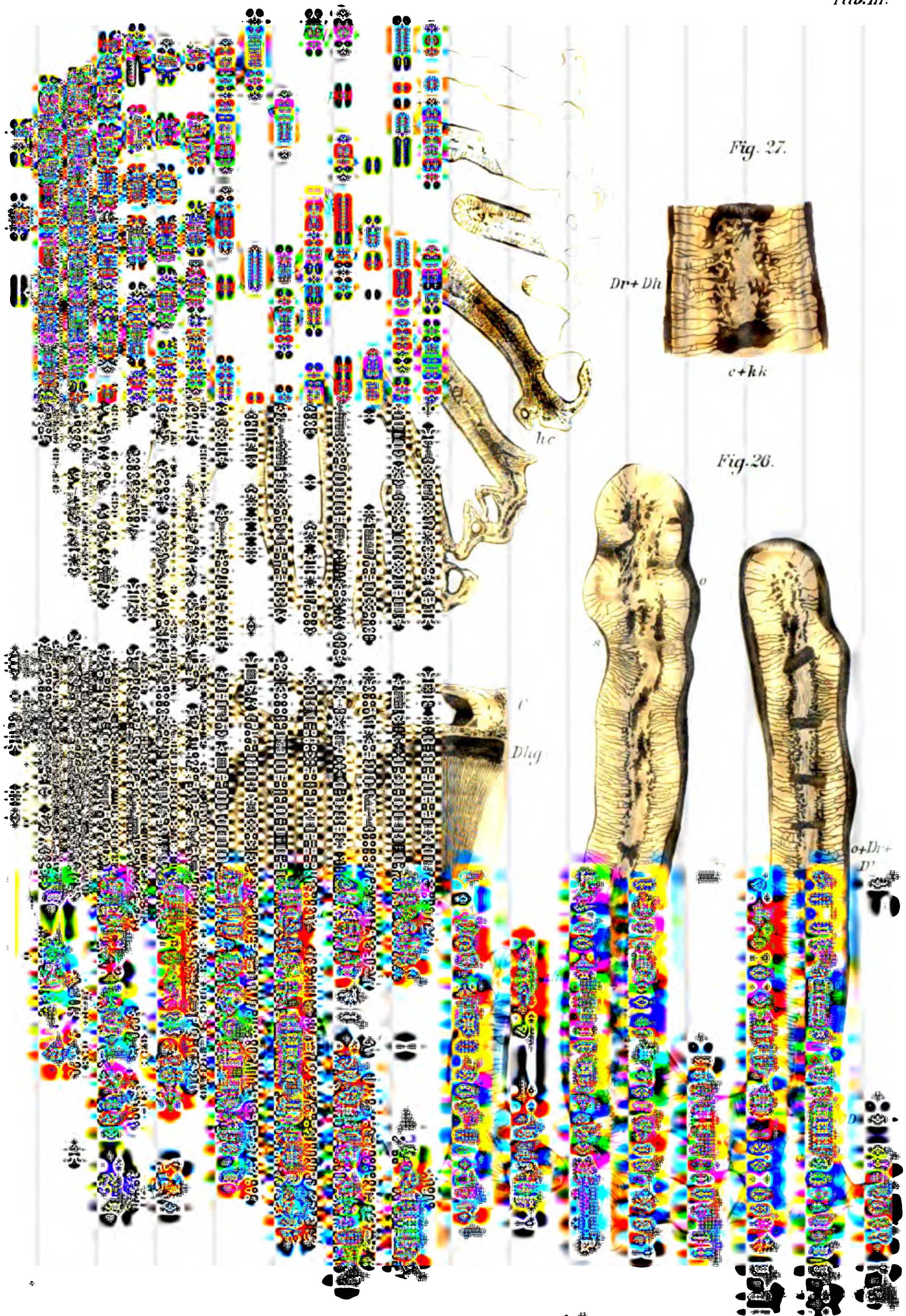


PD

PD

P

Tab. III.



Erklärung von Tafel IV.

Fig. 29—36 Querschliffe durch Kieferzähne, Fig. 37—41 Schliffe durch Gaumenzähne von Sclerocephalus.

Figur 29 und 30. Abschnitte aus dem seitlichen Segmente (Fig. 29) und dem Gaumensegmente (Fig. 30) von Querschnitt Figur 28, mit Verflössung von Dentin und Cement. Vergrösserung 55. Seite 522 und 524.

Figur 31. Querschnitt durch die Zahnbasis. Die Pulpa ist in Einzelcanäle zerlegt, welche den Zahnkeimen der ursprünglichen Anlage am nächsten kommen. Das Fachwerk von Scheidewänden besteht aus Osteodentin. Vergrösserung 30. Seite 526.

Figur 32, 33 und 34. Abschnitte aus Fig. 31 zur Illustration des Osteodentins der Scheidewände sowie der »Brücken«. Fig. 32 in 105 facher, Fig. 33 und 34 in 55 facher Vergrösserung. Seite 527.

Figur 35. Die Odontoblastenschicht des Osteodentins communicirt durch Dentinröhrchen mit den Knochenkörperchen. Vergrösserung 1100. Seite 528.

Figur 36. In der Medianzone der Osteodentinwände fluidal angeordnete Knochenkörperchen. Vergrösserung 550. Seite 527.

Figur 37 bis 41. Schliffe durch Vomerzähne. Fig. 37 Längsschliff, Fig. 38, 39, 40 und 41 Querschliffe. Vergrösserung 145. Dünnes Schmelzhäutchen, solide Spitze von Dentin, stumpfer Pulpkegel, die Dentinröhrchen namentlich im Zahnsockel von sehr primitivem Habitus. Seite 549.

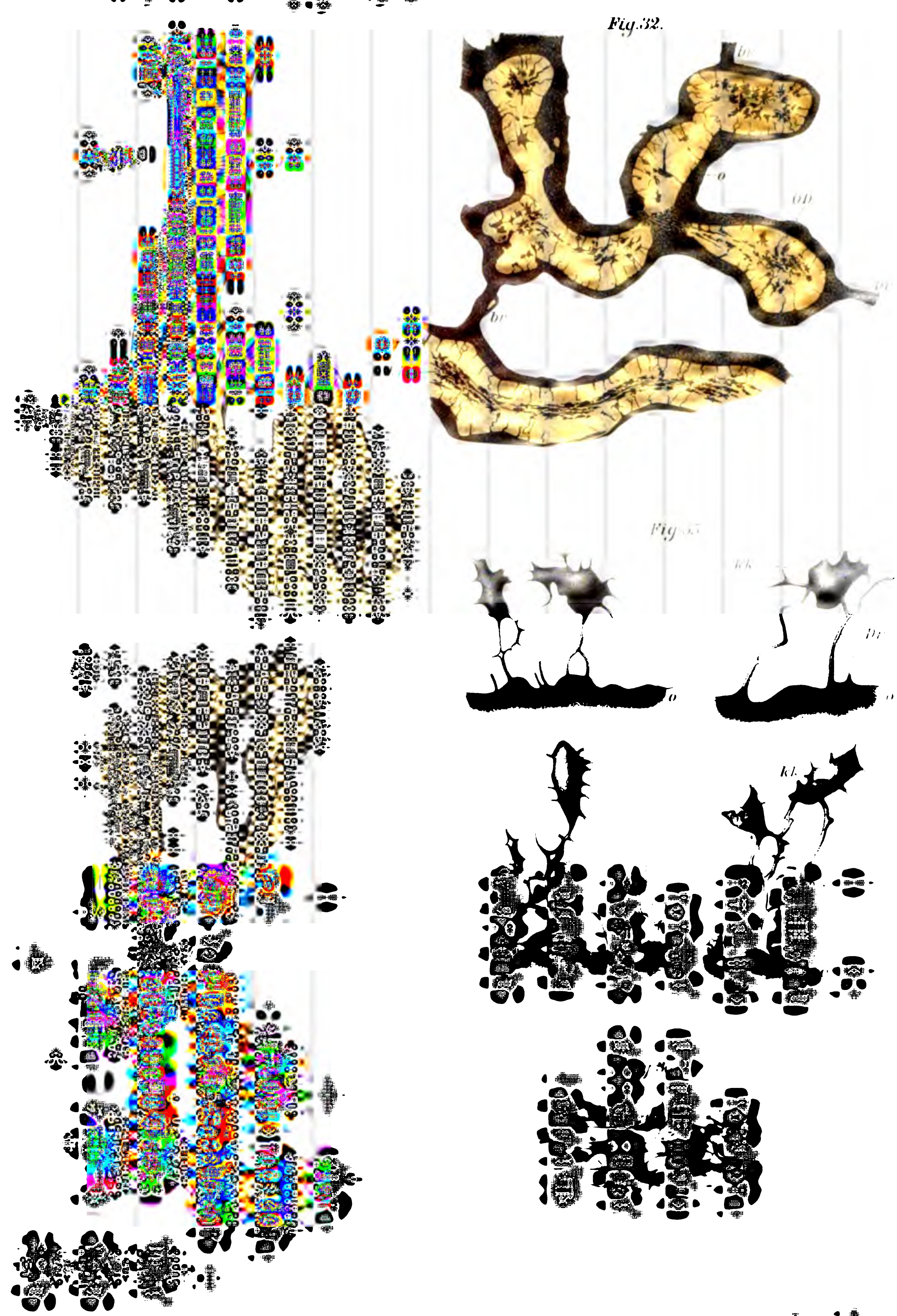
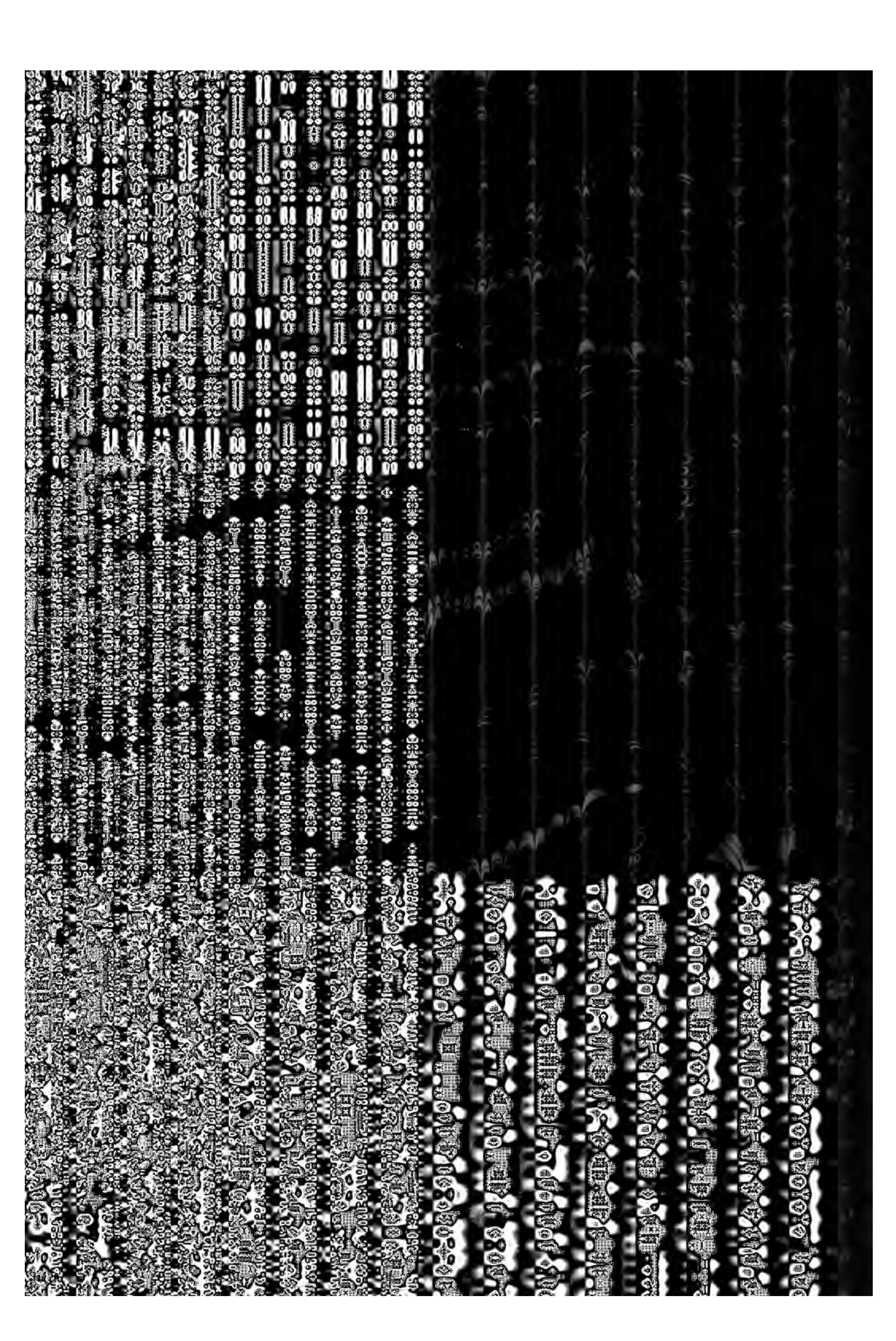

Fig.32.
br
o
OD
br
br
kk
br
o
o
kk

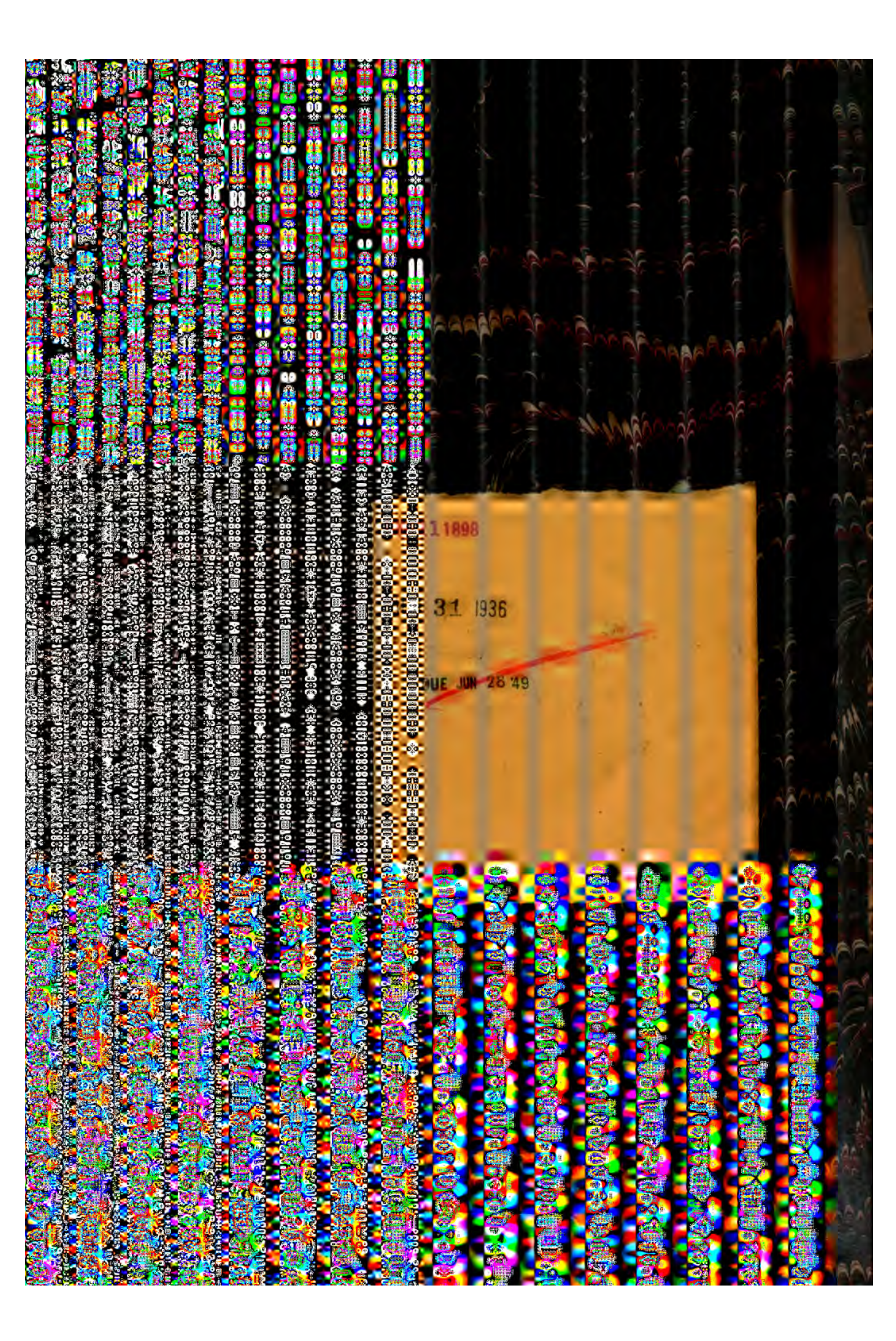
Fig. 30

Fig. 38.

Fig. 39.

Fig. 40




1 1898
31 1936
DUE JUN 28 '49

